درس اوّل : مجموعه ها (یادآوری و تکمیل)

قسمت اوّل : یادآوری

در پایه های قبلی با مجموعه و مفهوم آن آشنا شده اید و می دانید که مجموعه ، دسته ای از اشـیای کـاملاً معین می باشد. همچنین می دانید یک مجموعه را با یک حرف بزرگ الفبای لاتین نامگذاری می کننـد. هـر یک از اشیاء تشکیل دهنده‌ی مجموعه را عضو آن مجموعه می نامند. اگر شیء a در مجموعه‌ی A باشـد، می گوییم a عضو مجموعه‌ی A است و می نویسیم $a \in A$ و اگر شیء a در مجموعه‌ی A نباشد، مـی گوییم a عضو مجموعه‌ی A نیست و می نویسیم $a \notin A$.

تمرین ۱ : اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۳ باشد.

الف : مجموعه‌ی A را با عضوهایش بنویسید.

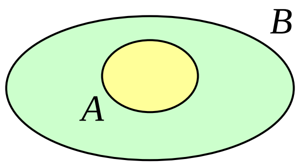
ب : در هر مورد جای خالی را با نماد عضویت یا عدم عضویت کامل کنید.

۵ $\square$ A ۹ $\square$ A

حل : الف: $A=\{۳,۶,۹\}$ ب : $۵ \notin A$ $۹ \in A$

اگر مجموعه ای دارای عضو نباشد، آنرا **تهی** می نامند. مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۱۱

مجموعه‌ی تهی را با نماد Φ یا $\{\}$ نمایش می دهند.



$A \subseteq B$

در سال قبل یادگرفتید که ، هرگاه تمام عضوهای مجموعه‌ی A متعلق بـه مجموعـه‌ی B باشـند، مـی گوینـد A زیـر مجموعـه‌ی B اسـت و مـی نویسند $A \subseteq B$ و اگر چنین نباشد می نویسند $A \not\subset B$

همچنین به یاد می آورید که هر مجموعه زیر مجموعه‌ی خودش است و مجموعـه‌ی تهـی زیـر مجموعـه‌ی تمام مجموعه ها است.

تمرین ۲ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی و فرد کمتر از ۱۰ را با عضو های آن نوشته، سپس زیر مجموعـه ای از آن بنویسید که عضوهای آن عدد اوّل باشند.

تمرین ۳ : تمام زیر مجموعه های مجموعه‌ی $A=\{۵,۸,۳\}$ را بنویسید[1].

---

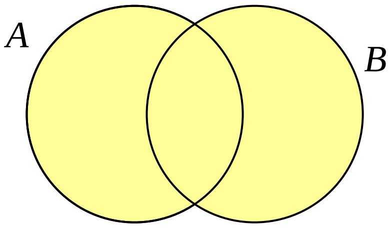
[1]. توجه داشته باشید که هر مجموعه‌ی n عضوی دارای ۲^n زیر مجموعه است.

اعمال روی مجموعه ها

اعمالی که برای دو مجموعه‌ی A و B ، در سال گذشته ، با آنها آشنا شده اید، عبارتند از:

الف : اجتماع دو مجموعه $(A\bigcup B)$

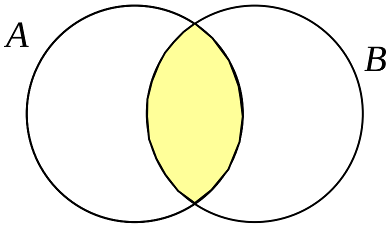
مجموعه ای است شامل عضو هایی که در A یا در B یا در هر دو می باشند.



$A\bigcup B$

ب : اشتراک دو مجموعه $(A\bigcap B)$

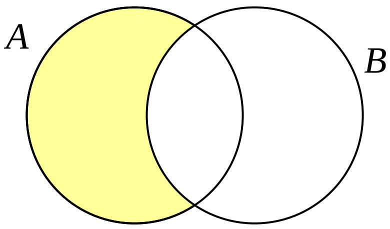
مجموعه ای است شامل عضو هایی که هم در A و هم در B (در هر دو) می باشند.



$A\bigcap B$

ج : تفاضل دو مجموعه $(A-B)$

مجموعه ای است شامل عضو هایی که در A باشند ولی در B در نباشند.



$A-B$

تمرین ۴ : اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ مجموعه های زیر را بنویسید.

الف) $A\bigcup B$ ب) $A\bigcap B$ ج) $A-B$ د) $B-A$

تمرین ۵ : اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{c,d,e,f,g\}$ مجموعه های زیر را بنویسید.

الف) $(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$ ب) $(A-B)\bigcup(B-A)$

نتیجه: برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B تساوی زیر برقرار می باشد.

$$(A\bigcup B)-(A\bigcap B)=(A-B)\bigcup(B-A)$$

تمرین۶ : برای دو مجموعه‌ی A و B، اگر $A\bigcup B=\{۱,۳,۵,۷,۸,۹\}$ و $A\bigcap B=\{۳,۷,۸\}$. در این صورت ابتدا مجموعه‌ی $(A-B)\bigcup(B-A)$ را با عضوهایش بنویسید و سپس تعداد زیر مجموعه های این مجموعه را محاسبه کنید.

قسمت دوّم : آشنایی با مجموعه های خاص

برخی از مجموعه های مهم که در سال های گذشته نیز با آنها آشنا شده اید به شرح زیر می باشند.

۱ : اعداد طبیعی

اعدادی که برای شمارش بکار می روند را اعداد طبیعی می نامند.مانند شمارش صندلی ها، تعداد دانش آموزان، افراد خانواده، تعداد دفعاتی که از تلفن استفاده شده است و ... . این اعداد عبارتند از :

۱ و ۲و ۳و ۴و ۵و ۶و ۷و ۸و ......

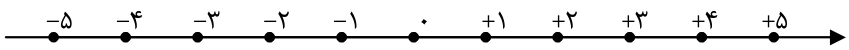
۲ : اعداد حسابی

اعداد طبیعی به همراه صفر اعداد حسابی گفته می شوند.

۰و ۱و ۲و ۳و ۴و ۵و ۶و ۷و ۸ و ....

۳ : اعداد صحیح

می توان اعداد طبیعی را به کمک نقاط روی یک محور[2] به شکل زیر نمایش داد. اعداد طبیعی را اعداد مثبت فرض می کنیم و در جهت مخالف محور نقاط متقارن آنها نسبت به مبدأ را معین می کنیم. در این صورت نقاط متناظر با اعداد منفی بدست می آیند. هر یک از این اعداد، قرینه‌ی یک عدد طبیعی می باشند. اعداد طبیعی و قرینه های آنها به همراه صفر را اعداد صحیح می نامند.



۴ : اعداد گویا (مُنطق)

واضح است که در بسیاری از اندازه گیری ها و محاسبات اعداد صحیح کافی نیستند. به عنوان مثال در اندازه گیری وزن، وزن بسیاری از اجسام را نمی توان با یک عدد صحیح نمایش داد. لذا برای رفع این مشکل می توان اعداد گویا را معرفی کرد.

[2]– خطی که روی آن یک مبدأ، یک جهت و یک پاره خط واحد انتخاب شده باشد را یک محور اعداد می نامند. در محور اعداد جهت سمت راست را به عنوان جهت مثبت انتخاب می کنند. بدیهی است جهت مخالف آن جهت منفی است.

هر عدد را که بتوان آن را به شکل یک کسر طوری نوشت که صورت و مخرج آن عدد صحیح و مخرج آن غیر صفر باشد، را عدد گویا می نامند. اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq ۰$ باشد، در این صورت عدد $\frac{a}{b}$ یک عدد گویا است. نمایش یک عدد گویا به شکل یک کسر را **نمایش متعارفی** می نامند.

مثال: هر یک از اعداد زیر گویا هستند.

$$\frac{۳}{۵}\ ,\ \frac{-۵}{۷}\ ,۲\frac{۳}{۵}\ ,\ -۳/۱۲\ ,۵/۷\ ,۱۵\ ,۱\ ,-۴,\ ۰\ ,-۱$$

نتیجه :

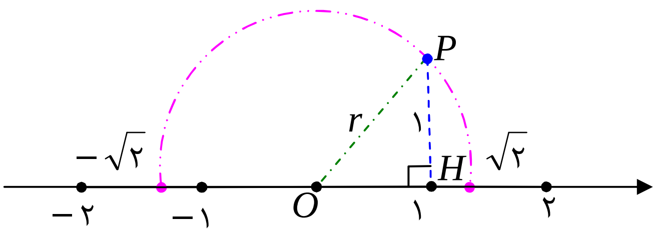
۱) تمام اعداد صحیح، گویا هستند.

۲) طبق تعریف مخرج هیچ کسری نمی تواند صفر باشد.

۵ : اعداد گنگ(اصم)

زمانی تصور می شد که طول هر پاره خط یک عدد گویا است. روزی دانشمندان متوجه شدند که اگر طول دو ضلع زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه برابر یک باشند، طبق قضیه‌ی فیثاغورس طول وتر برابر $\sqrt{۲}$ است. این عدد، گویا نیست ولی طول یک پاره خط است. آنها متوجه شدند که این تصور درست نیست و پاره خط هایی وجود دارند که طول آنها عدد گویا نمی باشد. بدین شکل آنها دسته‌ی دیگری از اعداد را کشف کردند. آنها این اعداد را اصم یا گنگ نامیدند.

مثال: نمایش عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر است.

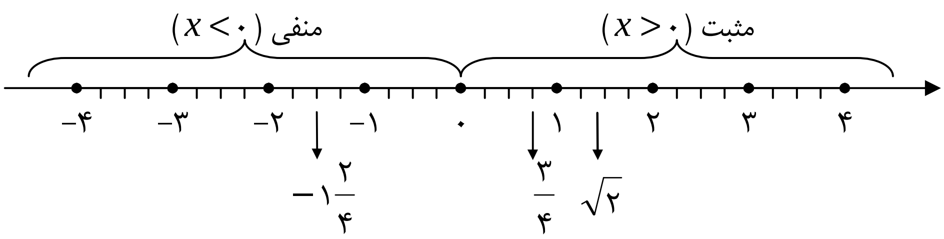


$$OP^{۲} = PH^{۲} + OH^{۲} \rightarrow r^{۲} = ۱+۱ \rightarrow r = \sqrt{۲}$$

۶ : اعداد حقیقی

واضح است که نظیر هر عدد گویا نقطه ای روی محور اعداد می توان یافت ولی نقاطی روی محور وجود دارد که نظیر اعداد گویا نیستند. این اعداد را **اعداد گنگ** نامیدیم. اعداد گویا و اعداد گنگ با هم را اعداد حقیقی می نامند.

لذا می توان گفت که هر نقطه روی محور نظیر یک عدد حقیقی است و هر عدد حقیقی نظیر یک نقطه روی محور است. به همین دلیل چنین محوری را محور اعداد حقیقی می نامند.



مجموعه هایی که معرفی شدند به طور اجمالی می توان به صورت زیر نیز بررسی کرد.

۱ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی[۳] $N=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,....\}$

۲ : مجموعه‌ی اعداد حسابی $W=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,....\}$

۳ : مجموعه‌ی اعداد صحیح $Z=\{....,-۶,-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,....\}$

۴ : مجموعه‌ی اعداد گویا $Q=\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in Z, b\neq ۰\}$

۵ : مجموعه‌ی اعداد گنگ $Q'=$ اعدادی که نمی توان آنها را به صورت کسر متعارفی نوشت.

۶ : مجموعه‌ی اعداد حقیقی $R=Q\cup Q'$

[3]. توجه داشته باشید که مجموعه‌ی اعداد طبیعی دارای چند زیر مجموعه‌ی خاص نیز می باشد. از جمله :

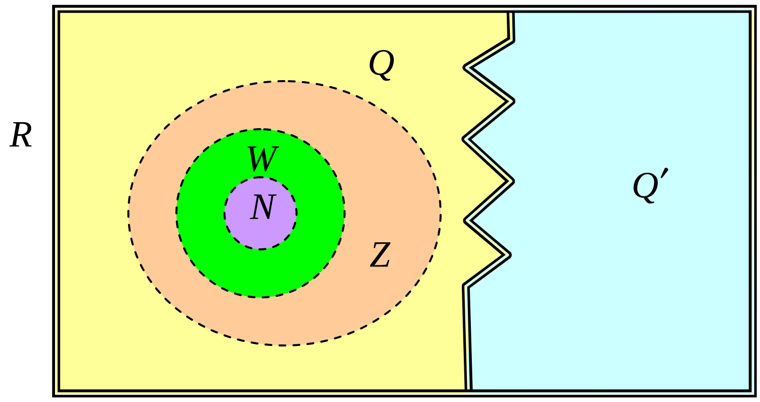
مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج $E=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,....\}=\{x\,|\,x=۲k, k\in N\}$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد $O=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,....\}=\{x\,|\,x=۲k-۱, k\in N\}$

مجموعه‌ی اعداد اوّل $P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,....\}$

تذکر: با توجه به مجموعه های فوق همواره داریم:

۱) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ ۲) $Q' \subseteq R$ ۳) $Q \cap Q' = \Phi$



تمرین ۷ : اعداد $۱\frac{۲}{۳}$ و $-۰/۳$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

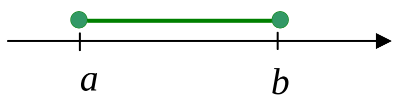
تمرین ۸ : اعداد $-\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۳}$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

***

قسمت سوّم : مفهوم بازه ها

در بسیاری از مفاهیم ریاضی نیاز به زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی داریـم. در ایـن صـورت مـی تـوان از مفهوم بازه ها استفاده کرد. هر قطعه از محور اعداد حقیقی را یک **بازه (فاصله)** می نامنـد. اگـر b و a دو عدد حقیقی و $a < b$ بازه های زیر را می توان معرفی کرد.

الف : بازه هایی که از دو طرف محدود می باشند.

۱) بازه‌ی بسته  $[a,b] = \{x \mid x \in R, a \le x \le b\}$	۲) بازه‌ی باز  $(a,b) = \{x \mid x \in R, a < x < b\}$

ب : بازه هایی که از یک طرف بسته و از طرف دیگر باز می باشند. (بازه های نیم باز)

۳)

$$[a,b)=\{x \mid x\in R, a\le x<b\}$$

۴)

$$(a,b]=\{x \mid x\in R, a<x\le b\}$$

ج : بازه هایی که از یک طرف محدود و از طرف دیگر نامحدود می باشند.[۴]

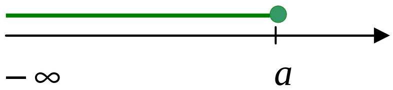
۵)

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\in R, x\ge a\}$$

۶)

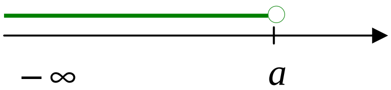
$$(a,+\infty)=\{x \mid x\in R, x>a\}$$

۷)



$$(-\infty,a]=\{x \mid x\in R, x\le a\}$$

۸)



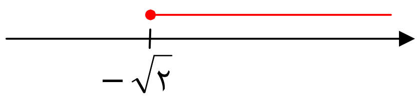
$$(-\infty,a)=\{x \mid x\in R, x<a\}$$

د : بازه هایی که از دو طرف نامحدود می باشند.

۹)

$$(-\infty,+\infty)=R$$

تمرین ۹ : در جدول زیر، خانه های خالی را با نماد خواسته شده، پرکنید.

نمایش هندسی	نماد مجموعه	نماد فاصله
		$[-۱,۳)$
	$\{x \mid x\in R, ۲<x<۳\}$	
		

۴. بینهایت مفهومی است که در رشته‌های مختلف ریاضیات (با تعبیرات مختلف) به‌کار می‌رود و معمولاً به معنای« فراتر از هر مقدار» است. نشانه‌ی بینهایت در ریاضیات ∞ است. مفهوم بی نهایت زمانی بکار می رود که می خواهند بیان کنند چیزی پایان ندارد. لذا بی نهایت یک عدد واقعی نیست و نمی توان اعمال ریاضی را روی آن انجام داد.

تمرین ۱۰ : هر یک از مجموعه های زیر را به صورت بازه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

۱) $A=\{x\in R \mid ۰<x<۱\}$

۲) $B=\{x\in R \mid x\geq \sqrt{۲}\}$

۳) $C=\{x\in R \mid -۲x+۶>۰\}$

۴) $D=\{x\in R \mid x\neq ۵\}$

تمرین ۱۱ : هر یک از بازه های زیر را به صورت مجموعه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

الف) $A=[-۲,۵]$ ب) $B=(۳,۷]$ ج) $C=(-\infty,\sqrt{۲})$

تمرین ۱۲ : به کمک نمایش هندسی دو بازه‌ی $A=(-۱,۴]$ و $B=(۲,+\infty)$ مجموعه های زیر را به صورت بازه بنویسید.

الف) $A\bigcup B$ ب) $A\bigcap B$ ج) $A-B$ د) $B-A$

تمرین ۱۳ : نمایش هندسی دو مجموعه‌ی زیر را نوشته و سپس تعیین کنید که کدام یک بازه است؟

الف) $A=\{x\in N \mid ۳<x\leq ۶\}$ ب) $B=\{x\in R \mid ۳<x\leq ۶\}$

توجه : در بازه‌ی (a,b) حاصل $b-a$ را **طول بازه** و حاصل $\frac{a+b}{۲}$ را **مرکز بازه** می نامند.

***

تمرین برای حل :

۱۴ : نامعادله های زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب آنها را به صورت فاصله بنویسید.

الف) $۳x-۵\geq ۲x+۲$ ب) $۵<-۳x-۱\leq ۸$

۱۵ : به کمک نمایش هندسی دو بازه‌ی $A=(-۴,۲]$ و $B=[-۱,۳)$ تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $A\bigcup B$ ب) $A\bigcap B$ ج) $A-B$ د) $B-A$

۱۶ : طرف دوّم تساوی های زیر را به صورت بازه بنویسید.

۱) $A=(-۵,۲]\bigcup[۱,۷]=$

۲) $B=(-۳,۱)\bigcap(۰,۳)=$

۳) $C=[-۲,۵)\bigcap[۰,+\infty)=$

۴) $D=(۰,۱)\bigcap[۳,۴)=$

۵) $E=[۰,+\infty)-(۴,+\infty)=$

۶) $F=[۲,۷)-[۳,۷)=$

۱۷ : مجموعه‌ی $R-\{۳\}$ را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماعی از دو بازه بنویسید.

۱۸ : طول و مرکز بازه‌ی $(-۱,۷)$ را تعیین کنید.

قسمت چهارم : مجموعه های متناهی و نامتناهی

هر مجموعه که تعداد عضوهای آن یک عدد حسابی است را مجموعه‌ی **متناهی** مـی نامنـد و در غیـر ایـن صورت **نامتناهی** نامیده می شود.

مثال : مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۸ یک مجموعه‌ی متناهی است و مجموعه‌ی اعداد صحیح کمتر از ۵ یک مجموعه‌ی نامتناهی است. (چرا؟)

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ و $B=\{۴,۳,۲,۱,۰,-۱,-۲,-۳,...\}$

توجه : طبق تعریف مجموعه‌ی تهی یک مجموعه‌ی متناهی محسوب می شود.

تمرین ۱۹ : یک مجموعه‌ی متناهی و یک مجموعه‌ی نامتناهی مثال بزنید.

تمرین ۲۰ : مجموعه‌ی مضرب ها و مجموعه‌ی مقسوم علیه های(شـمارنده هـای) عـدد ۱۲ را نوشـته و سپس تعیین کنید که کدام یک متناهی و کدام یک نامتناهی است.[5]

توجه : اگر مجموعه ای دارای یک زیر مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آن مجموعه نامتناهی است.

مثال : بازه‌ی $A=(۰,۱)$ یک مجموعه‌ی نامتناهی است. زیرا مجموعه‌ی $B=\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},...\}$ نامتناهی است و زیر مجموعه‌ی بازه‌ی $A=(۰,۱)$ می باشد.

تمرین ۲۱ : متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه های زیر را مشخص کنید.

۱ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی

۲ : مجموعه‌ی شمارنده های طبیعی عدد ۳۶

۳ : بازه‌ی $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$

۴ : $\{x\in N \mid ۱<x<۲\}$

۵ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی ده رقمی

۶ : مجموعه‌ی مضرب های طبیعی عدد ۵

۷ : مجموعه‌ی تمام دایره هایی که به مرکز مبدأ مختصات رسم می شوند.

۸ : مجموعه‌ی اعداد اوّل

***

[5] . اگر عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b بخش پذیر باشد ، در این صورت b را مقسوم علیه (شمارنده) عدد a و همچنـین a را مضرب b می نامند. برای مثال چون۱۲ بر۴ بخش پذیر است، پس۱۲ مضرب عدد ۴ و عدد ۴ مقسوم علیه ۱۲ است.

تمرین برای حل :

۲۲ : دو مجموعه‌ی نامتناهی نام ببرید.

۲۳ : دو مجموعه‌ی نامتناهی بنویسید که یکی از آنها زیر مجموعه‌ی دیگری باشد.

۲۴ : دو مجموعه‌ی نامتناهی مانند A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

۲۵ : دو مجموعه‌ی نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

۲۶ : اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه در مورد متناهی بودن یا نبودن A بحث کنید.

۲۷ : درستی یا نادرستی هر یک از عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف : زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ی متناهی، متناهی است.

ب : زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

پ : اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی، متناهی است.

ت : اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

۲۸ : دو زیر مجموعه‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی را نام ببرید که مجزا[۶] باشند.

***

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath

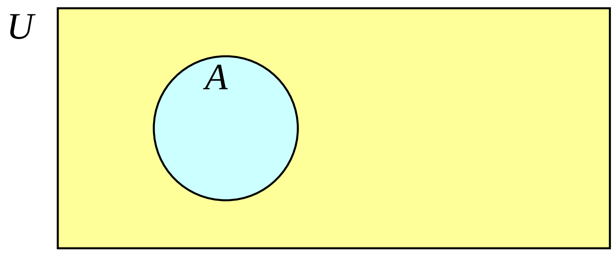
[6] . دو مجموعه ناتهی که اشتراک آنها ، تهی باشد، را **جدا از هم** (مجزا) می نامند. برای مثال دو مجموعه‌ی زیر جدا از هم هستند.

$A = \{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $B = \{۲,۴,۶,۸\}$

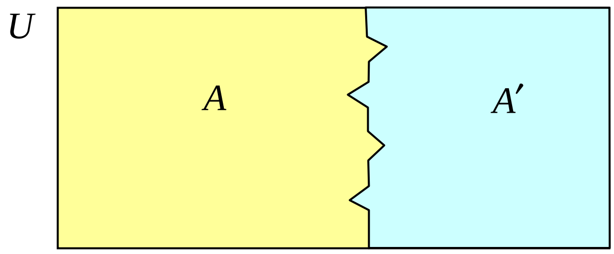
درس دوّم : مجموعه‌ی مرجع و متمم یک مجموعه

قسمت اوّل : مجموعه‌ی مرجع و متمم یک مجموعه

در ریاضیات وقتی پیرامون موضوعی صحبت می شود، می توان با توجه به موضوع مورد بحث، مجموعه ای در نظر گرفت که مجموعه های دیگر زیر مجموعه‌ی آن باشند. چنین مجموعه ای را مجموعه‌ی مرجع می نامند[۱] و آن را با U یا M نمایش می دهند. معمولاً در نمایش مجموعه‌ی مرجع با استفاده از نمودار وِن آن را با مستطیل نمایش می دهند.



هرگاه U مجموعه‌ی مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه‌ی $U-A$ را متمم A می نامیم و آن را با نماد A' یا A^C نمایش می دهیم. به عبارتی دیگر A' شامل تمام عضوهایی از U است که در A نباشند.



$A'=U-A$

مثال : اگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر گرفته شود. در این صورت متمم مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد، مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج است.

تمرین ۱: اگر $U=\{x\in Z \mid -۳<x\le ۳\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم مجموعه‌ی $A=\{-۱,۰,۱\}$ را بنویسید.

تمرین ۲ : اگر $U=[۱,۵]$ مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم مجموعه‌ی $A=(۲,۳]$ را بنویسید.

---

[1] . مجموعه‌ی مرجع به تناسب موضوع و عالم سخن تغییر می کند و بزرگترین مجموعه‌ی ممکن پیرامون موضوع مورد بحث است ، گرچه اکثراً جهت سادگی آن را محدود می کنیم. گاهی ممکن از در مورد خاصیتی از اعداد طبیعی بحث می کنیم، در این صورت مجموعه‌ی مرجع مجموعه‌ی تمام اعداد طبیعی است. همچنین ممکن است فقط در مورد اعداد حقیقی بحث کنیم که در اینصورت مجموعه‌ی مرجع را اعداد حقیقی در نظر می گیریم. ممکن است دانش آموزان یک مدرسه را مورد مطالعه قرار دهیم، در اینصورت مجموعه‌ی مرجع ، مجموعه‌ی شامل تمام دانش آموزان آن مدرسه است.

نتیجه :

۱ : متمم مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی تهی است. ($U'=\Phi$)

۲ : متمم مجموعه‌ی تهی ،مجموعه‌ی مرجع است. ($\Phi'=U$)

۳ : متمم متمم هر مجموعه برابر همان مجموعه است. ($(A')'=A$)

۴ : اجتماع هر مجموعه و متمم آن برابر مجموعه‌ی مرجع است. ($A\bigcup A'=U$)

۵ : اشتراک هر مجموعه و متمم آن برابر مجموعه‌ی تهی است. ($A\bigcap A'=\Phi$)

تمرین۳ : زیر مجموعه‌ای از اعداد حسابی بنویسید که متمم آن متناهی باشد.

تمرین ۴ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی بخش پذیر بر ۵ چند عضو دارد؟ آیا این مجموعه متناهی است؟ چرا؟

توجه : برای تعیین تعداد اعداد طبیعی بخش پذیر بر عدد طبیعی k ابتدا اوّلین و آخرین عدد بخش پذیر بر k را تعیین نموده و آنها را به ترتیب a و b می نامیم ، سپس فرمول زیر را به کار می گیریم.

$$n=\frac{b-a}{k}+۱$$

تمرین۵ : اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۴\}$ آنها مجموعه های زیر را با عضوها بنویسید.

۱) A'	۴) $A\bigcap B'$	۷) $(A\bigcap B)'$
۲) B'	۵) $(A\bigcup B)'$	۸) $A'\bigcup B'$
۳) $A-B$	۶) $A'\bigcap B'$	۹) $(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$

نتیجه: تساوی های زیر برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B برقرار می باشند[2].

۱) $A-B=A\bigcap B'$

۲) $(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'$

۳) $(A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$

[2]. نتیجه‌ی اوّل را قانون تبدیل و نتایج دوّم و سوّم را قوانین دمورگان می نامند.

توجه : اگر A یک زیر مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشد. در این صورت :

۱) $A \bigcup A' = U$ ۳) $U \bigcup A = U$ ۵) $U - A = A'$

۲) $A \bigcap A' = \Phi$ ۴) $U \bigcap A = A$

***

قسمت دوّم : تعداد عضو های اجتماع و تفاضل دو مجموعه‌ی متناهی

در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد، تعداد عضوهای آن را به صورت $n(A)$ نمایش می دهند.

برای مثال اگر $A = \{x, y, z, t, u\}$ در این صورت $n(A) = ۵$ می باشد.

اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، در این صورت دو رابطه‌ی زیر همواره برقرار هستند.

الف) $n(A \bigcup B) = n(A) + n(B) - n(A \bigcap B)$

ب) $n(A - B) = n(A) - n(A \bigcap B)$

تمرین۶ : اگر مجموعه‌ی شمارنده های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B تساوی های فـوق را برای این دو مجموعه بررسی کنید.

تمرین۷ : برای دو مجموعه‌ی A و B اگر $n(A) = ۱۵$ و $n(A \bigcup B) = ۳۰$ و $n(A \bigcap B) = ۵$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

توجه : اگر دو مجموعه A و B جدا از هم هستند، در این صورت $A \bigcap B = \Phi$ و لذا $n(A \bigcap B) = n(\Phi) = ۰$ پس می توان نتیجه گرفت که :

الف) $n(A \bigcup B) = n(A) + n(B)$

ب) $n(A - B) = n(A)$

تمرین۸ : اگر U مجموعه‌ی مرجع و متناهی و A زیر مجموعه ای از آن باشد. در این صورت ثابت کنید.

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

حل :

$$n(A') = n(U - A) = n(U) - n(U \bigcap A) = n(U) - n(A)$$

تمرین۹ : با توجه به روابط فوق ، روابطی مشابه، برای هر یک از موارد زیر بنویسید.

الف) $n(A\bigcap B')$ ب) $n(A'\bigcup B')$ ج) $n(A'\bigcap B')$

***

توجه : با استفاده از نمودار ون می توان مسائل مربوط به تعداد عضو های اجتماع و تفاضل دو مجموعه‌ی متناهی را به راحتی حل نمود.

تمرین۱۰ : در یک کلاس ۲۵ نفری ، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، تعیین کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

تمرین۱۱ : در یک هتل، ۴۲ نفر وجود دارد. ۲۰ نفر آنان تاجر و ۱۷ نفر جهانگرد هستند. اگر ۷ نفر نه تاجر و نه جهانگرد باشند. تعیین کنید که

الف: در این هتل چند نفر هم تاجر و هم جهانگرد هستند.

ب : چند نفر فقط تاجر هستند.

ج : چند نفر فقط جهانگرد هستند.

***

تمرین برای حل :

۱۲ : فرض کنیم برای دو مجموعه‌ی A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه ی مرجع U باشند. بطوری که $n(U)=۱۰۰$ و $n(A)=۶۰$ و $n(B)=۵۰$ و $n(A\bigcap B)=۱۵$. مطلوب است محاسبه :

الف) $n(A\bigcup B)$

ب) $n(A\bigcap B')$

ج) $n(A'\bigcap B)$

د) $n(A'\bigcap B')$

هـ) $n(A'\bigcup B')$

۱۳ : اگر A یک زیر مجموعه از مجموعه‌ی مرجع و متناهی U باشد و $n(A)=۱۲$ و $n(A')=۸$ باشد. $n(U)$ را تعیین کنید.

۱۴ : در یک کلاس ۳۱ نفره ، ۲۰ نفر در درس ریاضی و ۱۳ نفر در درس فیزیک قبول شده اند. اگر ۷ نفر در هر دو درس مردود شده باشند، تعیین کنید که چند نفر در هر دو درس قبول شده اند.

۱۵ : در یک کلاس ۳۷ نفری ۱۷ نفر عضو کتابخانه و ۲۵ نفر عضو بسیج دانش آموزی هستند. اگر ۳ نفر عضو هیچ یک از این گروه ها نباشند، تعیین کنید چند نفر هم عضو کتابخانه و هم عضو بسیج هستند.

۱۶ : در یک کلاس ۳۱ نفری ، تعداد ۱۴ نفر از دانش آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاتر هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان عضو این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است؟

الف: تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

ب : تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرود باشند.

ج : تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه تئاتر باشند.

۱۷ : دانش آموزان رشته‌ی ریاضی یک دبیرستان که ۳۲ نفر هستند، برای المپیادهای کامپیوتر و ریاضی ثبت نام کرده اند. اگر ۱۲ نفر برای المپیاد ریاضی و ۴ نفر برای هر دو المپیاد ثبت نام کرده اند و ۹ نفر داوطلب ثبت نام در هیچ المپیادی نشده باشند، حساب کنید که چند نفر فقط برای المپیاد کامپیوتر ثبت نام شده اند؟

۱۸ : تعداد اعداد طبیعی سه رقمی بخش پذیر بر ۷ را تعیین کنید.

۱۹ : مجموعه‌ی $S=\{۱۱,۱۲,۱۳,\ ...\ ,۹۹\}$ را در نظر بگیرید.

الف : تعداد اعضای مجموعه‌ی S که بر۴ یا ۶ بخش پذیر باشند را بیابید.

ب : تعداد اعضای مجموعه‌ی S که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر۶ نباشند را تعیین کنید.

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath

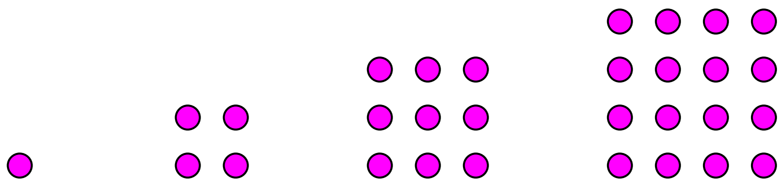
درس سوّم : الگو و دنباله

قسمت اوّل : الگو و دنباله

هر ساختار منظم از اعداد ، اشکال یا تصاویر و .... را الگو می نامند. اگر تعدادی عدد بر اساس نظم خاصی پشت سرهم قرار گیرند، الگوی بدست آمده را الگوی عددی می نامند. هر یک از اعداد موجود در الگو را جمله می نامیم. جمله ها را با توجه به شماره‌ی آنها با استفاده از یک حرف اندیس دار نمایش می دهند. برای مثال جمله‌ی سوّم را به صورت $a_{۳}$ نمایش می دهند.

برای الگوهای عددی می توان یک رابطه‌ی ریاضی (که نشان دهنده‌ی ارتباط هر جمله با شماره‌ی آن، یا ارتباط هرجمله با جمله یا جمله های دیگر می باشد.[1]) بیان نمود. هر رابطه‌ی ریاضی دنباله که نشان دهنده ی ارتباط هر جمله با شماره‌ی آن باشد را **جمله‌ی عمومی** الگو می نامند.

مثال : با توجه به شکل های زیر الگویی برای تعداد دایره های بکار رفته در هر شکل بنویسید.



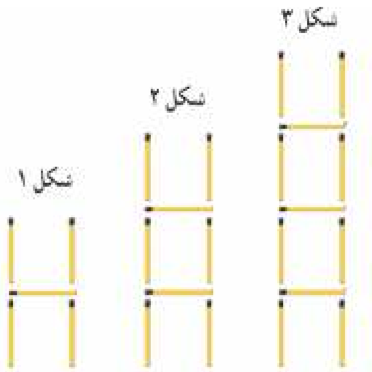
شکل ۱   شکل ۲   شکل ۳   شکل ۴

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	....	n
تعداد دایره ها						

تمرین ۱ : با توجه به پاسخ شما برای مثال فوق، اگر شکل ها را ادامه دهیم، تعداد دایره ها را در شکل دهم را تعیین کنید.

تمرین ۲ : با توجه به شکل های زیر الگویی برای تعداد چوب کبریت های بکار رفته در هر شکل بنویسید.

[1] . هر رابطه‌ی ریاضی که نشان دهنده‌ی ارتباط هر جمله‌ی الگو با شماره‌ی آن جمله باشد را جمله‌ی عمومی و هر رابطه‌ی ریاضی که نشان دهنده‌ی ارتباط هر جمله‌ی الگو با جمله یا جملات دیگر آن الگو باشد را رابطه‌ی بازگشتی می نامند.



شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	....	n
تعداد چوب کبریت ها						

در دو تمرین قبل برای هر یک از موارد یک الگوی عددی به دست آوردیم. اگر جملات این الگوهای عددی را به ترتیب شماره، پشت سر هم بنویسیم گویند یک **دنباله** تشکیل شده است. مثلاً دنباله‌ی زیر

۶ و ۹ و ۱۲ و ....

اگر جمله‌ی عمومی یک الگو معلوم باشد، با جایگزین کردن یک عدد طبیعی به جای n در آن ، می توان یک جمله از آن را بدست آورد.

مثال : جمله‌ی عمومی یک الگو به صورت $a_n = ۲^n - ۳n$ می باشد. جمله‌ی پنجم این الگو را به دست آورید.

حل :

$$a_۵ = ۲^۵ - ۳(۵) = ۳۲ - ۱۵ = ۱۷$$

تمرین۳ : جمله‌ی عمومی یک الگو به صورت $t_n = ۳n + ۲$ می باشد. جملات این الگو را بنویسید.

تمرین۴ : جمله‌ی عمومی یک الگو به صورت $t_n = \frac{n(n-۱)}{۲}$ می باشد. جملات این الگو را بنویسید.

***

قسمت دوّم : الگو های خطی

هر الگو که در آن ، اختلاف بین هر دو جمله‌ی متوالی عدد ثابتی باشد را الگوی خطی می نامند.

مانند الگوی زیرکه اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن عدد ۳ می باشد.

... و ۱۳ و ۱۰ و ۷ و ۴

تمرین۵ : آیا الگوی زیر، خطی است؟ چرا؟

... و ۱۶ و ۱۱ و ۷ و ۴

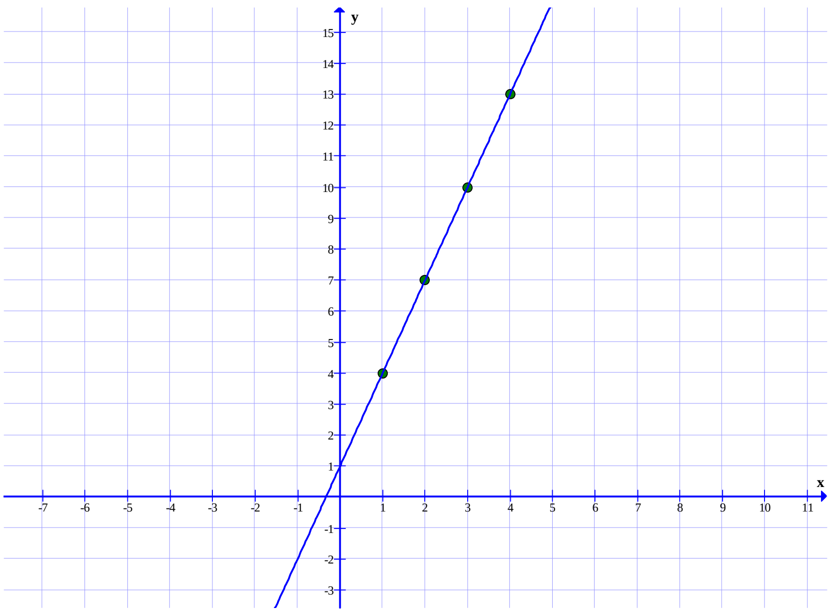
دلیل نامگذاری الگوهایی که اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آنها عدد ثابت باشد، این است که اگر متناظر با هر جمله‌ی دنباله‌ی مربوط به الگوی خطی، یک نقطه در نظر بگیریم. نقاط به دست آمده در دستگاه مختصات در یک راستا قرار می گیرند. توجه کنید که در این حالت مختصات هر نقطه را به صورت (n,t_n) در نظر بگیرید.

برای مثال در الگوی خطی فوق مختصات نقاط به صورت زیر می باشند.

.... و (۴,۱۳) و (۳,۱۰) و (۲,۷) و (۱,۴)

تمرین۶ : نقاط متناظر با جملات دنباله‌ی مربوط به الگوی فوق را در دستگاه مختـصات مـشخص کـرده و راستای آنها را معلوم کنید.

حل : به راحتی می توان نقاط متناظر را منطبق بر یک خط راست[2] مشاهده کرد.



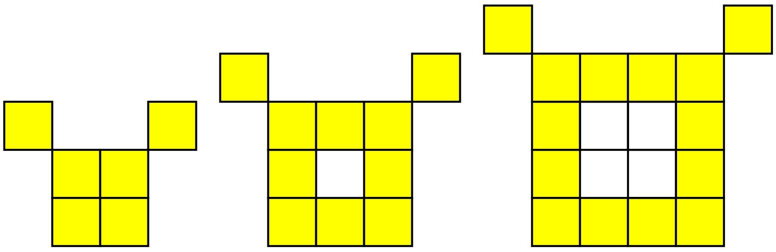
[2] . معادله‌ی این خط $y = ۳x + ۱$ است.

نتیجه : جمله‌ی عمومی هر الگوی خطی به صورت زیر می باشد که در آن a و b اعـداد حقیقـی دلخـواه و ثابت هستند.

$$t_n = an + b$$

توجه : مقدار a همان اختلاف مشترک جملات متوالی الگوی خطی می باشد.

تمرین۷ : الگوی مربوط به شکل زیر را با توجه به تعداد مربع های رنگی در هر شکل بنویسید.



شکل (۱)   شکل (۲)   شکل (۳)

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	....	n
تعداد مربع های رنگی						

تمرین۸ : توضیح دهید که چرا الگوی مربوط به تمرین قبل، خطی است؟

تمرین۹ : جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n = -۳n + ۵$ جمله‌ی دهم این الگو را تعیین کنید.

تمرین۱۰ : جمله‌ی عمومی الگوی خطی زیر را بنویسید.

۵ و ۸ و ۱۱و ....

حل : اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی این الگو برابر ۳ است. پس جمله‌ی عمومی به صورت:

$t_n = ۳n + b$

می باشد. چون جمله‌ی اوّل الگو برابر ۵ است. پس می توان نوشت: $۵ = ۳(۱) + b$ یعنی $b = ۲$ در نهایت داریم.

$t_n = ۳n + ۲$

تمرین۱۱: در یک الگوی خطی ، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می باشند.

الف : جمله‌ی عمومی این الگو را بنویسید.

ب : پنج جمله‌ی اوّل این الگو را به دست آورید.

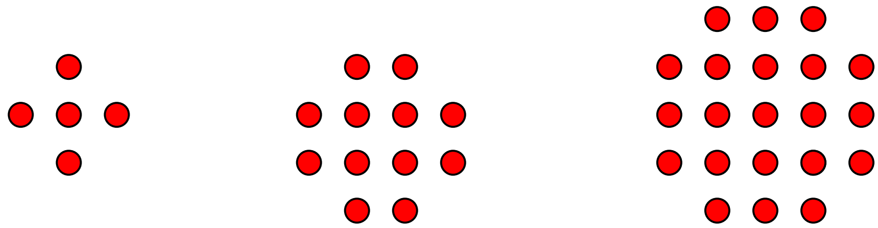
***

قسمت سوّم : الگو های غیرخطی

برخی از الگوهای عددی خطی نمی باشند، چنین الگوهایی را الگوهای غیرخطی می نامند. برای مثال الگوی مربوط به دنباله‌ی زیر غیر خطی است.(چرا؟)

۵ و ۱۲ و ۲۱ و ۳۲ و ...

با رسم نمودار تصویری، به راحتی الگوی مربوط به چنین الگوهایی را می توان به دست آورد. برای مثال تعداد دایره های شکل زیر در هر مورد ، نشان دهنده‌ی الگوی فوق است.



شکل (۱)   شکل (۲)   شکل (۳)

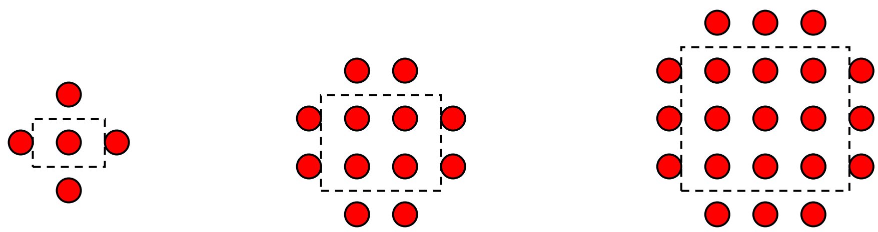
که جمله‌ی عمومی ، دنباله‌ی این الگو به صورت زیر است.

$$t_n = n^2 + 4n$$

تمرین ۱۲ : با نگاه مربعی به هر شکل ، الگوی فوق را به دست آورید.

حل :

روش اوّل : هر شکل از یک دایره‌ی درونی و چند دایره‌ی کناری تشکیل شده است.



شکل (۱)   شکل (۲)   شکل (۳)

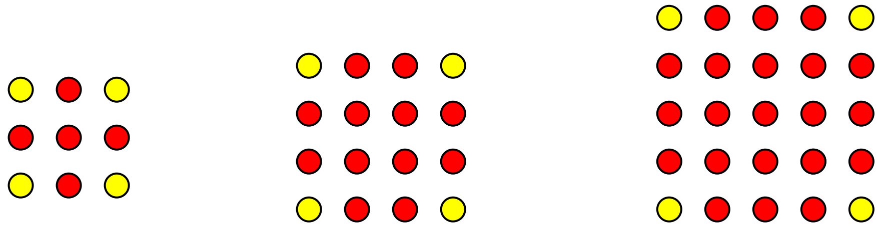
حال جدول زیر را تشکیل می دهیم.

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد کل دایره ها	$(1)^2 + 4(1) = 5$	$(2)^2 + 4(2) = 12$	$(3)^2 + 4(3) = 21$

لذا تعداد دایره ها را در برای شکل nام می توان به صورت زیر بدست آورد.

$$t_n = (n)^2 + 4n$$

روش دوّم : هر شکل را با اضافه کردن چهار دایره به یک مربع تبدیل می کنیم.



شکل (۳) شکل (۲) شکل (۱)

حال جدول زیر را تشکیل می دهیم.

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد کل دایره ها	$(۱+۲)^۲=۳^۲=۹$	$(۲+۲)^۲=۴^۲=۱۶$	$(۳+۲)^۲=۵^۲=۲۵$
تعداد دایره های اصلی	$۹-۴=۵$	$۱۶-۴=۱۲$	$۲۵-۴=۲۱$

لذا تعداد دایره ها را در برای شکل nام می توان به صورت زیر بدست آورد.

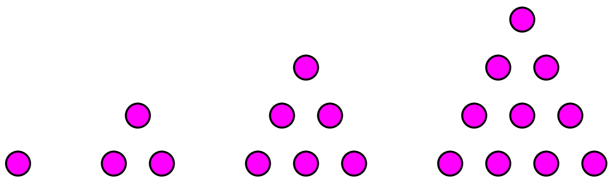
$$t_n=(n+۲)^۲-۴ \to t_n=n^۲+۴n+۴-۴ \to \boxed{t_n=n^۲+۴n}$$

تمرین۱۳ : الگوی هندسی زیر را در نظر بگیرید.

الف : شکل بعدی الگو را رسم کنید.

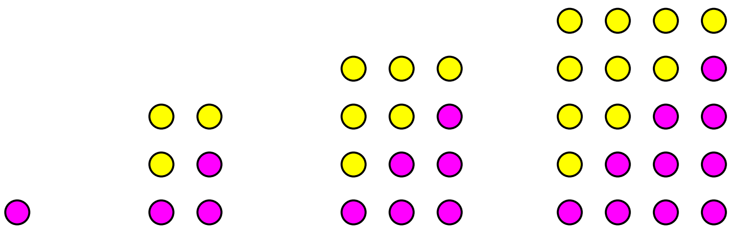
ب : تعداد دایره های هر شکل را بنویسید.

ج : جملهی عمومی این الگو را بنویسید.



شکل (۴) شکل (۳) شکل (۲) شکل (۱)

حل : می توانیم از شکل های دوّم به بعد با دو برابر کردن نقاط متناظر با هر شکل یک مستطیل ساخت.



شکل (۴) شکل (۳) شکل (۲) شکل (۱)

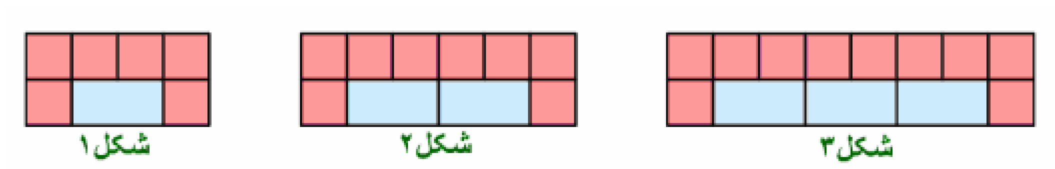
لذا تعداد واقعی دایره های هر الگو به صورت $t_n=\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ است.[۳]

---

۳. هر دنباله به صورت .... و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۳ و ۱ را یک دنبالهی مثلثی می نامند. جملهی عمومی این دنباله به صورت $t_n=\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ است.

تمرین برای حل :

۱۴ : به الگوی هندسی زیر دقت کنید.



الف : شکل بعدی الگو را رسم کنید.

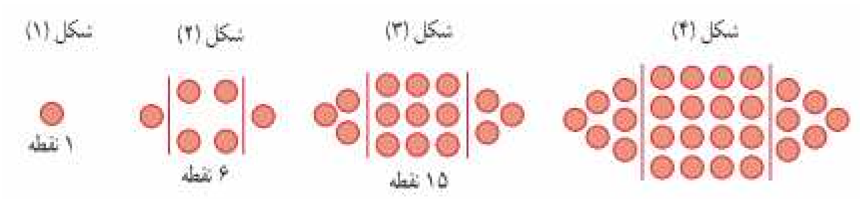
ب : تعداد کاشی های سفید و تیره را برای هر شکل بنویسید.

ج : جمله‌ی عمومی مربوط به هر یک از الگوهای کاشی های سفید و تیره را بنویسید.

د : حساب کنید که برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است.

هـ : آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ در صورت وجود تعداد کاشی های سفید آن تعیین کنید.

۱۵ : الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف : شکل بعدی الگو را رسم کنید.

ب : تعداد نقاط هر شکل را بنویسید.

ج : جمله‌ی عمومی این الگو را بنویسید.

د : حساب کنید که شکل دهم این الگو چند نقطه دارد؟

۱۶ : بیست و یکمین جمله‌ی دنباله‌ی مثلثی را تعیین کنید.

***

قسمت چهارم : دنباله

اگر یک سری عدد به ترتیب پشت سر هم نوشته شوند، دنباله تشکیل می شود. هر دنباله هم می تواند دارای الگوی خاصی باشد و هم می تواند بدون الگو باشد. هر یک از اعداد موجود در دنباله را جمله می نامیم. اگر دنباله ای دارای الگوی خاصی باشد ، آنگاه رابطه‌ی موجود در آن را جمله‌ی عمومی دنباله می نامند.

مثال ۱ : اعداد زیر به همین ترتیب ، یک دنباله محسوب می شوند.

۵ و ۸ و ۱۱ و ۱۴ و ...

که جمله‌ی عمومی آن می شود. $t_n = ۳n + ۲$

مثال۲ : جمله‌ی اوّل یک دنباله برابر ۵ است و برای جملات دوّم به بعد رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$a_n = ۲a_{n-۱} + ۱$$

پنج جمله‌ی اوّل این دنباله را بنویسید.

حل : با توجه به رابطه‌ی فوق می توان نوشت :

$a_۱ = ۵$

$a_۲ = ۲a_۱ + ۱ = ۱۱$

$a_۳ = ۲a_۲ + ۱ = ۲۳$

$a_۴ = ۲a_۳ + ۱ = ۴۷$

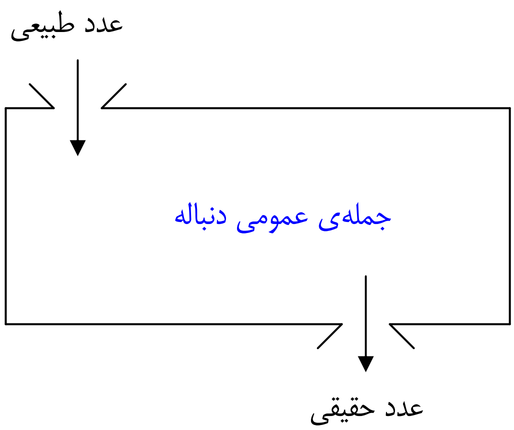
$a_۵ = ۲a_۴ + ۱ = ۹۵$

لذا این دنباله به صورت زیر است.

۵ و ۱۱ و ۲۳ و ۴۷ و ۹۵ و ....

توجه : برای درک بهتر مفهوم دنباله‌ی عددی دارای الگو به تعریف زیر دقت کنید.

هر عبارت جبری بر حسب یک حرف (مانند n) را یک **دنباله** می نامند. هرگاه عدد طبیعی می گیرد و عدد حقیقی می دهد.



برای مثال عبارت $t_n = \frac{n}{۲n + ۱}$ یک دنباله است. زیرا با جایگزین کردن یک عدد طبیعی به جای n می توان یک عدد حقیقی به دست آورد. هر کدام از اعداد حاصل را یک **جمله** می نامند و این عبارت جبری را **جمله‌ی عمومی دنباله** می گویند.

مثال : عبارت $t_n = \frac{۳n + ۱}{n^۲}$ یک دنباله است.

$n=۱ \rightarrow t_۱ = \frac{۳(۱)+۱}{(۱)^۲} = \frac{۴}{۱} = ۴$ جمله‌ی اوّل

$n=۲ \rightarrow t_۲ = \frac{۳(۲)+۱}{(۲)^۲} = \frac{۷}{۴}$ جمله‌ی دوّم

$n=۳ \rightarrow t_۳ = \frac{۳(۳)+۱}{(۳)^۲} = \frac{۱۰}{۹}$ جمله‌ی سوّم

$n=۴ \rightarrow t_۴ = \frac{۳(۴)+۱}{(۴)^۲} = \frac{۱۳}{۱۶}$ جمله‌ی چهارم

....

$t_n = \frac{۳n+۱}{n^۲}$ جمله‌ی عمومی (جمله‌ی nام)

جملات این دنباله را می توان به شکل زیر نیز نوشت :

$$۴ \text{ و } \frac{۷}{۴} \text{ و } \frac{۱۰}{۹} \text{ و } \frac{۱۳}{۱۶} \text{ و } .....$$

توجه : جمله‌ی عمومی یک دنباله می تواند یک عدد ثابت نیز باشد. مثلاً $t_n = ۵$

در این صورت این دنباله را **دنباله‌ی ثابت** می نامند و می نویسند.

۵ و ۵ و ۵ و ....

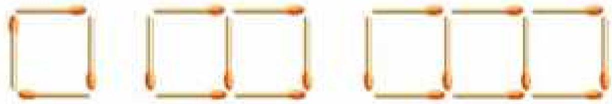
تمرین۱۷ : پنج جمله‌ی اوّل دنباله‌ی $t_n = \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲n+۳}$ را تعیین کنید.

تمرین۱۸ : جمله‌ی عمومی دنباله ای به صورت $t_n = \frac{n+۳}{۲n+۱}$ می باشد. جمله‌ی چهارم این دنباله را به دست آورید.

تمرین ۱۹ : جمله‌ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = (-۱)^{n+۱} n^۲$ می باشد. جمله‌ی ششم این دنباله را به دست آورید.

تمرین ۲۰ : جمله‌ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = -۳n + ۵$ می باشد. تعیین کنید که جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۱۶- است؟

تمرین ۲۱ : با استفاده از چوب کبریت شکل های زیر ساخته شده است.



الف : تعیین کنید که برای ساختن هر شکل چند چوب کبریت استفاده شده است؟

ب : برای ساختن شکل چهارم چند چوب کبریت نیاز است؟

ج : جملهی nام (جملهی عمومی) دنبالهی مربوط به چوب کبریت ها را بنویسید.

تمرین ۲۲ : جملهی عمومی دنبالهی زیر را بنویسید.

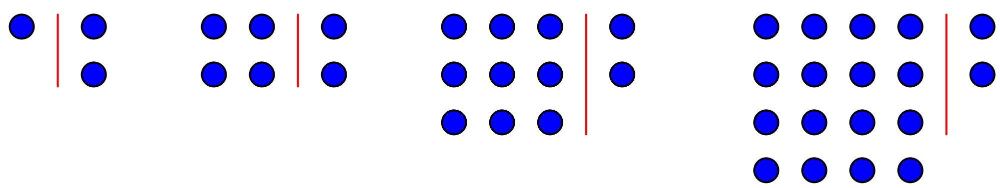
.... و ۱۷ و ۱۲ و ۷ و ۲

تمرین ۲۳ : جملهی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = n^{۲} + ۲$ می باشد. چهار جملهی اوّل دنباله را نوشته سپس برای آن الگوی هندسی رسم کنید.

حل:

$$n = ۱ \rightarrow a_۱ = (۱)^۲ + ۲ = ۳$$
$$n = ۲ \rightarrow a_۲ = (۲)^۲ + ۲ = ۶$$
$$n = ۳ \rightarrow a_۳ = (۳)^۲ + ۲ = ۱۱$$
$$n = ۴ \rightarrow a_۴ = (۴)^۲ + ۲ = ۱۸$$

الگوی هندسی این دنباله به صورت زیر است.



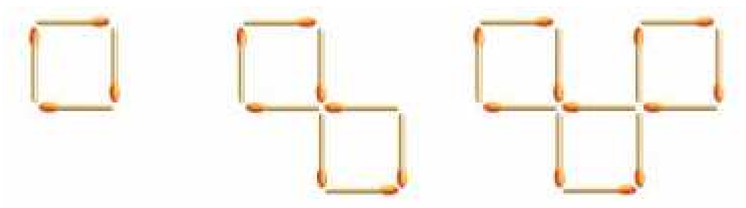
شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳) شکل(۴)

تمرین ۲۴ : برای دنبالهی زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جملهی عمومی دنباله را بنویسید.

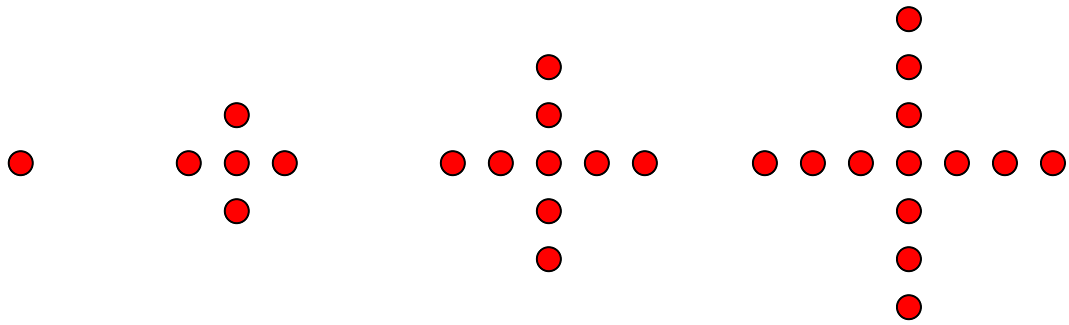
.... و ۲۹ و ۲۰ و ۱۳ و ۸ و ۵

تمرین برای حل :

۲۵ : جمله‌ی عمومی دنباله‌ی مربوط به شکل های زیر که با چوب کبریت ساخته شده است، را بنویسید.



۲۶ : جملات دنباله ای دارای الگوی زیر می باشند. جمله‌ی بیستم این دنباله را به دست آورید.



۲۷ : جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله‌ی اوّل را بنویسید و سپس برای هر یک الگوی هندسی رسم کنید.

الف) $a_n = ۳n$ ب) $b_n = ۴n - ۱$ ج) $c_n = n^{۲} + n$

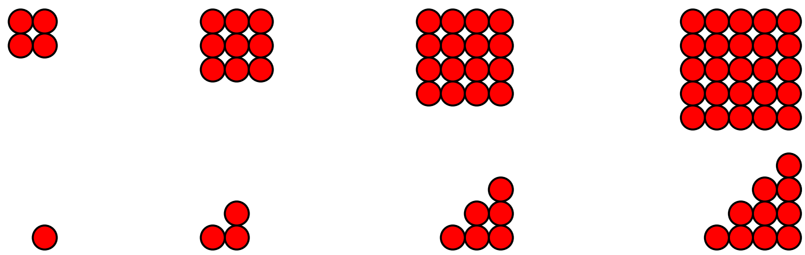
۲۸ : برای دنباله‌ی زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.

۵ و ۱۲ و ۲۲ و ۳۵ و ۵۱ و ....

حل : با قدری دقت می توان نوشت.

۴ + ۱ و ۹ + ۳ و ۱۶ + ۶ و ۲۵ + ۱۰ و ۳۶ + ۱۵ و ....

یعنی جملات یک دنباله‌ی مربعی و یک دنباله‌ی مثلثی جمع شده اند.



شکل(۱)   شکل(۲)   شکل(۳)   شکل(۴)

لذا جمله‌ی عمومی این دنباله می شود.

$$\boxed{t_n = (n+1)^2 + \frac{1}{2}n(n+1)}$$

۲۹ : جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = n^2 + 2n - 3$ می باشد.کدام جمله‌ی این دنباله ۳۲ است؟

۳۰ : جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = 3^n - 1$ می باشد. حساب کنید که جمله‌ی چندم این دنباله ۸۰ است؟

۳۱ : در یک دنباله، جمله های اوّل و دوّم برابر ۱ و برای تعیین هر جمله‌ی دیگر دنباله ، دو جمله‌ی قبل از آن را جمع می کنند. (یعنی $a_1 = a_2 = 1\ ,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} : n \geq 3$) این دنباله را دنباله فیبوناتچی می نامند. هفت جمله‌ی اوّل این دنباله را بنویسید.

***

تهیه کننده: جابرعامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir کانال تلگرام : @mathameri

روشی برای تعیین جمله‌ی عمومی الگو های خطی

برای مطالعه

فرض کنیم که دنباله‌ی زیر دارای الگوی خطی باشد.

$t_۱$ و $t_۲$ و $t_۳$ و $t_۴$ و $t_۵$ و ....

در این صورت جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر است.

$$t_n = an + b$$

با الگو گیری از معادله‌ی خط می توان این معادله را به صورت زیر نوشت:

$$t_n = (t_۲ - t_۱)n - (t_۲ - ۲t_۱)$$

اثبات : واضح است که جملات این دنباله روی یک خط راست قرار دارند. دو نقطه از این خط عبارتند از

$$(۱, t_۱) \quad \text{و} \quad (۲, t_۲)$$

لذا شیب و عرض از مبدأ این خط را می توان به زیر به دست آورد.

$$m = \frac{t_۲ - t_۱}{۲ - ۱} = t_۲ - t_۱$$

پس :

$$t_n = (t_۲ - t_۱)n + b$$

اکنون برای تعیین مقدار b نقطه‌ی $(۱, t_۱)$ را جایگزین می کنیم.

$$t_n = (t_۲ - t_۱)n + b \xrightarrow{(۱,t_۱)} t_۱ = (t_۲ - t_۱)(۱) + b$$

$$\to t_۱ = t_۲ - t_۱ + b \to b = -t_۲ + ۲t_۱ = -(t_۲ - ۲t_۱)$$

لذا

$$t_n = (t_۲ - t_۱)n - (t_۲ - ۲t_۱)$$

تمرین : الگوی زیر را در نظر بگیرید.

الف : نشان دهید که این الگو، یک الگوی خطی است.

ب : جمله‌ی عمومی این الگو را بنویسید.

۳ و ۷ و ۱۱ و ۱۴ و ....

حل : چون تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی این الگو مقداری ثابت است. لذا این الگو، یک الگوی خطی است.

$$t_۱ = ۳ \quad \text{و} \quad t_۲ = ۷$$

$$t_n = (t_۲ - t_۱)n - (t_۲ - ۲t_۱)$$

$$\to t_n = (۷ - ۳)n - (۷ - ۶)$$

$$\to t_n = ۴n - ۱$$

***

روش هایی برای تعیین جمله‌ی عمومی الگو های غیر خطی درجه‌ی دوّم **برای مطالعه**

برای دنباله‌ی زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.

۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۱ و .....

آیا این دنباله خطی است؟ با توجه به اختلاف جملات متوالی، معلوم است که این دنباله خطی نیست. یک روش برای تعیین جمله‌ی عمومی این دنباله به شکل زیر است.

۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۱ و	دنباله‌ی اصلی
۳ و ۴ و ۵ و۶	دنباله‌ی اختلافات جملات متوالی (مرحله۱)
۱ و ۱ و ۱ و	دنباله‌ی اختلافات جملات متوالی (مرحله۲)

چون بعد از دو مرحله، دنباله‌ی اختلافات به یک دنباله‌ی ثابت تبدیل شد. پس جمله‌ی عمومی دنباله‌ی اصلی یک دنباله‌ی چند جمله ای درجه‌ی دوّم است.[۴] پس :

$$t_n = an^{۲} + bn + c$$

$$(۱,۳) \to a + b + c = ۳ \qquad (۱)$$

$$(۲,۶) \to ۴a + ۲b + c = ۶ \qquad (۲)$$

$$(۳,۱۰) \to ۹a + ۳b + c = ۱۰ \qquad (۳)$$

با تعیین تفاضل معادله های (۲) و (۱) داریم:

$$(۴a - a) + (۲b - b) + (c - c) = ۶ - ۳ \to ۳a + b = ۳ \qquad (۴)$$

با تعیین تفاضل معادله های (۲) و (۳) داریم:

$$(۹a - ۴a) + (۳b - ۲b) + (c - c) = ۱۰ - ۶ \to ۵a + b = ۴ \qquad (۵)$$

و در انتها با تعیین تفاضل معادله های (۵) و (۴) داریم:

$$(۵a - ۳a) + (b - b) = ۴ - ۳ \to ۲a = ۱ \to a = \frac{۱}{۲}$$

در نهایت می توان نوشت:

[4]. به طور مشابه اگر بعد از سه مرحله، دنباله‌ی اختلافات به یک دنباله‌ی ثابت تبدیل شود، جمله‌ی عمومی دنباله‌ی اصلی چندجمله ای درجه‌ی سوّم است.

$$(۴)\qquad ۳a+b=۳\xrightarrow{a=\frac{۱}{۲}}b=\frac{۳}{۲}$$

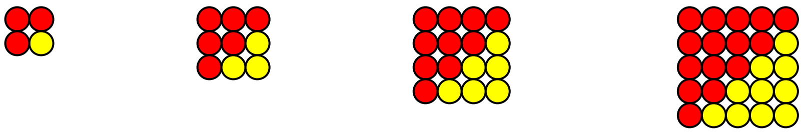
$$(۱)\qquad a+b+c=۳\xrightarrow{a=\frac{۱}{۲}\,,\,b=\frac{۳}{۲}}c=۱$$

$$\rightarrow t_n=an^{۲}+bn+c\rightarrow t_n=\frac{۱}{۲}n^{۲}+\frac{۳}{۲}n+۱$$

روش دیگر : با قدری دقت می توان نوشت.

۴ − ۱ و ۹ − ۳ و ۱۶ − ۶ و ۲۵ − ۱۰ و ۳۶ − ۱۵ و ....

یعنی جملات یک دنباله‌ی مربعی و یک دنباله‌ی مثلثی از هم کم شده اند.



شکل(۱) شکل(۲) شکل(۳) شکل(۴)

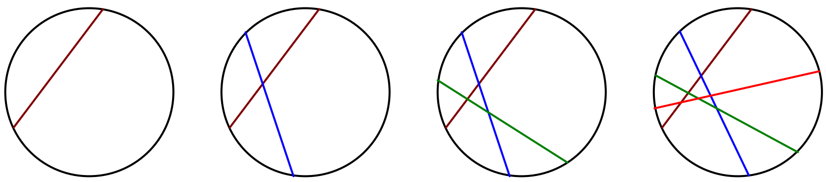
لذا جمله‌ی عمومی این دنباله می شود.

$$t_n=(n+۱)^{۲}-\frac{۱}{۲}n(n+۱)$$

تمرین : بیشترین تعداد قطعات پیتزا وقتی با n خط راست بریده می شود، چند است؟

توجه : فرض کنید پیتزا به شکل دایره و برش ها به شکل وتر دایره باشند.

حل : ابتدا تعداد قطعات را برای یک برش، دو برش، سه برش و ... را تعیین می کنیم.



اکنون جدول زیر را تعیین می کنیم.

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	۵	....	n
تعداد قطعات	۲	۴	۷	۱۱		....	

با توجه به صورت مسأله معلوم است که هدف تعیین جمله‌ی عمومی دنباله است.

آیا این دنباله خطی است؟ با توجه به اختلاف جملات متوالی، معلوم است که این دنباله خطی نیست. یک روش برای تعیین جمله‌ی عمومی این دنباله به شکل زیر است.

دنباله‌ی اصلی	.... و ۱۱ و ۷ و ۴ و ۲
دنباله‌ی اختلافات جملات متوالی (مرحله ۱)	.... و ۴ و ۳ و ۲
دنباله‌ی اختلافات جملات متوالی (مرحله ۲)	.... و ۱ و ۱

چون بعد از دو مرحله، دنباله‌ی اختلافات به یک دنباله‌ی ثابت تبدیل شد. پس جمله‌ی عمومی دنباله‌ی اصلی یک دنباله‌ی چند جمله ای درجه‌ی دوّم است. پس :

$$t_n = an^۲ + bn + c$$

$$(۱,۲) \to a + b + c = ۲ \qquad (۱)$$

$$(۲,۴) \to ۴a + ۲b + c = ۴ \qquad (۲)$$

$$(۳,۷) \to ۹a + ۳b + c = ۷ \qquad (۳)$$

با تعیین تفاضل معادله های (۲) و (۱) داریم:

$$(۴a - a) + (۲b - b) + (c - c) = ۴ - ۲ \to ۳a + b = ۲ \qquad (۴)$$

با تعیین تفاضل معادله های (۲) و (۳) داریم:

$$(۹a - ۴a) + (۳b - ۲b) + (c - c) = ۷ - ۴ \to ۵a + b = ۳ \qquad (۵)$$

و در انتها با تعیین تفاضل معادله های (۵) و (۴) داریم:

$$(۵a - ۳a) + (b - b) = ۳ - ۲ \to ۲a = ۱ \to a = \frac{۱}{۲}$$

در نهایت می توان نوشت:

$$(۴) \qquad ۳a + b = ۲ \xrightarrow{a=\frac{۱}{۲}} b = \frac{۱}{۲}$$

$$(۱) \qquad a + b + c = ۲ \xrightarrow{a=b=\frac{۱}{۲}} c = ۱$$

$$\to t_n = an^۲ + bn + c \to t_n = \frac{۱}{۲}n^۲ + \frac{۱}{۲}n + ۱$$

روش دوّم : تعیین جمله‌ی عمومی

.... و ۱۱ و ۷ و ۴ و ۲

$1+1$ و $1+3$ و $1+6$ و $1+10$ و .....

یعنی هر یک از جملات این دنباله، یک واحد بیشتر از جملات دنبالهی مثلثی است. لذا

$$t_n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$$

البته به این شکل هم می توان نوشت:

جملهی اوّل $2 = 1 + 1$

جملهی دوّم $4 = 1 + (1+2)$

جملهی سوّم $7 = 1 + (1+2+3)$

جملهی چهارم $11 = 1 + (1+2+3+4)$

....

جملهی nام $t_n = 1 + (1+2+3+4+\ldots+n) = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$

***

تهیه کننده: جابرعامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir   کانال تلگرام : @amerimath

درس چهارم : دنباله های حسابی و هندسی

قسمت اوّل : دنباله‌ی حسابی (عددی)

هر دنباله که در آن با اضافه شدن مقداری ثابت به هر جمله، جمله‌ی بعدی به دست آید را **دنباله‌ی حسابی** می نامند. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می نامند و آن را با d نمایش می دهند.

مثال : دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی حسابی است، زیرا با اضافه کردن عدد ۴ به هر جمله ، جمله‌ی بعدی به دست می آید.

۵ و ۹ و ۱۳ و ۱۷ و ....

جمله‌ی اوّل $a = t_1 = 5$ قدر نسبت $d = 4$

نتیجه : در هر دنباله‌ی حسابی، تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی، عدد ثابتی است. این عدد ثابت را اختلاف مشترک یا قدرنسبت می گویند و آن را با d نمایش می دهند[1].

تمرین ۱ : کدام یک از دنباله های زیر ، یک دنباله‌ی حسابی است؟ چرا ؟

الف) ۵ و ۷ و ۱۰و۱۴و ....

ب) ۵ و ۳ و ۱ و ۱- و ....

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

اگر a جمله‌ی اوّل و d قدرنسبت و n شماره‌ی جمله در دنباله‌ی حسابی باشند، در این صورت می توان نوشت :

جمله‌ی اول $t_1 = a$

جمله‌ی دوم $t_2 = t_1 + d = a + d$

جمله‌ی سوم $t_3 = t_2 + d = (a + d) + d = a + 2d$

جمله‌ی چهارم $t_4 = t_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d$

جمله‌ی پنجم $t_5 = t_4 + d = (a + 3d) + d = a + 4d$

....

جمله‌ی عمومی (nام) $t_n = a + (n-1)d$

[1] . برای تعیین قدر نسبت در یک دنباله‌ی حسابی کافی است، از یک جمله ، جمله‌ی قبل آن را کم کنیم.

تمرین۲ : دنباله‌ی حسابی زیر را در نظر بگیرید.

۳ و ۷ و ۱۱ و .....

الف : قدر نسبت این دنباله را به دست آورید.

ب : جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.

ج : جمله‌ی بیست و یکم این دنباله را بدست آورید.

تمرین۳ : جمله‌ی پانزده ام دنباله‌ی حسابی زیر را تعیین کنید.

۸ و ۵ و ۲ و ....

تمرین۴ : در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی هفتم ۲۷ و جمله‌ی سوّم ۱۱ می باشد.

الف : قدر نسبت این دنباله را محاسبه کنید.

ب : جمله‌ی اوّل این دنباله را تعیین کنید.

ج : جمله‌ی عمومی این دنباله را بدست آورید.

تمرین۵ : اگر دو جمله‌ی غیر متوالی t_i و t_j از یک دنباله‌ی حسابی معلوم باشند. ثابت کنید که

$$d=\frac{t_i-t_j}{i-j}$$

تفاضل جملات

تفاضل شماره ها

اثبات : کافی است از جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی استفاده کنیم.

$$t_n=a+(n-۱)d$$

$$t_i=a+(i-۱)d\rightarrow t_i=a+id-d$$
$$t_j=a+(j-۱)d\rightarrow t_j=a+jd-d$$

$$\rightarrow t_i-t_j=(a+id-d)-(a+jd-d)$$
$$\rightarrow t_i-t_j=a+id-d-a-jd+d\rightarrow a_i-a_j=id-jd$$
$$\rightarrow t_i-t_j=(i-j)d$$
$$\rightarrow d=\frac{t_i-t_j}{i-j}$$

تمرین۶ : در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی پنجم ۱۷ و جمله‌ی دوازدهم ۵۲ می باشد. قدرنسبت این دنباله را تعیین کنید.

تمرین۷ : ثابت کنید که هر دنباله‌ی حسابی ، دارای الگوی خطی است.

حل : کافی است که نشان دهیم اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن عدد ثابتی است.

$$t_i - t_{i-۱} = (a + (i-۱)d) - (a + (i-۱-۱)d) = a + id - d - a - id + ۲d = d$$

یعنی اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی در هر دنباله‌ی حسابی برابر d می باشد و لذا دارای الگوی خطی است.

***

واسطه‌ی حسابی

یک یا چند عدد را واسطه‌ی حسابی می نامند، هرگاه بین دو جمله از یک دنباله قرار گیرند، تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند.

برای مثال، اعداد ۲۶ و۲۰ و ۱۴ و ۸ چهار واسطه‌ی حسابی بین۲ و ۳۲ می باشند، زیرا دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی حسابی است.

$$\underline{۲}, \underline{۸, ۱۴, ۲۰, ۲۶}, \underline{\underline{۳۲}}, \ldots$$

با معلوم بودن دو جمله از یک دنباله‌ی حسابی و تعداد واسطه ها می توان این واسطه ها را با محاسبه‌ی قدر نسبت، تعیین نمود.اگر a جمله‌ی اوّل و b جمله‌ی آخر و m تعداد واسطه ها باشد. در این صورت داریم:

$$\boxed{d = \frac{b-a}{m+۱}}$$

تمرین۸ : بین دو عدد ۲ و ۳۴ سه واسطه‌ی حسابی درج کنید.

حل: ابتدا قدر نسبت را تعیین کرده و سپس جملات دنباله را محاسبه می نماییم.

$$d = \frac{b-a}{m+۱} = \frac{۳۴-۲}{۳+۱} = \frac{۳۲}{۴} = ۸$$

$$۲, ۱۰, ۱۸, ۲۶, ۳۴, \ldots$$

***

تمرین ۹ : اگر z و y و x سه جمله ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، ثابت کنید که: $۲y = x + z$

اثبات : می دانیم که در هر دنباله‌ی حسابی تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی عدد ثابتی است. این عـدد ثابـت را قدرنسبت می نامند و آن را با d نمایش می دهند.

$$\begin{array}{l} d = y - x \\ d = z - y \end{array} \rightarrow y - x = z - y \rightarrow ۲y = x + z$$

تمرین ۱۰ : در دنباله‌ی حسابی زیر مقدار t را به دست آورید.

۷ و t و ۲۳ و ....

تمرین ۱۱ : در دنباله‌ی حسابی زیر مقدار x را تعیین کنید.

$۱ - x$ و $۲ + x$ و$۱ + ۲x$ و ......

تمرین ۱۲: بین ۴ و ۱۰ یک واسطه‌ی حسابی درج کنید.

حل:

$$۲x = a + b \rightarrow ۲x = (۴) + (۱۰) \rightarrow ۲x = ۱۴ \rightarrow x = ۷$$

$$\Rightarrow ۴, ۷, ۱۰, ...$$

تمرین ۱۳: اگر زاویه های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و یک دنبالـه‌ی حـسابی تـشکیل شـود. نشان دهید که یکی از زاویه های این مثلث ۶۰ درجه است.

***

روش تعیین تعداد جملات دنباله‌ی حسابی

اگر در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی اوّل(a)، جمله‌ی آخر(b) و قدر نسبت (d) معلوم باشند، می توان تعداد جملات را از رابطه‌ی زیر محاسبه نمود.

$$\boxed{n = \frac{b - a}{d} + ۱}$$

تمرین ۱۴ : با توجه به دنباله‌ی حسابی زیر، تعداد جملات را تعیین کنید.

$$۳, ۷, ۱۱, ..., ۵۱$$

حل: واضح است که $a = ۳$ و$b = ۵۱$ و $d = ۴$ در این صورت داریم:

$$n=\frac{b-a}{d}+1=\frac{51-3}{4}+1=\frac{48}{4}+1=12+1=13$$

تمرین ۱۵: تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۷ را به دست آورید.

حل: به سادگی می توان اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۷ را به صورت زیر نوشت :

$$14, 21, \dots, 98$$

این اعداد تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت ۷ می دهند. همچنین جمله‌ی اوّل این دنباله ۱۴ و جمله‌ی آخر آن ۹۸ است. لذا تعداد جملات دنباله برابر است با:

$$n=\frac{b-a}{d}+1=\frac{98-14}{7}+1=\frac{84}{7}+1=12+1=13$$

تمرین۱۶: تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۳ را تعیین کنید.

حل:

$$12, 15, \dots, 99$$

تعداد جملات $\quad n=\frac{b-a}{d}+1=\frac{99-12}{3}+1=\frac{87}{3}+1=29+1=30$

***

قسمت دوّم : دنباله‌ی هندسی

هر دنباله که در آن با ضرب هر جمله‌ی آن در مقداری ثابت و غیر صفر ، جمله‌ی بعدی به دست آید را دنباله‌ی هندسی می نامند. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می نامند و آن را با r یا q نمایش می دهند.

مثال : دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی هندسی است، زیرا از ضرب هر جمله در عدد ۲- جمله‌ی بعدی به دست می آید.

۳ و ۶- و ۱۲ و ۲۴- و ....

جمله‌ی اوّل $a=t_1=3$ قدر نسبت $r=-2$

نتیجه : در هر دنباله‌ی هندسی، خارج قسمت هر دو جمله‌ی متوالی آن عدد ثابتی است. این عدد ثابت را نسبت مشترک یا قدرنسبت می گویند و آن را با r یا q نمایش می دهند[۲].

تمرین۱۷ : کدام یک از دنباله های زیر ، یک دنباله‌ی حسابی و کدام یک هندسی است؟ چرا ؟

الف) ۳ و ۵- و ۱۳- و۲۱- ....

هـ) ۲ و $۲\sqrt{۳}$ و ۶ و $۶\sqrt{۳}$ و ۱۸ و ....

ب) ۵ و ۱۵ و ۴۵ و ۱۳۵ و ....

و) ۲و ۱و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ و ....

ج) ۵ و ۷ و ۱۴ و ۱۶و ۳۲ و ....

ز) ۳ و ۳ و ۳ و ۳و .....

د) $\sqrt{۵}$ و $۲\sqrt{۵}$ و $۳\sqrt{۵}$ و $۴\sqrt{۵}$ و ....

تمرین۱۸ : دو دنباله‌ی هندسی بنویسید که قدر نسبت آنها $\frac{۴}{۵}$ باشد. به نظر شما چند دنباله‌ی هندسی با این ویژگی می توان نوشت؟چرا؟

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی

اگر a جمله‌ی اوّل و r قدرنسبت و n شماره‌ی جمله در دنباله‌ی هندسی باشند، در این صورت می توان نوشت :

جمله‌ی اول $t_۱ = a$

جمله‌ی دوم $t_۲ = t_۱ r = ar$

جمله‌ی سوم $t_۳ = t_۲ r = (ar)r = ar^۲$

جمله‌ی چهارم $t_۴ = t_۳ r = (ar^۲)r = ar^۳$

جمله‌ی پنجم $t_۵ = t_۴ r = (ar^۳)r = ar^۴$

....

جمله‌ی عمومی (nام) $t_n = ar^{n-۱}$

[۲]. در هر دنباله‌ی هندسی جمله‌ی اوّل و قدر نسبت ، نباید صفر باشند. همچنین برای تعیین قدر نسبت در یک دنباله‌ی هندسی کافی است، یک جمله را بر جمله‌ی قبل از آن تقسیم کنیم.

تمرین ۱۹ : دنباله‌ی هندسی زیر را در نظر بگیرید.

..... و ۱۲ و ۶ و ۳

الف : قدر نسبت این دنباله را به دست آورید. ب : جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.

ج : جمله‌ی پنجم این دنباله را محاسبه کنید.

تمرین ۲۰ : جمله‌ی پانزده ام دنباله‌ی هندسی زیر را تعیین کنید.

.... و ۲ و ۴ و ۸

تمرین ۲۱ : در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی پنجم ۱۶۲ و جمله‌ی دوّم ۶ می باشد.

الف : قدر نسبت این دنباله را محاسبه کنید.

ب : جمله‌ی اوّل این دنباله را تعیین کنید.

ج : جمله‌ی عمومی این دنباله را بنویسید.

تمرین ۲۲ : اگر دو جمله‌ی غیر متوالی t_j و t_i از یک دنباله‌ی هندسی معلوم باشند. ثابت کنید که

$$r = \sqrt[\underbrace{i-j}_{\text{تفاضل شماره ها}}]{\underbrace{\frac{t_i}{t_j}}_{\text{تقسیم جملات}}}$$

اثبات : کافی است از جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی استفاده کنیم.

$$t_n = ar^{n-1}$$

$$\left.\begin{matrix} t_i = ar^{i-1} \\ t_j = ar^{j-1} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{t_i}{t_j} = \frac{ar^{i-1}}{ar^{j-1}} \to \frac{t_i}{t_j} = \frac{r^{i-1}}{r^{j-1}} \to \frac{t_i}{t_j} = r^{i-1-j+1} \to \frac{t_i}{t_j} = r^{i-j}$$

تمرین ۲۳ : در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی هفتم ۸۱ و جمله‌ی چهارم ۳ می باشد. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

***

واسطه‌ی هندسی

یک یا چند عدد را واسطه‌ی هندسی می نامند، هرگاه بین دو جمله از یک دنباله قرار گیرند، تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند.

برای مثال، اعداد ۵۴ و ۱۸ و ۶ سه واسطه‌ی هندسی بین ۲ و ۱۶۲ می باشند، زیرا دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی هندسی است.

$$\underline{۲},\underline{۶,۱۸,۵۴},\underline{\underline{۱۶۲}},...$$

با معلوم بودن دو جمله از یک دنباله‌ی هندسی و تعداد واسطه ها می توان این واسطه ها را با محاسبه‌ی قدر نسبت، تعیین نمود. اگر a جمله‌ی اوّل و b جمله‌ی آخر و m تعداد واسطه ها باشد. در این صورت داریم:

$$r = \sqrt[m+۱]{\frac{b}{a}}$$

تمرین۲۴ : بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه واسطه‌ی هندسی درج کنید.

حل: ابتدا قدر نسبت را تعیین کرده و سپس جملات دنباله را محاسبه می نماییم.

$$r = \sqrt[m+۱]{\frac{b}{a}} = \sqrt[۳+۱]{\frac{۳۲۴}{۴}} = \sqrt[۴]{۸۱} = ۳$$

$$۴,۱۲,۳۶,۱۰۸,۳۲۴,...$$

تمرین۲۵ : اگر z و y و x سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، ثابت کنید که : $y^۲ = xz$

اثبات : می دانیم که در هر دنباله‌ی هندسی خارج قسمت هر دو جمله‌ی متوالی عدد ثابتی است. این عدد ثابت را قدرنسبت می نامند و آن را با r نمایش می دهند.

$$\begin{matrix} r = \frac{y}{x} \\ r = \frac{z}{y} \end{matrix} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \rightarrow y^۲ = xz$$

تمرین۲۶ : در دنباله‌ی هندسی زیر ، مقدار t را به دست آورید.

.... و ۶۳ و t و ۷

تمرین۲۷ : در دنباله‌ی هندسی زیر ، مقدار x را تعیین کنید.

x و ۶ و ۹x و ......

تمرین۲۸ : بین ۴ و ۹ یک واسطه‌ی هندسی درج کنید.

حل:

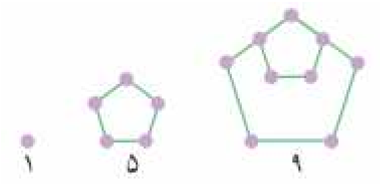
$$x^{۲}=ab \to x^{۲}=(۴)(۹) \to x^{۲}=۳۶ \to x=\pm\sqrt{۳۶}=\pm۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴,\ ۶,\ ۹,\ldots \\ ۴,-۶,۹,\ldots \end{cases}$$

***

تمرین برای حل :

۲۹ : الگوی مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دوجمله‌ی بعدی الگو را با رسم شکل بیابید.

ب : نوع دنباله‌ی بدست آمده را با ذکر دلیل بیان کنید.

ج : جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.

د : حساب کنید که جمله‌ی چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

۳۰ : در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات نهم و سیزدهم و بیستم برابر ۷۸ است. جمله‌ی چهاردهم این دنباله را به دست آورید.

۳۱ : در یک دنباله‌ی حسابی ، مجموع سه جمله‌ی اوّل ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی آن ۳۹ است. این دنباله را مشخص کنید.

۳۲ : اگر $۴m-۱۱$ و $۳m+۲$ و $m-۱$ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله حسابی باشند، مقدار m را به دست آورید.

۳۳ : جملات سوّم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. این دنباله را مشخص کنید.

۳۴ : عددی بین ۵ و ۸۰ قرار دهید به طوری که این سه عدد تشکیل یک دنباله‌ی هندسی بدهند. مسئله چند جواب دارد؟

۳۵ : اگر 9^c و 81^b و 3^a سه جملهی متوالی از یک دنبالهی هندسی باشند، ثابت کنید که $8b = a + 2c$.

۳۶ : در یک دنبالهی هندسی جملهی پنجم برابر ۶ و جمله هشتم برابر ۴۸ است. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

۳۷ : بین دو عدد $2^5 \times 3^9$ و $2^3 \times 3^7$ عددی قرار دهید که دنبالهی هندسی تشکیل شود.

۳۸ : در یک دنبالهی هندسی قدرنسبت ۲ و $t_5 - t_3 = 48$. این دنباله را مشخص کنید.

***

روشی برای محاسبهی مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی ابتدا از یک

معلّم در کلاس درس گفت، بچه ها حاصل جمع اعداد طبیعی متوالی از یک تا صد را به دست آورید. بر خلاف انتظار معلم، یکی از شاگردان به نام گاوس[3] سریع پاسخ را نوشت. معلم روش کار او را پرسید، او گفت من این روش را برای حاصل جمع اعداد از ۱ تا ۵ توضیح می دهم. حاصل جمع از یک تا صد نیز به همین شکل بدست می آید.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$
$$S = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$
$$\to 2S = (1+5) + (2+4) + (3+3) + (4+2) + (5+1)$$
$$2S = 5 \times 6 \to S = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

تمرین ۳۹ : مجموع اعداد طبیعی متوالی از یک تا ۱۰ را به روش گاوس به دست آورید.

نتیجه :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

[3]. گاوس، نام یک ریاضی دان آلمانی است. گفته می شود که او وقتی آموزگارش، در دبستان، برای سرگرم کردن شاگردان به آنان گفت شماره های ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع کنند. گاوس پاسخ درست را در چند ثانیه با به کارگیری یک بینش ریاضیاتی چشمگیر به دست آورد.

تمرین برای حل :

۴۰ : مجموع اعداد طبیعی متوالی از یک تا ۱۰۰ را به دست آورید.

۴۱ : حاصل جمع زیر را به دست آورید.

$$A = ۱۳x^{۲} + ۱۴x^{۲} + ۱۵x^{۲} + \dots + ۳۹x^{۲}$$

۴۲ : حاصل ضرب بیست جمله‌ی اوّل دنباله‌ی هندسی زیر را محاسبه کنید.

۲ و ۴ و ۸ و ....

۴۳ : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = ۱۰۰^{۲} - ۹۹^{۲} + ۹۸^{۲} - ۹۷^{۲} + \dots + ۲^{۲} - ۱^{۲}$$

***

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

استان خوزستان