

فصل سوم

## روابط طولی در مثلث



عکس: فرهاد گوی‌وند

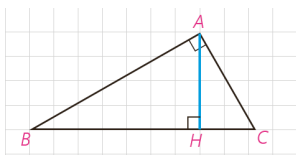


تنودولیت (زاویه‌یاب) یکی از ابزارهای لازم برای این‌گونه محاسبات عملی است.

■ محاسبه فاصله‌های غیرقابل دسترس یکی از مهم‌ترین کاربردهای روابط طولی در هندسه است. از جمله آنها محاسبه ارتفاع کوه‌های بلند است. رشته‌کوه اشترانکوه که ارتفاع آن در برخی نقاط به بیش از ۴۰۰۰ متر می‌رسد در استان لرستان واقع است.

## قضیه سینوس ها

## یادآوری



منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازه‌های پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند. در سال گذشته روابط طولی زیر را در مثلث قائم‌الزاویه دیدیم:

$$AB^2 = BC \cdot BH \quad 1$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \quad 2$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع قائم واسطه هندسی وتر و تصویر آن ضلع بر وتر است.

$$AH^2 = BH \cdot CH \quad 3$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی قطعه‌های ایجاد شده روی وتر است.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad 4$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر برابر است. (قضیه فیثاغورس)

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \quad 5$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه حاصل ضرب اضلاع قائمه با حاصل ضرب ارتفاع وارد بر وتر در وتر برابر است.

اینک به ادامه بحث در مثلث‌های دلخواه می‌پردازیم.

## فعالیت ۱

در کتاب ریاضی ۱ (پایه دهم) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا

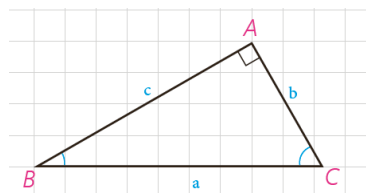
شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، جاهای خالی را

پر کنید:

$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a$$

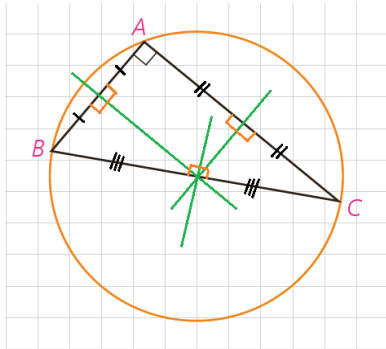
$$\sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a$$

$$\sin A = \sin 90^\circ = 1 \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a$$



بنابراین داریم :  
در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع برابر است با اندازه وتر. مثلث ..

## ۲ فعالیت



در کتاب هندسه ۱ دیدیم که عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایره محیطی مثلث است. دایره محیطی مثلث قائم الزاویه ABC را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟

محل برخورد عمود منصف‌ها در هر مثلث قائم الزاویه وسط وتر است. پس مرکز این دایره وسط وتر است.

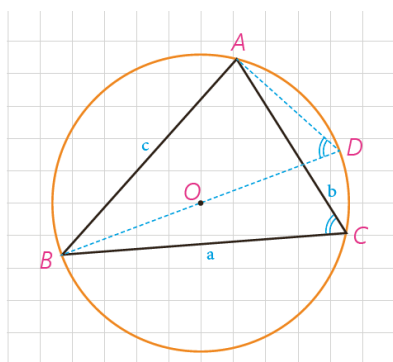
$\widehat{BAC} = 90^\circ$  یک زاویه محاطی است و اندازه کمان مقابل آن  $180^\circ$  یعنی وتر BC دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، یعنی قطر دایره است.  
با توجه به نتیجه فعالیت (۱) می‌توانیم بگوییم :

در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه قطر..... قطر... دایره محیطی مثلث.

اکنون نشان می‌دهیم این نتیجه‌گیری برای هر مثلث دلخواه نیز درست است.

## ۳ فعالیت

مثلث دلخواه  $ABC$  ( $\hat{A} < 90^\circ$ ) و دایره محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم.



قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم. ( $BD = 2R$ )

۱- زوایای  $\hat{C}$  و  $\hat{D}$  چرا با هم برابرند؟

این دو زاویه محاطی هستند و هر دو روبه‌رو به کمان  $\widehat{AB}$  هستند پس هم اندازه‌اند.

اندازه آنها برابر است با نصف کمان  $\widehat{AB}$ .

۲- چرا مثلث ABD در رأس A قائم الزاویه است؟

زیرا زاویه A محاطی روبه‌رو به قطر دایره است.  $\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{180^\circ}{2}$

۳- با توجه به دو قسمت قبل، داریم :

$$\sin C = \sin D \text{ و } \sin D = \frac{c}{BD} \Rightarrow \sin C = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$$

۴- به طور مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R$$

۵- حال مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} > 90^\circ$ ) را در نظر بگیرید. نقطه دلخواه  $A'$  روی کمان

$BC$  را به  $B$  و  $C$  وصل می‌کنیم. زوایای  $\hat{A}$  و  $\hat{A}'$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

این دو زاویه مکمل هم هستند.

راه اول: چهارضلعی  $ABA'C$  محاطی است پس بنا بر قضیه زوایای مقابل مکمل هستند.

راه دوم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BAC}}{2} \\ \hat{A}' &= \frac{\widehat{BAC}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = \frac{\widehat{BA'C}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{BA'C} + \widehat{BAC}}{2} = \frac{360^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$$

$\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$  بنابراین  $\hat{A}'$  زاویه‌ای حاده است.

با توجه به آنچه از مثلثات می‌دانید، جاهای خالی را پر کنید :

$$\sin A = \sin(180^\circ - A') = \sin A'$$

در مثلث  $A'BC$ ، طبق نتیجه قسمت (۳) می‌توانیم بنویسیم :

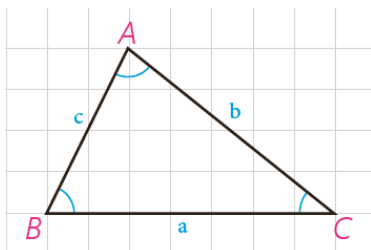
$$\frac{a}{\sin A'} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

طول قطر برابر با  $2R$  است.

### نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به

آن برابر است با طول قطر دایره محیطی مثلث.



قضیه سینوس‌ها: در مثلث  $ABC$  با اضلاع  $BC=a$ ،  $AC=b$  و  $AB=c$  داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

که  $R$  شعاع دایره محیطی مثلث است.

**مثال ۱:** در مثلث  $ABC$ ،  $BC=10\text{ cm}$  و  $\hat{A}=12^\circ$  و  $AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}$  مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زوایای  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  را به دست آورید.

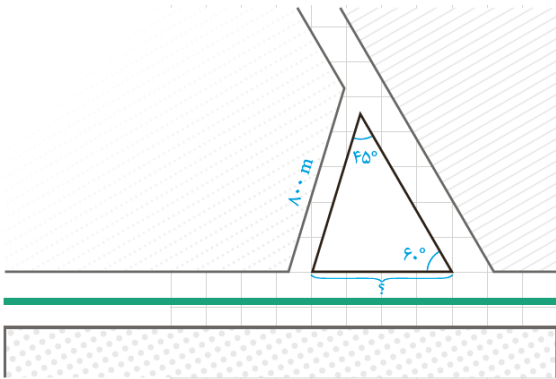
**حل:** به کمک قضیه سینوس ها می توان نوشت:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin 12^\circ} = 2R \text{ و } \sin 12^\circ = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ و } R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin B = \frac{10\sqrt{6}}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow B=45^\circ \text{ یا } 135^\circ \text{ و } \hat{A}=12^\circ \Rightarrow \hat{B}=45^\circ \Rightarrow \hat{C}=115^\circ$$



**مثال ۲:** از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویه  $6^\circ$  جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول  $80\text{ m}$  متر بنا کند تا با زاویه  $45^\circ$  از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله ای از رأس زاویه  $6^\circ$  باید شروع شود و با بلوار چه زاویه ای می سازد؟

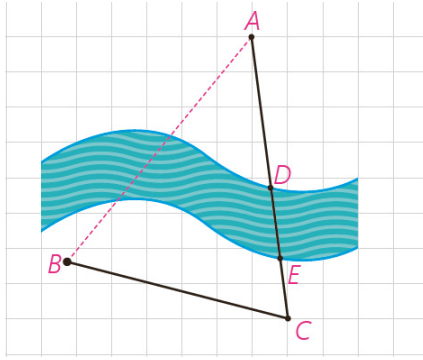
**حل:** با یک شکل مناسب مسئله را مدل سازی می کنیم. اولاً با توجه به مجموع اندازه های زوایای داخلی مثلث، روشن است که  $\hat{B} = 180^\circ - (45^\circ + 6^\circ) = 75^\circ$  یعنی خیابان فرعی باید با زاویه  $75^\circ$  از بلوار جدا شود. ثانیاً به کمک قضیه سینوس ها در

مثلث  $ABC$  داریم:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{80}{\sin 6^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow BC = \frac{80 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{80\sqrt{6}}{3} \approx 653/2\text{ m}$$

یعنی خیابان فرعی را باید از فاصله تقریبی  $653/2$  متر با زاویه  $75^\circ$  بنا کنیم.

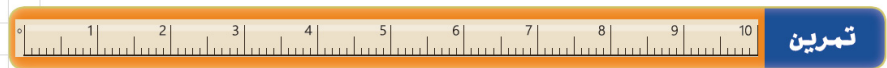
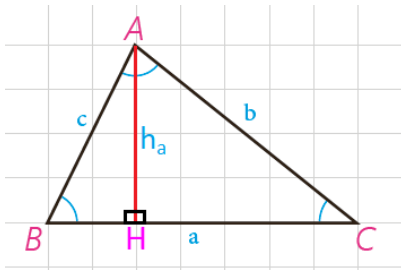


می خواهیم روی یک رودخانه عمیق بین دو نقطه A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به دست بیاوریم؛ اما امکان اندازه گیری مستقیم (به دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطه A در جهتی حرکت می کنیم تا با عبور از قسمت کم عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه گیری می کنیم؛ سپس با زاویه یاب (تئودولیت) زاویه دید AC از نقطه B ( $\hat{B}$ ) و زاویه دید AB از C ( $\hat{C}$ ) را اندازه می گیریم. به صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  می توان فاصله AB را به دست آورد:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}))} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(\hat{B} + \hat{C})}$$

اگر  $BC=3\text{km}$  و  $\hat{B}=7^\circ$  و  $\hat{C}=6^\circ$  به کمک ماشین حساب طول AB را به دست آورید.

$$AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(\hat{B} + \hat{C})} \Rightarrow AB = \frac{3 \times \sin 5^\circ}{\sin(7^\circ + 6^\circ)} \approx \frac{3 \times 0.087}{0.126} \approx 1/97$$



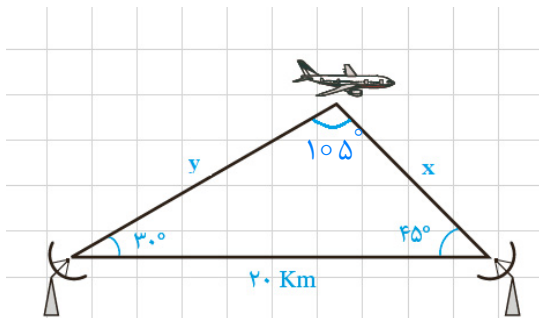
۱- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) با ارتفاع  $AH = h_a$  داریم:

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \\ S &= \frac{1}{2}a.h_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow bc = ah_a \xrightarrow{\text{دو طرف به توان 2}} (bc)^2 = (ah_a)^2 \Rightarrow b^2c^2 = a^2h_a^2$$

$$\Rightarrow b^2c^2 = (b^2 + c^2)h_a^2 \Rightarrow b^2c^2 = b^2h_a^2 + c^2h_a^2 \xrightarrow{+b^2c^2h_a^2} \frac{b^2c^2}{b^2c^2h_a^2} = \frac{b^2h_a^2}{b^2c^2h_a^2} + \frac{c^2h_a^2}{b^2c^2h_a^2} \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

۲- دو ایستگاه رادار، که در فاصله  $20^\circ$  کیلومتری از هم واقع اند، هواپیمایی را با زاویه های  $30^\circ$  و  $45^\circ$  درجه رصد کرده اند. فاصله هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.



$$\frac{20}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{0.96} = \frac{x}{0.5} \Rightarrow x \approx 10/416 \\ \frac{20}{0.96} = \frac{y}{0.707} \Rightarrow y \approx 14/72 \end{cases}$$



## قضیه کسینوس ها

می دانیم که در مثلث قائم الزویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) با داشتن طول های دو ضلع ( $AB=c$ ) و ( $AC=b$ ) می توانیم اندازه وتر مثلث ( $BC=a$ ) را بر حسب  $b$  و  $c$  به دست آوریم:  $a^2 = b^2 + c^2$  حال می بینیم که اگر  $\hat{A}$  مساوی  $90^\circ$  هم نباشد، می توانیم این کار را انجام دهیم.

### ۱ فعالیت

در مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} < 90^\circ$ )، ارتفاع  $BH$  را رسم کرده ایم. با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث های قائم الزویه، جاهای خالی را پر کنید:

$$\cos A = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \times \cos A \quad \text{و} \quad CH = b - AH = b - c \cdot \cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \times \sin A$$

$$\Delta BHC : BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \cdot \sin A)^2 + (b - c \cdot \cos A)^2$$

حال به کمک اتحاد های جبری و اتحاد مثلثاتی  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ، نشان دهید:

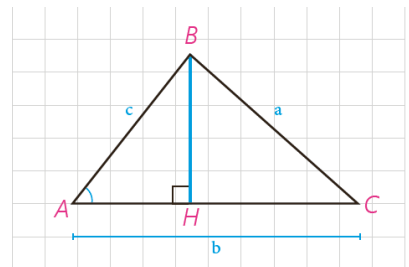
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$a^2 = (c \cdot \sin A)^2 + (b - c \cdot \cos A)^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 + c^2 \cos^2 A - 2bc \cdot \cos A$$

$$= b^2 + c^2 (\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}) - 2bc \cdot \cos A$$

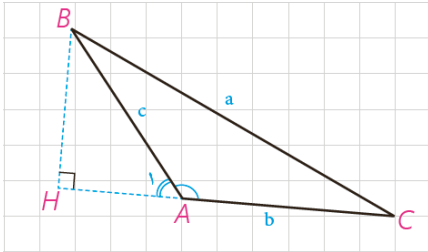
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$



اکنون در مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} > 90^\circ$ ) ارتفاع  $BH$  را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم.  
 اگر زاویه خارجی رأس  $A$  باشد با توجه به اینکه  $\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}$  داریم:  
 $\sin A_1 = \sin A$  و  $\cos A_1 = -\cos A$  و در مثلث  $ABH$  نیز با توجه به تعریف نسبت‌های

مثلثاتی می‌توان نوشت:



$$\cos A_1 = \frac{AH}{c} \text{ و } \sin A_1 = \frac{BH}{c} \Rightarrow AH = \dots c \dots \times (-\cos A) \text{ و}$$

$$BH = \dots c \dots \times \sin A \text{ و } CH = b + AH = b - c \cdot \cos A$$

$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (\dots c \cdot \sin A \dots)^2 + (\dots b - c \cdot \cos A \dots)^2$$

و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$a^2 = (c \cdot \sin A)^2 + (b - c \cdot \cos A)^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 + c^2 \cos^2 A - 2bc \cdot \cos A$$

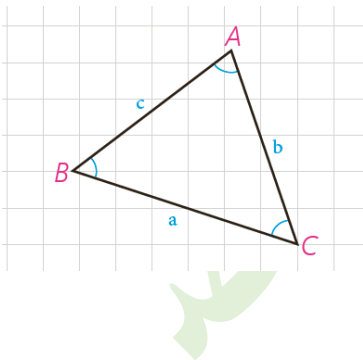
$$= b^2 + c^2 (\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}) - 2bc \cdot \cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

**سؤال:** در حالتی که زاویه  $A$  قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$



**قضیه کسینوس‌ها:** در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

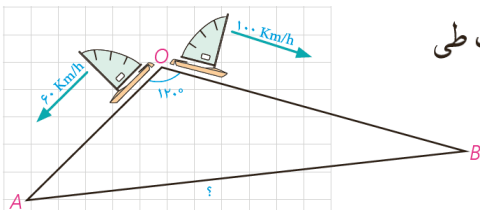
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

**مثال:** دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های  $60 \text{ km/h}$

و  $100 \text{ km/h}$  و با زاویه  $120^\circ$  از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

**حل:** با توجه به نقطه شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی

شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود:





$$OA = 60 \times \frac{1}{5} = 30 \text{ و } OB = 100 \times \frac{1}{5} = 50$$

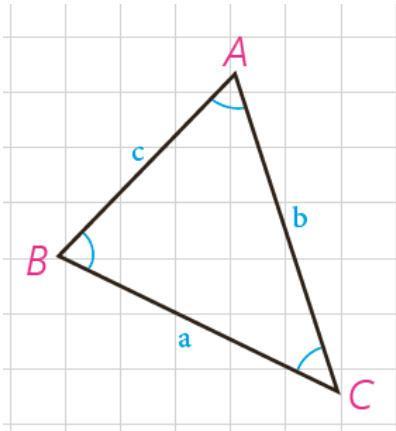
حال به کمک قضیه کسینوس ها می نویسیم :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 120^\circ \text{ و } \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$AB^2 = 900 + 2500 - 2 \times 30 \times 50 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4900 \Rightarrow$$

$$AB = 70 \text{ km}$$

### کارد در کلاس



در مثلث ABC،  $AB = 2\sqrt{2}$ ،  $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$  و  $\hat{A} = 60^\circ$

۱- طول ضلع BC را به کمک قضیه کسینوس ها به دست آورید.

$$BC^2 = \dots \cdot AC \cdot ^2 + \dots \cdot AB \cdot ^2 - 2 \times \dots \cdot AC \cdot \dots \times \dots \cdot AB \cdot \dots \times \cos A \Rightarrow$$

$$BC^2 = \dots (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \dots + \dots (2\sqrt{2})^2 \dots - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$6 + 2 + 2\sqrt{12} + 8 - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \frac{1}{2} = 16 + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{12} - 4 = 12$$

$$BC^2 = \dots 12 \dots \text{ و } BC = \dots 2\sqrt{3} \dots$$

۲- اندازه  $\hat{C}$  را به کمک قضیه سینوس ها به دست آورید و از آنجا اندازه  $\hat{B}$  را

هم بیابید.

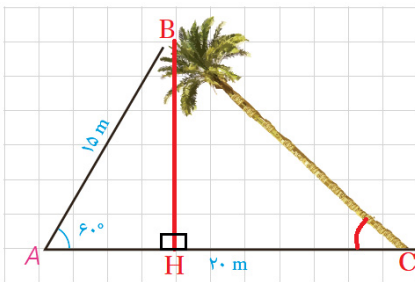
$$\frac{C}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ و } \hat{C} = 24^\circ$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \sin C = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 96^\circ$$



### تمرین



۱- یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه  $60^\circ$  دیده می شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

الف) طول درخت

$$a^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \times 20 \times 15 \times \cos 60^\circ = 400 + 225 - 300$$

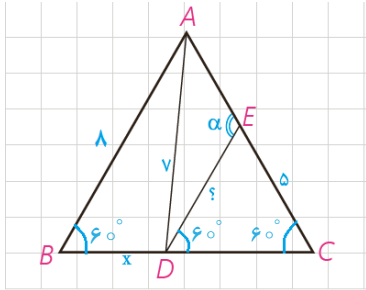
$$\Rightarrow a^2 = 325 \Rightarrow a = 5\sqrt{13}$$

(ب) زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

$$\frac{5\sqrt{13}}{\sin 6^\circ} = \frac{15}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{15 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \approx 0.72 \Rightarrow \hat{C} \approx 46^\circ$$

(پ) فاصله نوک درخت از زمین

$$\sin 6^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{15} \Rightarrow BH = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$



۲- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D، که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ (CD > BD) نقطه E، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟

$$7^2 = x^2 + 8^2 - 2 \times x \times 8 \times \sin 6^\circ \Rightarrow 49 = x^2 + 64 - 8x$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 3$$

$\xrightarrow{BD < DC} BD = 3, DC = 5$

$DC = CE = 5$  در نتیجه مثلث DCE متساوی الساقین است و چون یک زاویه  $6^\circ$  دارد پس متساوی‌الاضلاع است یعنی

$DE = 5$ . در مثلث DCE زاویه  $\alpha$  یک زاویه خارجی است پس:  $\alpha = 6^\circ + 6^\circ \Rightarrow \alpha = 12^\circ$

۳- یک کشتی از یک نقطه با سرعت  $60^\circ$  کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با  $3^\circ$  انحراف به راست با سرعت  $40^\circ$  کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد.

فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

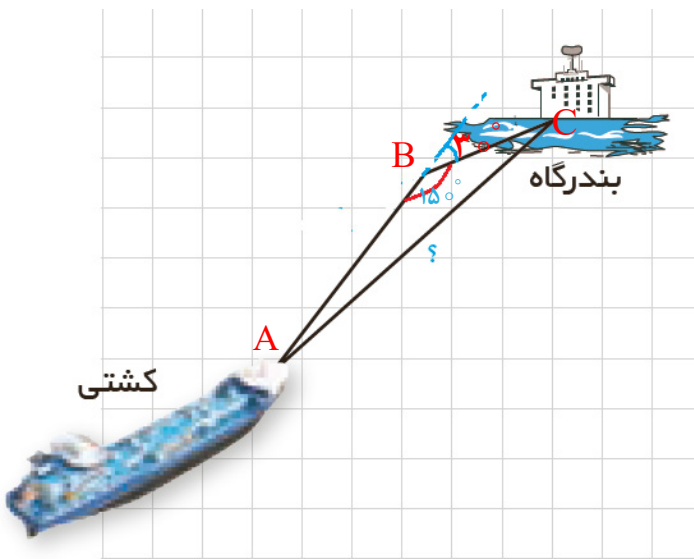
$$AB = 60 \times 1 = 60 \text{ km}, \quad BC = 40 \times 0.5 = 20 \text{ km}$$

$$AC^2 = 60^2 + 20^2 - 2 \times 60 \times 20 \times \cos 15^\circ$$

$$= 3600 + 400 - 2 \times 1200 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4000 + 1200\sqrt{3} = 400(10 + 3\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow AC = 20\sqrt{10 + 3\sqrt{3}}$$



۴- در مثلث  $ABC$ ، میانه  $AM$  را رسم کرده‌ایم ( $MB = MC = \frac{a}{2}$ ). با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث  $AMB$  و  $AMC$ ،  $b^2$  و  $c^2$  را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه‌ها})$$

$$\triangle AMC: b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times m_a \times \cos \alpha$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a \cdot AM \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$\triangle AMB: c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{c}{2} \times m_a \times \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 + a \cdot AM \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} b^2 + c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a \cdot AM \cdot \cos \alpha + \frac{a^2}{4} + AM^2 + a \cdot AM \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2$$

در حالت خاص  $AB = c = 4$ ،  $AC = b = 6$  و  $BC = a = 8$ ، طول میانه  $AM$  را به دست آورید.

$$AB = c = 4, \quad AC = b = 6, \quad BC = a = 8$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 \Rightarrow AM = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{2(36 + 16) - 64}{4} \Rightarrow AM = 10$$

۵- در مثلث  $ABC$ ، نقطه دلخواه  $D$  روی  $BC$  مفروض است. به کمک قضیه

کسینوس‌ها در دو مثلث  $ADC$  و  $ADB$  درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه استوارت})$$

$$\triangle ABD: AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos \alpha$$

$$\xrightarrow{\times DC} AB^2 \cdot DC = DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - 2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

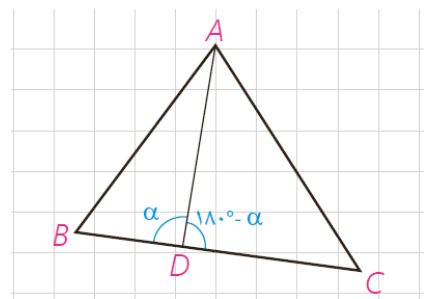
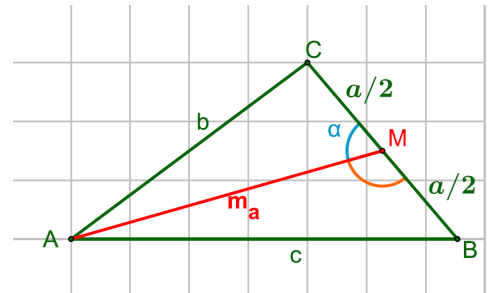
$$\triangle ADC: AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^2 \cdot DB = DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + 2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - 2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos \alpha + DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + 2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 (\underbrace{DC + DB}_{BC}) + BD \cdot DC (\underbrace{DC + DB}_{BC})$$

$$\Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

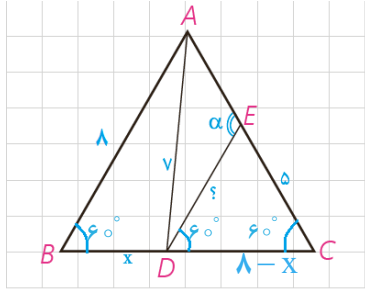


به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

$$DC = DB = \frac{a}{2}, AC = b, \Rightarrow AB = c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \times c^2 + \frac{a}{2} \times b^2 = AD^2 \times a + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times a \Rightarrow \frac{a}{2}(c^2 + b^2) = \frac{a}{2}(2AD^2 + \frac{a^2}{2})$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2AD^2 + \frac{a^2}{2}$$



۶- مسئله ۲ را بار دیگر، این بار به کمک قضیه استوارت حل کنید.

$$AB = AC = BC = 8, AD = 7, DB = x, DC = 8 - x, DB < DC$$

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

$$\Rightarrow 64(8 - x) + 64x = 49 \times 8 + 8x(8 - x)$$

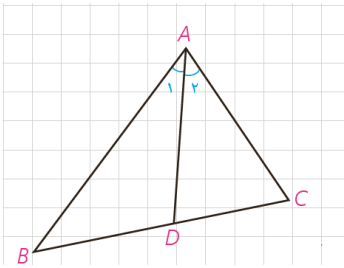
$$\Rightarrow 64 \times 8 - \cancel{64x} + \cancel{64x} = 49 \times 8 + 8x(8 - x)$$

$$\xrightarrow{\div 8} 64 = 49 + 8x - x^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, x = 5 \xrightarrow{DB < DC} x = DB = 3, DC = 5$$

## قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

### ۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی



**قضیه ۱:** در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 : \text{فرض}$$

$$\text{حکم} : \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

اثبات: مطابق شکل از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

الف) چرا  $\widehat{A}_1 = \widehat{E}$  و چرا  $\widehat{A}_2 = \widehat{C}$ ؟

$$\widehat{A}_1 = \widehat{E} \quad \text{ق خطوط موازی} \rightarrow \text{مورب } AD \parallel EC, BE$$

$$\widehat{A}_2 = \widehat{C} \quad \text{ق خطوط موازی} \rightarrow \text{مورب } AD \parallel EC, AC$$

ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای درباره زوایای E و C می‌توان گرفت؟

با توجه به فرض می‌توان نتیجه گرفت که  $\widehat{E} = \widehat{C}$ .

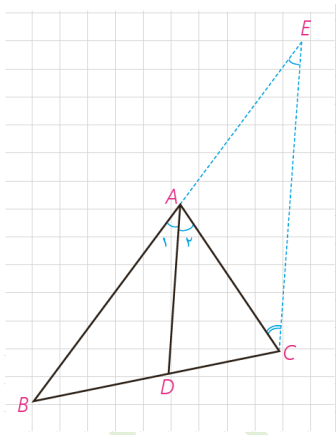
مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟

متساوی الساقین است. (اگر در یک مثلث دو زاویه برابر باشند آن مثلث متساوی الساقین است.)

ج) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC ( $AD \parallel EC$ ) نسبت  $\frac{BD}{CD}$  با کدام نسبت برابر

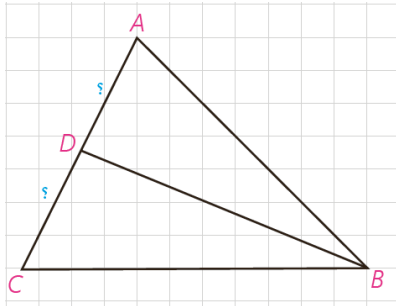
است؟ با توجه به نتیجه قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد:

**مثال:** در مثلث  $ABC$ ،  $AB=7$ ،  $AC=5$  و  $BC=8$  است. طول‌های دو قطعه‌ای را به‌دست آورید که نیمساز زاویه  $B$  روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



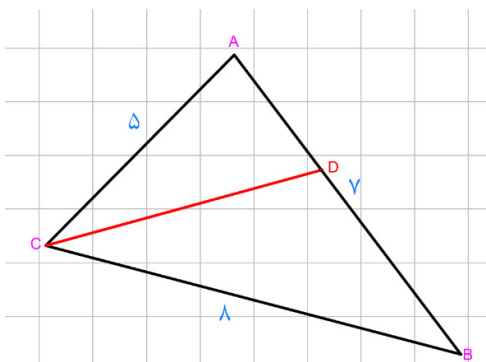
**حل:**

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{5}{CD} = \frac{15}{8}$$

$$CD = \frac{8 \times 5}{15} = \frac{8}{3}, AD = AC - CD = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

### کاردکلاس

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه  $C$  را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به‌دست آورید که این نیمساز روی  $AB$  جدا می‌کند.

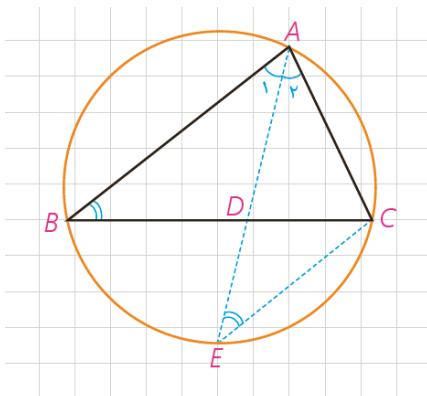


$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{5+8}{8} = \frac{AD+BD}{BD} \Rightarrow \frac{13}{8} = \frac{7}{BD}$$

$$BD = \frac{8 \times 7}{13} = \frac{56}{13} \Rightarrow BD = 7 - \frac{56}{13} = \frac{35}{13}$$

### ۲- محاسبه طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث

در مثلث  $ABC$  برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه  $\hat{A}$  ( $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ )، یعنی  $AD$ ، امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در  $E$  قطع کند و  $E$  را به  $C$  وصل می‌کنیم.



الف) چرا  $\hat{E} = \hat{B}$ ؟

زیرا این دو زاویه هردو محاطی هستند و روبه‌رو به یک کمان ( $AC$ ) هستند.

ب) چرا مثلث‌های  $ABD$  و  $AEC$  متشابه‌اند؟

$$\left. \begin{matrix} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{B} = \hat{E} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{ق اول تشابه}} \triangle ABD \sim \triangle AEC$$

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{CE}{BD}$$



(ت) از تناسب اول نتیجه می‌گیریم :

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD+DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

و چون  $AD \cdot DE = BD \cdot DC$  (چرا؟)

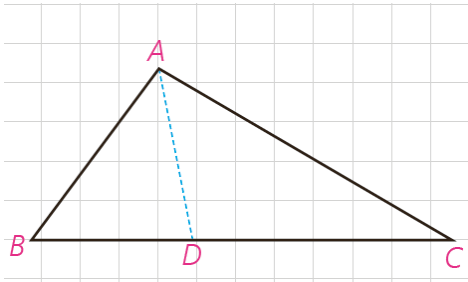
دو وتر  $AE$  و  $BC$  یکدیگر را در نقطه  $D$  درون دایره قطع کرده اند بنا بر قضیه داریم :  $AD \cdot DE = DB \cdot DC$

بنابراین :  $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

**قضیه ۲:** در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

**مثال:** در مثلث  $ABC$ ،  $AB=3$ ،  $AC=5$  و  $BC=7$  است. طول نیمساز زاویه  $A$  را بیابید.

**حل:** به کمک قضیه (۱) طول‌های  $BD$  و  $CD$  را به دست می‌آوریم :



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD+CD}{CD} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{7}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow CD = \frac{35}{8}, BD = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8}$$

حال با توجه به قضیه (۲) داریم :

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 3 \times 5 - \frac{35}{8} \times \frac{21}{8} = 15 - \frac{735}{64} = \frac{225}{64}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$

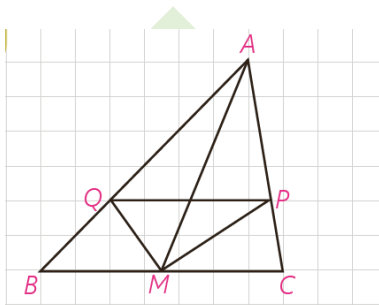


۱- در مثلث  $ABC$ ،  $M$  وسط  $BC$  و  $MP$  و  $MQ$  نیمسازهای زوایای  $AMC$  و

$AMB$  هستند؛ ثابت کنید :  $PQ \parallel BC$

در مثلث  $AMB$  پاره خط  $MQ$  نیمساز زاویه  $\widehat{AMB}$  و در مثلث  $AMC$  پاره خط

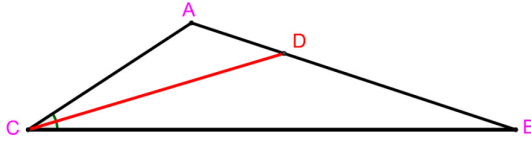
$MP$  نیمساز زاویه  $\widehat{AMC}$  است. پس داریم :



$$\left. \begin{aligned} \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QB} \\ \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \xrightarrow{\text{عکس قی تالس}} PQ \parallel BC$$

۲- در مثلث ABC، AB=۷ و AC=۴ و BC=۱۰ است. طول نیمساز زاویه داخلی

C را به دست آورید.



$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{10+4}{4} = \frac{BD+DA}{DA} \Rightarrow \frac{14}{4} = \frac{7}{DA}$$

$$\Rightarrow DA = \frac{28}{14} = 2 \Rightarrow BD = 7 - 2 = 5$$

$$CD^2 = 4 \times 10 - 2 \times 5 = 30 \Rightarrow CD = \sqrt{30}$$

۳- با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویه  $\hat{A}$

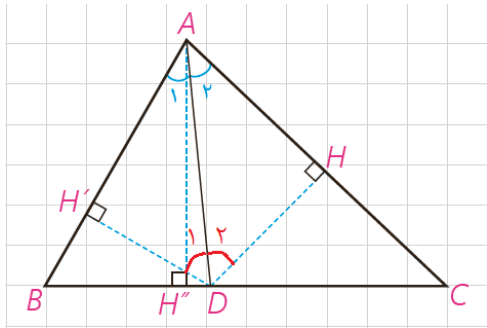
است، روش دیگری برای اثبات قضیه نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

الف) چرا  $DH = DH'$ ؟

راه اول:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{D}_1 &= 90^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{D}_2 &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \hat{A}_2 + \hat{D}_2 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= \hat{A}_2 \\ AD &= AD \end{aligned} \right\} \rightarrow DH = DH'$$



راه دوم: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله

است. پس  $DH = DH'$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} DH' \times AB}{\frac{1}{2} DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AH''}{\frac{1}{2} CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

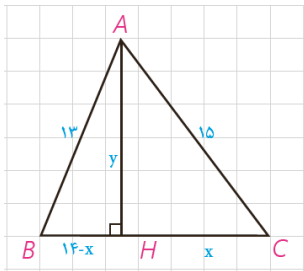
از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود:  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

### قضیه هرون (محاسبه ارتفاع ها و مساحت مثلث)

با مسئله زیر در کتاب هندسه ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های AHC و AHB اندازه های x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :

به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می کنیم :



$$\left. \begin{array}{l} CH^2 + AH^2 = AC^2 \\ BH^2 + AH^2 = AB^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 225 \\ (14-x)^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

طرفین این دوتساوی را از هم کم می کنیم که با حذف  $y^2$  معادله ای بر حسب x به دست می آید :

$$x^2 - (14-x)^2 = 56 \Rightarrow x^2 - 196 - x^2 + 28x = 56$$

$$\Rightarrow x = 9, \quad y = 12, \quad S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = 84$$

اگر همین روش را در حالت کلی در مثلث ABC، که  $BC=a$ ،  $AB=c$  و  $AC=b$  به کار ببریم، نتیجه می شود :

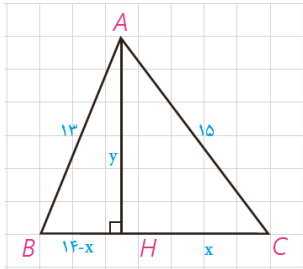
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (\text{دستور هرون})$$

که در این دستور  $P = \frac{a+b+c}{2}$  نصف محیط مثلث است.

(اثبات کامل این دستور را می توانید در مجله ریاضی انتهای فصل ببینید.)

**مثال:** مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون

برابر است با:



$$2P = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow P = 21$$

$$s = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 2^4} = 84$$

و طول‌های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با:

$$h_a = \frac{2s}{a} = \frac{2 \times 84}{14} = 12 \quad h_b = \frac{2s}{b} = \frac{2 \times 84}{15} = \frac{56}{5}, \quad h_c = \frac{2s}{c} = \frac{2 \times 84}{13} = \frac{168}{13}$$

### کاردکلاس

چهارضلعی ABCD یک مزرعه کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به دست آورید:

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به دست می‌آورید؟

$$BD^2 = 60^2 + 80^2 = 3600 + 6400 = 10000 \Rightarrow BD = 100$$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به دست می‌آورید؟

$$S_{ABD} = \frac{60 \times 80}{2} = 2400 \quad \text{مساحت برابر است با نصف حاصلضرب اضلاع قائمه:}$$

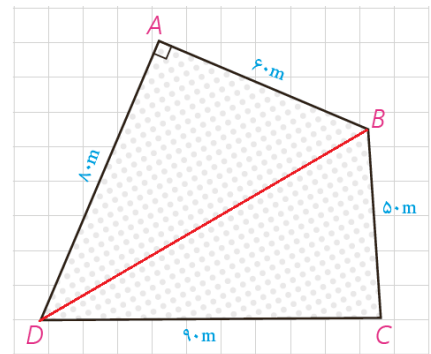
پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{50 + 90 + 100}{2} = 120,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{120 \times (120 - 100) \times (120 - 90) \times (120 - 50)}$$

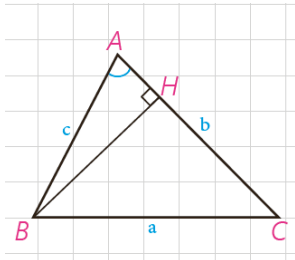
$$\Rightarrow S = \sqrt{120 \times 20 \times 30 \times 70} = \sqrt{36 \times 14 \times 10000} = 600\sqrt{14}$$



$$S = 2400 + 600\sqrt{14}$$

ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با:

## فعالیت



می‌خواهیم دستور دیگری برای محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی به دست آوریم.

۱- در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin A$$

۲- مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

## نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

## کاردکلاس

۱- مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{.۵. + .۷. + .۳.}{۲} = \frac{۱۵}{۲} \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times (\frac{۱۵}{۲} - ۵) \times (\frac{۱۵}{۲} - ۷) \times (\frac{۱۵}{۲} - ۳)}$$

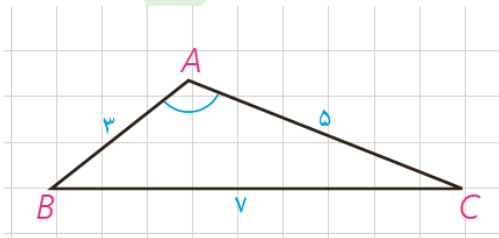
$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۹}{۲}} = \frac{۱۵}{۴} \sqrt{۳}$$

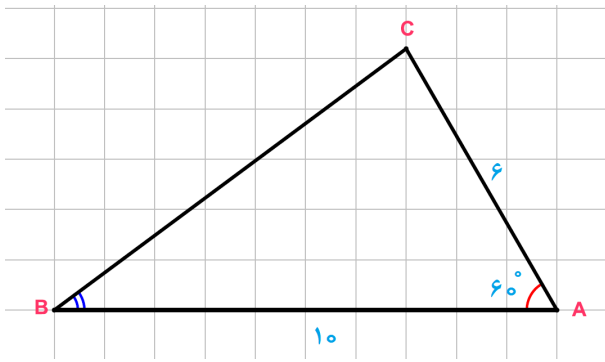
۲- مساحت مثلث را با استفاده از دستور  $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$  بنویسید.

$$S = \frac{1}{2} \times ۳ \times ۵ \times \sin A = \frac{۱۵}{۲} \sin A$$

۳- از مقایسه نتایج ۱ و ۲، اندازه زاویه منفرجه  $\hat{A}$  را به دست آورید.

$$\frac{۱۵}{۲} \sin A = \frac{۱۵}{۴} \sqrt{۳} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$





۱- در مثلث  $ABC$ ،  $AB=10$ ،  $AC=6$  و  $\hat{A}=60^\circ$ .  
الف) طول  $BC$  را به دست آورید.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{1}{2} = 76 \Rightarrow BC = 2\sqrt{19}$$

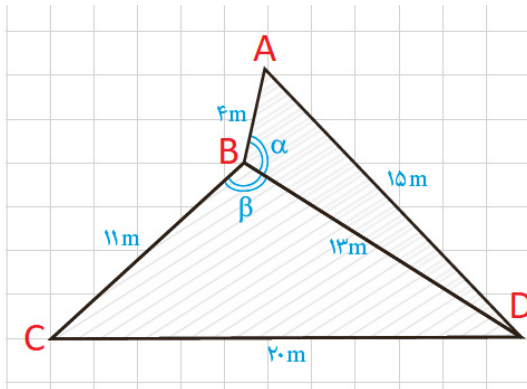
ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

پ) مقدار  $\sin B$  را پیدا کنید.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \frac{\sin B}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{19}} \Rightarrow \sin B = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{19}} \Rightarrow \sin B = \frac{3\sqrt{57}}{38}$$

۲- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$P_{ABD} = \frac{4 + 13 + 15}{2} = 16 \text{ m}$$

$$P_{BCD} = \frac{11 + 13 + 20}{2} = 22 \text{ m}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = 24 \text{ m}^2$$

$$S_{BCD} = \sqrt{22 \times 11 \times 9 \times 2} = 66 \text{ m}^2$$

$$S_{ABCD} = 24 + 66 = 90 \text{ m}^2$$

نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد.

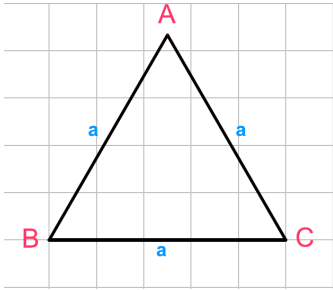
$$(\alpha = \beta)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{ABD} &= \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \alpha \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 4 \times 13 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13} \\ S_{BCD} &= \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin \beta \Rightarrow 66 = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{12}{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$



۳- دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$  را به کمک دستور

هرون به دست آورید.



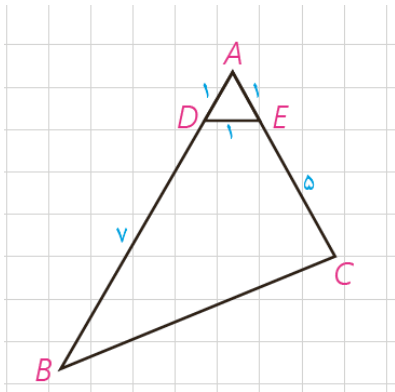
$$AB = AC = BC = a \Rightarrow P_{ABC} = \frac{3a}{2}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \left(\frac{3a}{2} - a\right)^2} = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

۴- در شکل مقابل، اولاً طول  $BC$  را به دست آورید. ثانياً مساحت چهارضلعی

$DECB$  را بیابید.

با توجه به این که مثلث  $ADE$  متساوی الساقین است پس  $\widehat{DAE} = 60^\circ$  در نتیجه :



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52 \Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47}{4}\sqrt{3}$$

۵- در شکل،  $AD$  نیمساز زاویه  $\hat{A}$  است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه  $A$  به دست آورید.

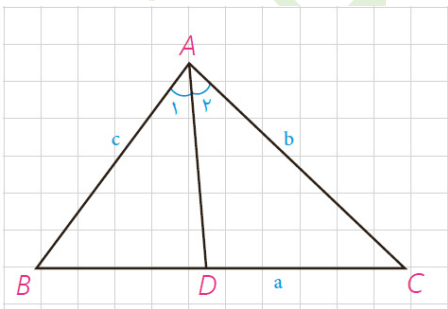
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AC \times AD \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (AB + AC)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow AD = \dots d_a \Rightarrow (d_a \text{ نیمساز رأس } A) = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$



۶- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۶ و ۵، به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر است از ضلع بزرگ تر چه فاصله‌ای دارد؟  
راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$P_{ABC} = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

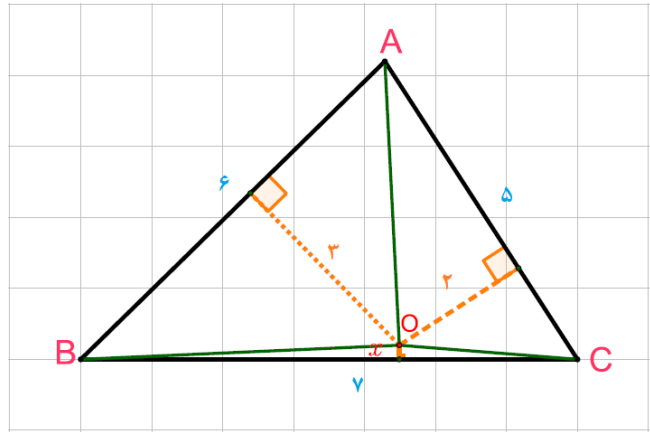
$$S_{ABC} = \sqrt{9 \times 2 \times 3 \times 4} = 6\sqrt{6}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \times 7 \times x = \frac{7}{2}x$$

$$6\sqrt{6} = 9 + 5 + \frac{7}{2}x \Rightarrow 6\sqrt{6} - 14 = \frac{7}{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14) \approx 0.2$$



۷- در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی

ABCD را بیابید. راهنمایی: B را به D وصل کنید.

مثلث BCD متساوی الساقین است و با توجه به اندازه زاویه C، اندازه دو زاویه دیگر هر کدام  $30^\circ$  خواهد بود. در این مثلث

ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم الزویه CHD،  $\widehat{CDH} = 30^\circ$  در نتیجه:  $CH = \frac{7}{4}$

$$\left. \begin{aligned} S_{BCD} &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} \times BD = \frac{7}{8}BD \\ S_{BCD} &= \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \sin 120^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{7}{8}BD = \frac{49\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BD = 7\sqrt{3}$$

$$P_{ABD} = \frac{11+13+7\sqrt{3}}{2} = 12 + \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3})(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 7\sqrt{3})(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 11)(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 13)}$$

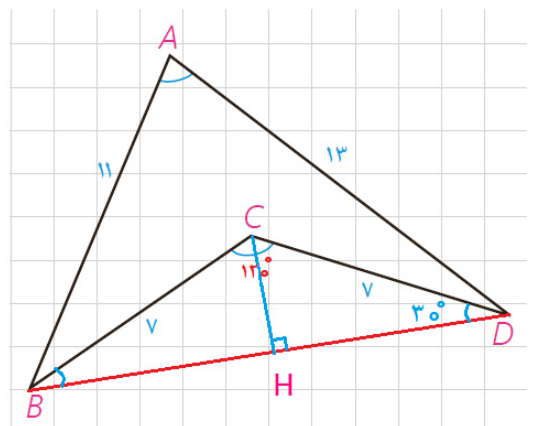
$$S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3})(12 - \frac{7}{2}\sqrt{3})(\frac{7}{2}\sqrt{3} + 1)(\frac{7}{2}\sqrt{3} - 1)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{(144 - \frac{174}{4})(\frac{147}{4} - 1)} = \frac{143}{4}\sqrt{3} \quad (1)$$

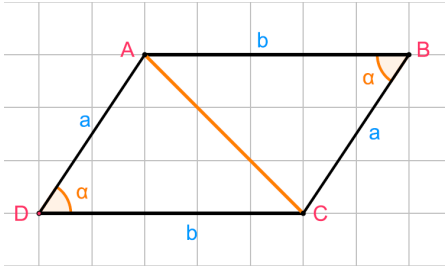
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \sin A = \frac{143}{2} \sin A \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{143}{2} \sin A = \frac{143}{4}\sqrt{3} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{143}{4}\sqrt{3} - \frac{49}{4}\sqrt{3} = \frac{94}{4}\sqrt{3}$$



۸- ثابت کنید مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع



مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

با توجه به خواص متوازی الاضلاع داریم:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \times \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \alpha \Rightarrow S_{ABCD} = a.b \sin \alpha$$

۹- به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید در مثلث ABC:

(الف)  $\hat{A} > 90^\circ$  اگر و تنها اگر  $a^2 > b^2 + c^2$

$$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \cos A < 0 \xrightarrow{\times bc} bc \cdot \cos A < 0 \xrightarrow{+bc} -bc \cdot \cos A > 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A > b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} a^2 > b^2 + c^2$$

(ب)  $\hat{A} < 90^\circ$  اگر و تنها اگر  $a^2 < b^2 + c^2$

$$\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \cos A > 0 \xrightarrow{\times bc} bc \cdot \cos A > 0 \xrightarrow{+bc} -bc \cdot \cos A < 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A < b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} a^2 < b^2 + c^2$$

(پ)  $\hat{A} = 90^\circ$  اگر و تنها اگر  $a^2 = b^2 + c^2$

$$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \cos A = 0 \xrightarrow{\times bc} bc \cdot \cos A = 0 \xrightarrow{+bc} -bc \cdot \cos A = 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} a^2 = b^2 + c^2$$

۱۰- به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه A را در هر

یک از مثلث های زیر تعیین کنید:

(الف)  $BC=9$  ,  $AC=6$  ,  $AB=10$

$$a=9, b=6, c=10$$

$$a^2=81, b^2+c^2=136 \Rightarrow a^2 < b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

(ب)  $BC=9$  ,  $AC=4$  ,  $AB=8$

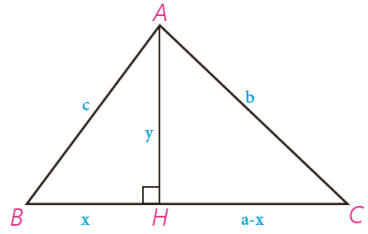
$$a=9, b=4, c=8$$

$$a^2=81, b^2+c^2=80 \Rightarrow a^2 > b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

(پ)  $BC=17$  ,  $AC=15$  ,  $AB=8$

$$a=17, b=15, c=8$$

$$a^2=289, b^2+c^2=289 \Rightarrow a^2 = b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$



اثبات دستور هرون (برای محاسبه مساحت مثلث)

در مثلث ABC،  $AB=c$  و  $AC=b$  و  $AH=y$  و  $BC=a$  و  $BH=x$  و  $CH=a-x$ . با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و ACH و تفاضل روابط به دست آمده خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ (a-x)^2 + y^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow b^2 - c^2 = (a-x)^2 - x^2 = a^2 + x^2 - 2ax - x^2 = a^2 - 2ax \Rightarrow x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2}$$

با ساده کردن این عبارت جبری و تجزیه آن به کمک اتحادهای جبری نتیجه می‌شود:

$$y = AH = \sqrt{\frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}} = \frac{1}{2a} \sqrt{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}$$

$$= \frac{1}{2a} \sqrt{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]} =$$

$$\frac{1}{2a} \sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}$$

حال با فرض  $a+b+c=2p$  خواهیم داشت:

$$a+c-b = a+c+b - 2b = 2p - 2b = 2(p-b)$$

و به همین صورت:

$$b+c-a = 2(p-a), \quad b+a-c = 2(p-c)$$

و بنابراین:

$$AH = \frac{1}{2a} \sqrt{2p \times 2(p-a) \times 2(p-b) \times 2(p-c)} =$$

$$\frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad S = \frac{1}{2} AH \cdot a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$