

# حسابان ۲

پایه دوازدهم « رشته‌ی ریاضی و فیزیک »

فصل ۱ : تابع

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی



[www.mathtower.ir](http://www.mathtower.ir)

@amerimath



مهر ۱۴۰۱

## درس اول : تبدیل نمودار توابع

برای رسم نمودار بسیاری از توابع می توان از تبدیلات استفاده کرد. در واقع به کمک تبدیلات می توان نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابعی ساده تر از آن رسم نمود. در اینجا برخی از این تبدیلات را معرفی می کنیم.

### الف : انتقال های افقی و عمودی

#### قسمت اول : انتقال عمودی

اگر  $k$  یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد. می توان انتقال عمودی را برای تابع  $g$  در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اول : تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(x) + k$  تعریف شده باشد. آنگاه

$$g(x_0) = f(x_0) + k = y_0 + k$$

بنابر این نقطه  $(x_0, y_0 + k)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

حالت دوم : تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(x) - k$  تعریف شده باشد. آنگاه

$$g(x_0) = f(x_0) - k = y_0 - k$$

بنابر این نقطه  $(x_0, y_0 - k)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که :

**۱ :** برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) + k$  ، کافی است نمودار  $f(x)$  را  $k$  واحد در راستای قائم به سمت

بالا انتقال دهیم.

**۲ :** برای رسم نمودار تابع  $y = f(x) - k$  ، کافی است نمودار  $f(x)$  را  $k$  واحد در راستای قائم به سمت

پایین انتقال دهیم.

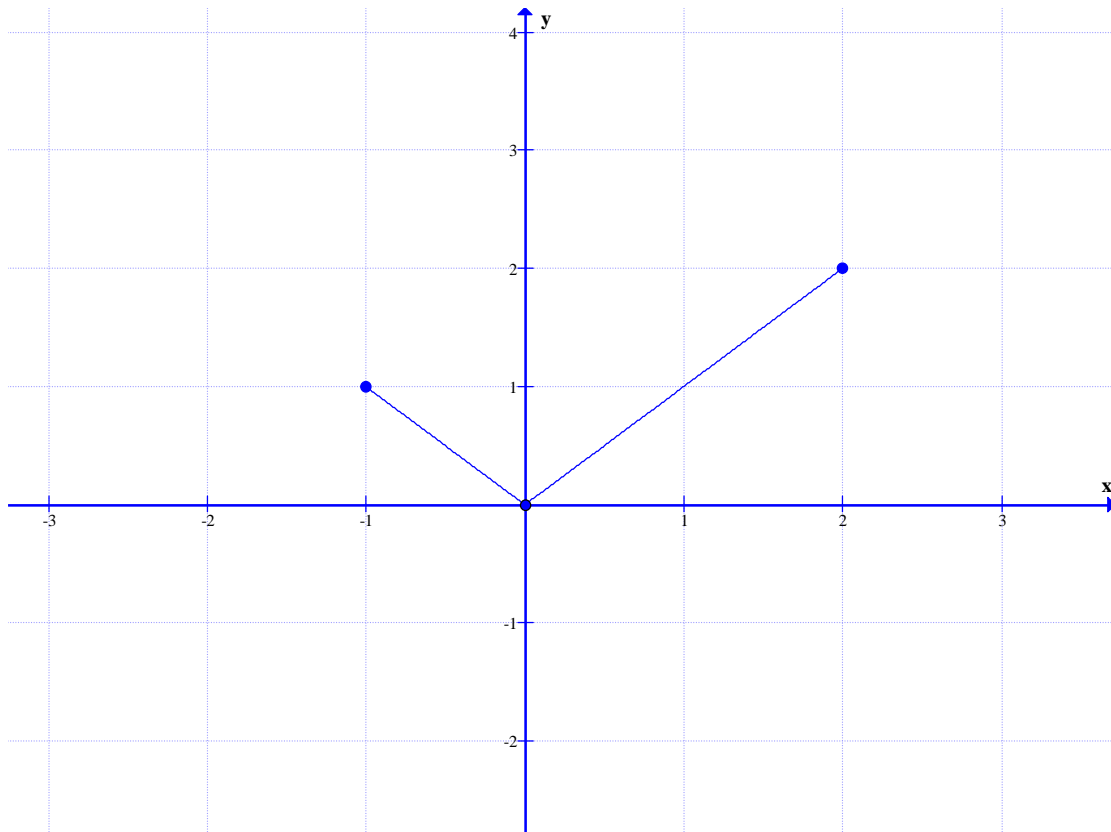
**مثال :** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را در فاصله  $[-1, 2]$  را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از

موارد زیر پاسخ دهید.

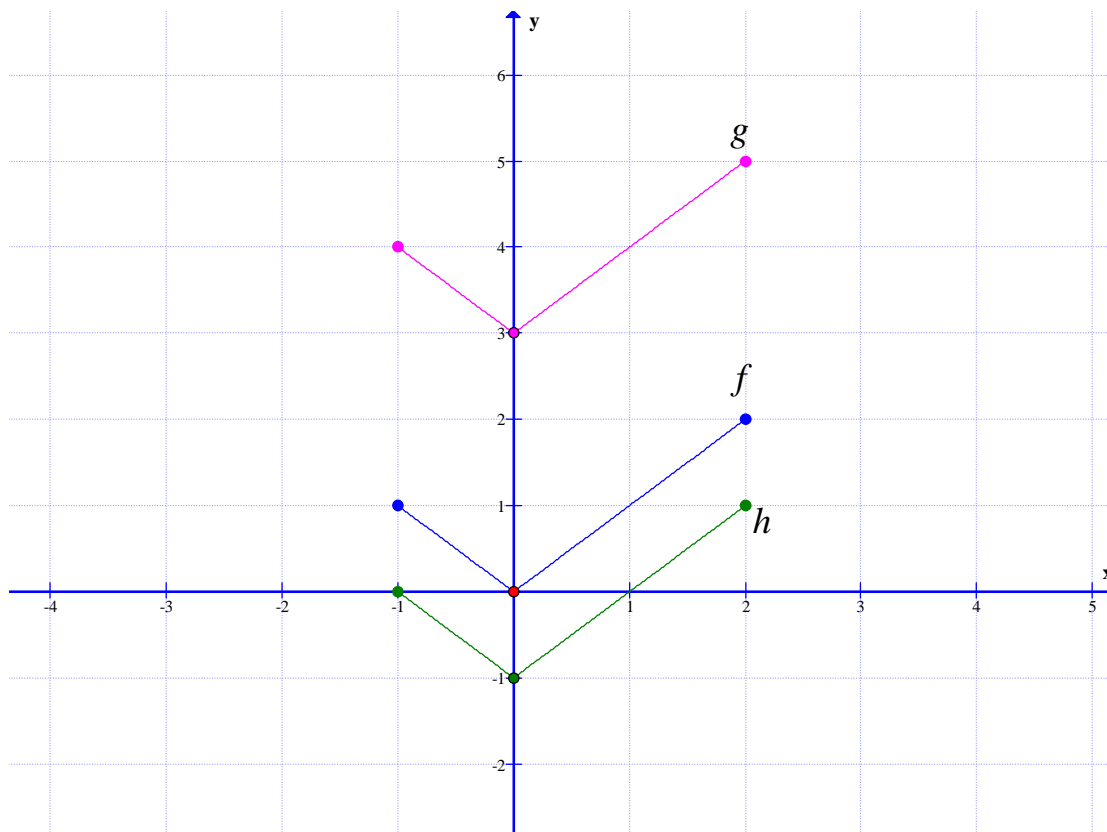
الف : نمودار تابع  $g(x) = |x| + 3$  را رسم کنید.      ب : نمودار تابع  $h(x) = |x| - 1$  را رسم کنید.

**حل:** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = |x|$  را در فاصله‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

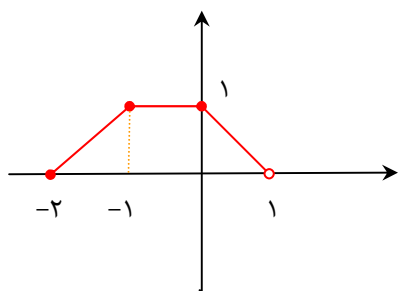
$x$	-۱	۰	۲
$y$	۱	۰	۲



اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع  $g(x)$  نمودار  $f(x)$  را سه واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار  $h(x)$  نمودار  $f(x)$  را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم.



**نتیجه:** در انتقال عمودی طول نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می ماند و فقط عرض آنها به اندازه‌ی  $k$  اضافه یا کم می شود.



**تمرین ۱:** تابع  $f(x)$  در شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف: دامنه و برد تابع  $f(x)$  را بنویسید.

ب: نمودار تابع  $g(x) = f(x) - 2$  را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع  $g(x)$  را بنویسید.

د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  چه نتیجه می گیرید.

## قسمت دوم: انتقال افقی

اگر  $k$  یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد. می توان انتقال افقی را برای تابع  $g$  در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اول: تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(x + k)$  تعریف شده باشد. آنگاه

$$g(x_0 - k) = f(x_0 - k + k) = f(x_0)$$

بنابر این نقطه‌ی  $(x_0 - k, y_0)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

حالت دوم: تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(x - k)$  تعریف شده باشد. آنگاه

$$g(x_0 + k) = f(x_0 + k - k) = f(x_0)$$

بنابر این نقطه‌ی  $(x_0 + k, y_0)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

**۱:** برای رسم نمودار تابع  $y = f(x + k)$  ، کافی است نمودار  $f(x)$  را  $k$  واحد در راستای افقی به

سمت چپ انتقال دهیم.

**۲:** برای رسم نمودار تابع  $y = f(x - k)$  ، کافی است نمودار  $f(x)$  را  $k$  واحد در راستای افقی به

سمت راست انتقال دهیم.

**مثال:** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = x^2$  را در فاصله‌ی  $(-2, 2)$  را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از

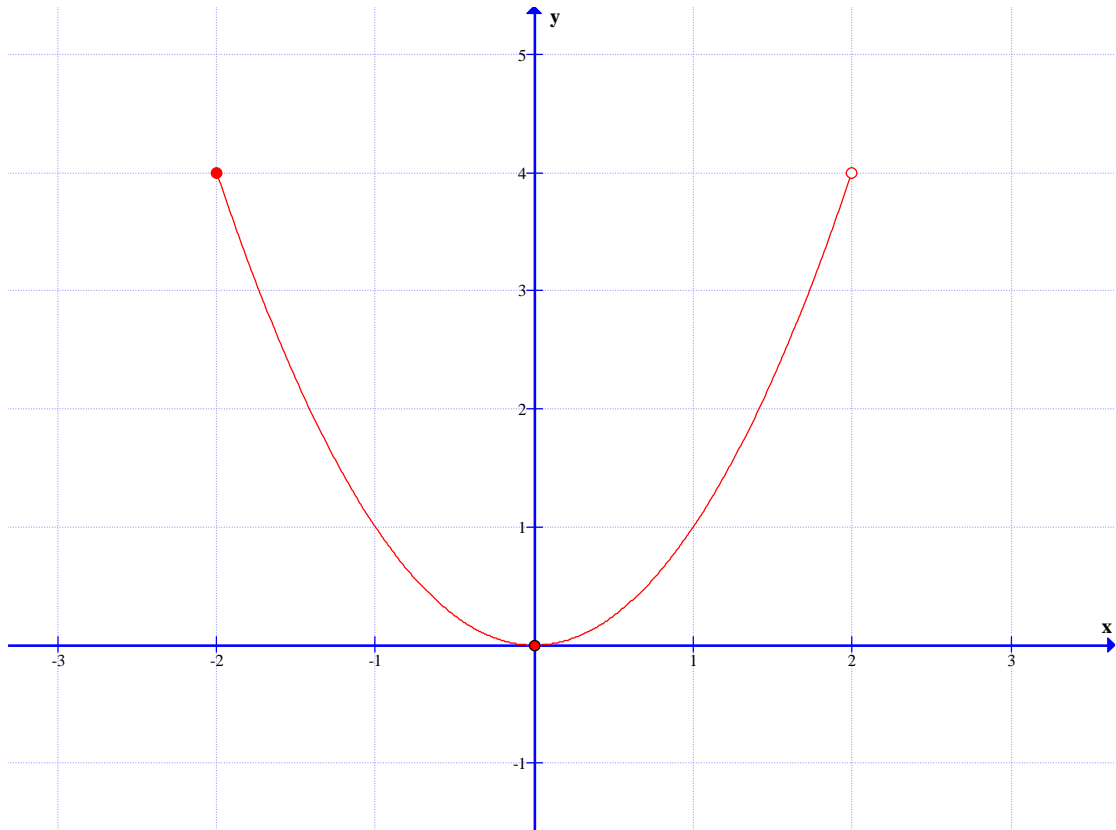
موارد زیر پاسخ دهید.

الف: نمودار تابع  $g(x) = (x + 3)^2$  را رسم کنید.

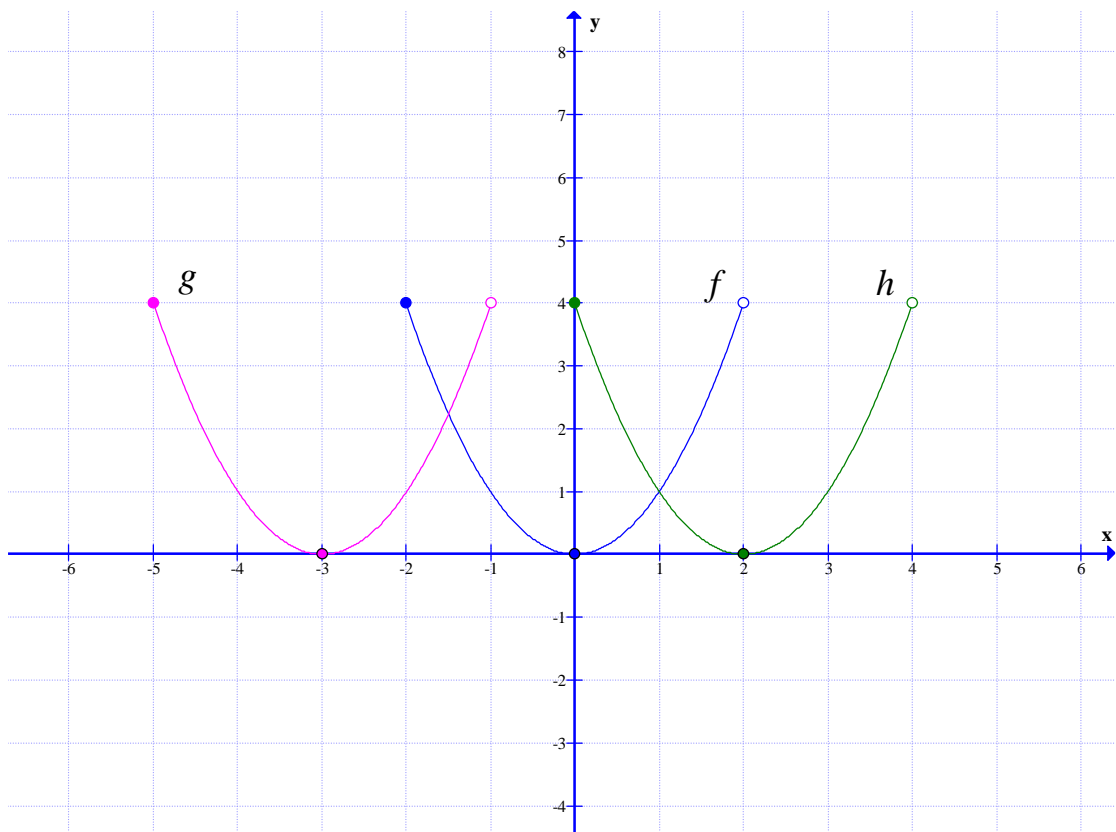
ب: نمودار تابع  $h(x) = (x - 2)^2$  را رسم کنید.

**حل:** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = x^2$  را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

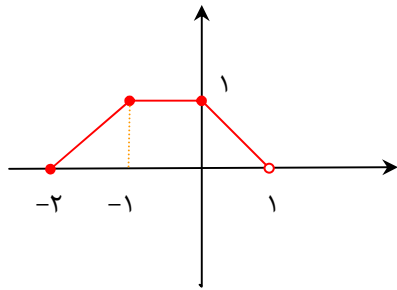
$x$	$-2$	$0$	$2$
$y$	$4$	$0$	$4$



اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع  $g(x)$  نمودار  $f(x)$  را سه واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار  $h(x)$  نمودار  $f(x)$  را دو واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم.



**نتیجه:** در انتقال افقی عرض نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می ماند و فقط طول آنها به اندازه‌ی  $k$  واحد اضافه یا کم می شود.



**تمرین ۲:** تابع  $f(x)$  در شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف: دامنه و برد تابع  $f(x)$  را بنویسید.

ب: نمودار تابع  $g(x) = f(x - 2)$  را رسم کنید.

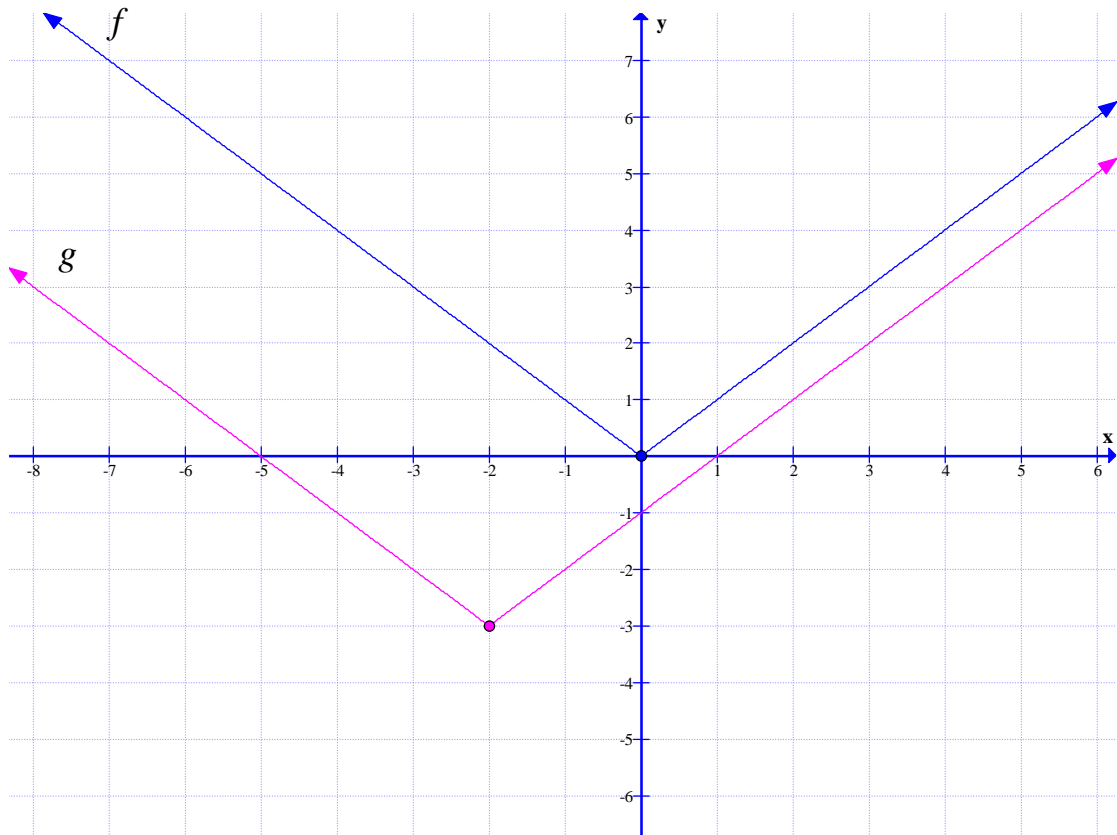
ج: دامنه و برد تابع  $g(x)$  را بنویسید.

د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  چه نتیجه می گیرید.

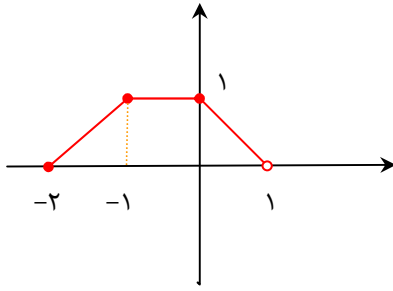
**توجه:** گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع هم انتقال افقی و هم انتقال عمودی داشته باشیم<sup>۱</sup>. به مثال زیر توجه کنید.

**مثال:** برای رسم نمودار تابع  $g(x) = |x + 2| - 3$  ابتدا نمودار تابع  $f(x)$  را دو واحد در راستای افقی به

سمت چپ و سپس سه واحد در راستای قائم به سمت پایین منتقل می کنیم.



<sup>۱</sup>. لازم نیست ترتیبی برای انتقال افقی و عمودی در نظر بگیریم.



**تمرین ۳:** تابع  $f(x)$  در شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف: دامنه و برد تابع  $f(x)$  را بنویسید.

ب: نمودار تابع  $g(x) = f(x - 2) + 1$  را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع  $g(x)$  را بنویسید.

د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  چه نتیجه می‌گیرید.

**تمرین ۴:** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \sin x$  را در فاصله‌ی  $[0, 2\pi]$  رسم کنید و سپس به کمک آن نمودار

توابع زیر را نیز رسم نمایید.

الف)  $g(x) = \sin x + 2$       ب)  $h(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$       ج)  $k(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

\*\*\*

### ب: انبساط و انقباض عمودی

اگر  $k$  یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد. می‌توان

انبساط و انقباض عمودی را برای تابع  $g$  در حالت‌های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع  $g$  به صورت  $g(x) = kf(x)$  تعریف شده باشد، آنگاه

$$g(x_0) = kf(x_0) = ky_0$$

بنابر این نقطه‌ی  $(x_0, ky_0)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع  $y = kf(x)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار  $f(x)$  را  $k$  برابر کنیم ولی طول نقاط

را ثابت نگه داریم.

**مثال:** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را در فاصله‌ی  $[0, 4]$  را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از

موارد زیر پاسخ دهید.

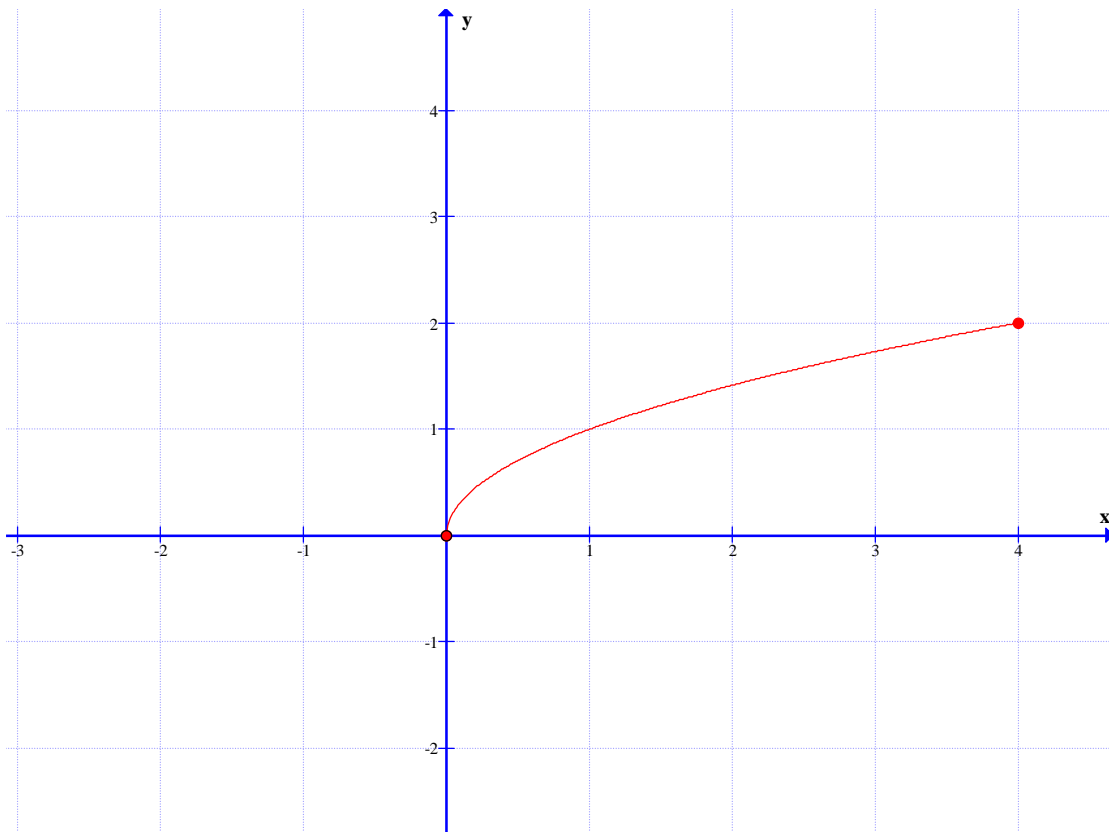
الف: نمودار تابع  $g(x) = 3\sqrt{x}$  را رسم کنید.

ب: نمودار تابع  $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$  را رسم کنید.



حل: ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را در فاصله‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

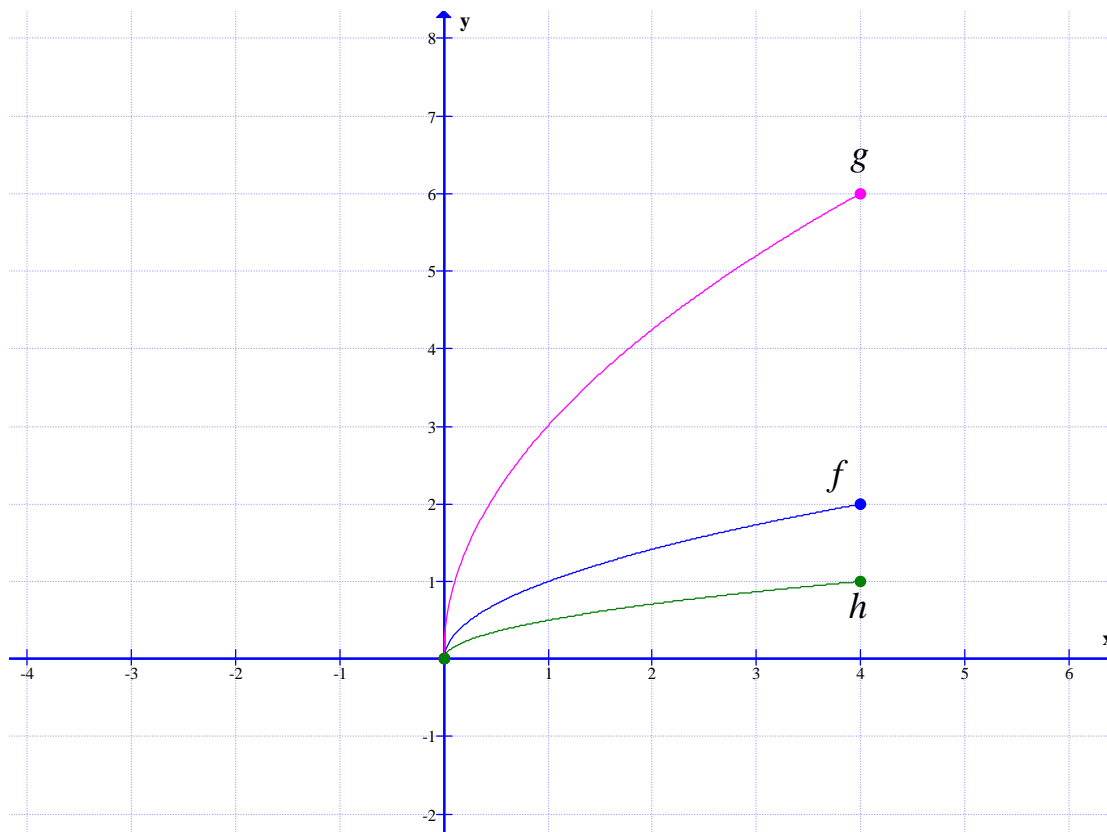
$x$	۰	۱	۴
$y$	۰	۱	۲



اکنون برای رسم نمودار توابع  $g$  و  $h$  طول نقاط نمودار تابع  $f$  را ثابت نگه می‌داریم ولی عرض نقاط را در ضریب  $f(x)$  ضرب می‌کنیم.

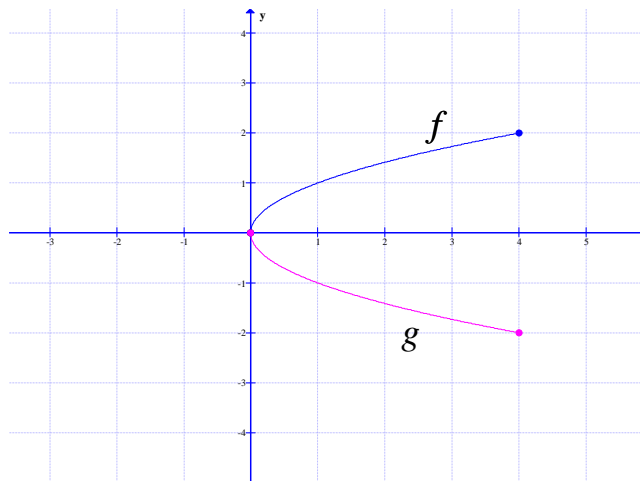
$g$	$x$	۰	۱	۴
	$y$	۰	۳	۶

$h$	$x$	۰	۱	۴
	$y$	۰	$\frac{1}{2}$	۱



**توجه :**

- ۱: اگر  $k > 1$  باشد. نمودار  $y = kf(x)$  از انبساط عمودی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می شود.
  - ۲: اگر  $0 < k < 1$  باشد. نمودار  $y = kf(x)$  از انقباض عمودی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می شود.
  - ۳: اگر عرض نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع  $y = -f(x)$  به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع  $y = -f(x)$  قرینه‌ی نمودار تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور  $x$  ها است.
- در شکل زیر نمودار دو تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = -\sqrt{x}$  را ملاحظه نمایید.



**تمرین ۵:** نمودار تابع  $f(x) = \cos x$  را در فاصله‌ی  $[0, 2\pi]$  را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع  $f(x)$  را بنویسید.

ب : نمودار تابع  $g(x) = 2 \cos x$  را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع  $g(x)$  را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  چه نتیجه می‌گیرید.

\*\*\*

### ج : انبساط و انقباض افقی

اگر  $k$  یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد. می‌توان انبساط و انقباض افقی را برای تابع  $g$  در حالت‌های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(kx)$  تعریف شده باشد، آنگاه

$$g\left(\frac{1}{k}x_0\right) = f\left(\frac{1}{k} \times kx_0\right) = f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی  $\left(\frac{1}{k}x_0, y_0\right)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع  $y = f(kx)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار  $f(x)$  را ثابت نگه داشته، ولی طول

نقاط را در  $\frac{1}{k}$  ضرب کنیم.

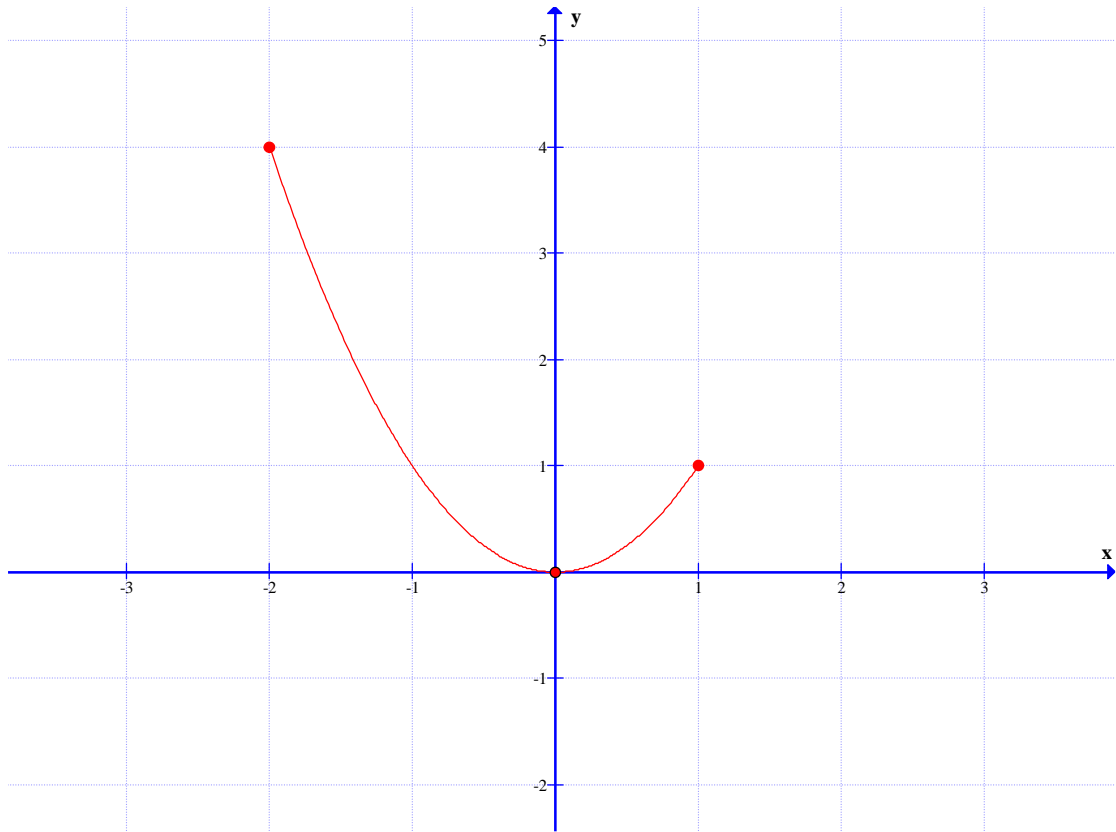
**مثال:** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = x^2$  را در فاصله‌ی  $[-2, 1]$  را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع  $g(x) = (2x)^2$  را رسم کنید.

ب : نمودار تابع  $h(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)^2$  را رسم کنید.

**حل:** ابتدا نمودار تابع  $f(x) = x^2$  را در فاصله‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

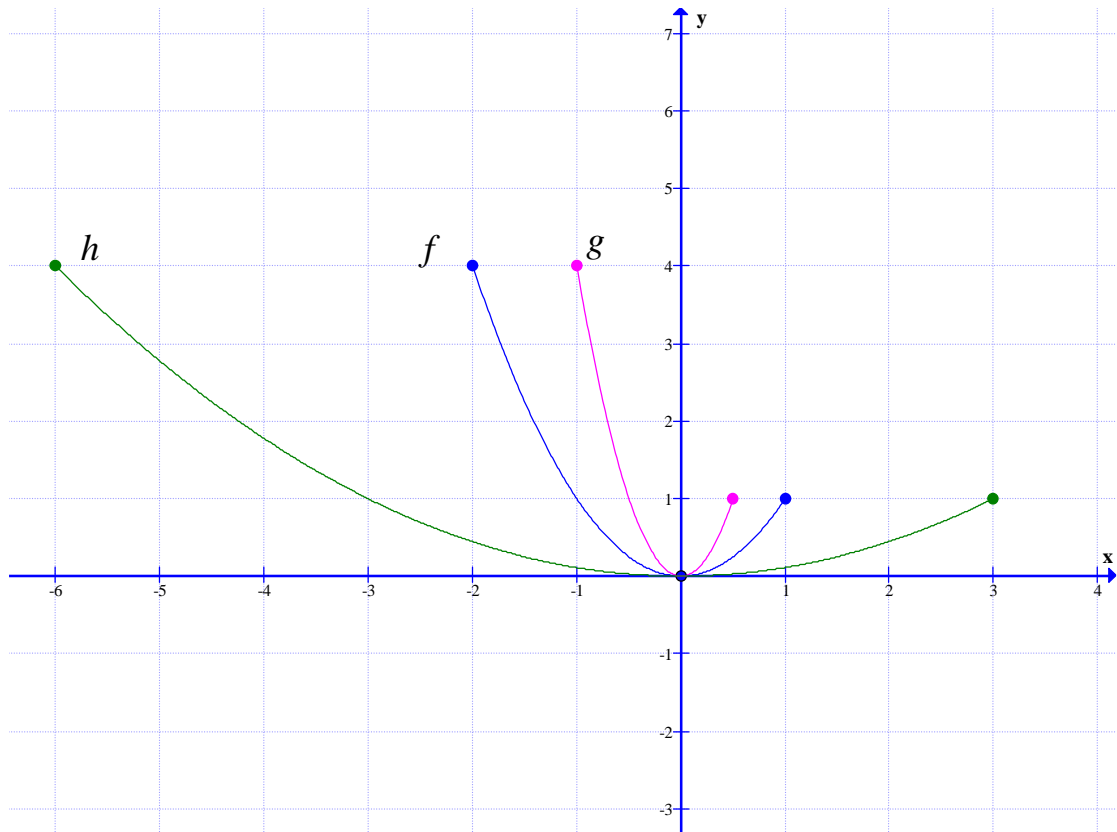
$x$	$-2$	$\cdot$	$1$
$y$	$4$	$\cdot$	$1$



اکنون برای رسم نمودار توابع  $g$  و  $h$  عرض نقاط نمودار تابع  $f$  را ثابت نگه می‌داریم ولی طول نقاط را در معکوس ضریب  $x$  ضرب می‌کنیم.

$g$	$x$	$-1$	$\cdot$	$\frac{1}{2}$
	$y$	$4$	$\cdot$	$1$

$h$	$x$	$-6$	$\cdot$	$3$
	$y$	$4$	$\cdot$	$1$



**توجه:**

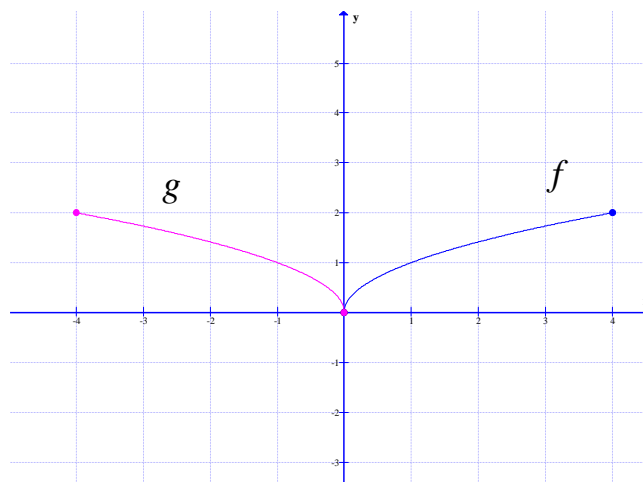
۱: اگر  $k > 1$  باشد. نمودار  $y = f(kx)$  از انقباض افقی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می شود.

۲: اگر  $0 < k < 1$  باشد. نمودار  $y = f(kx)$  از انبساط افقی نمودار  $y = f(x)$  حاصل می شود.

۳: اگر طول نقاط نمودار تابع  $y = f(x)$  را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع  $y = f(-x)$  به دست می

آیند. بنابراین نمودار تابع  $y = f(-x)$  **قرینه‌ی نمودار** تابع  $y = f(x)$  نسبت به محور  $y$  ها است.

در شکل زیر نمودار دو تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = \sqrt{-x}$  را ملاحظه نمایید.



**تمرین ۶:** نمودار تابع  $f(x) = \sin x$  را در فاصله‌ی  $[0, 2\pi]$  را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف: دامنه و برد تابع  $f(x)$  را بنویسید.

ب: نمودار تابع  $g(x) = \sin 2x$  را رسم کنید.

ج: دامنه و برد تابع  $g(x)$  را بنویسید.

د: با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  چه نتیجه می‌گیرید.

**توجه:** گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض‌های افقی و عمودی را با همدیگر انجام دهیم. برای مثال اگر نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x) = 3f(2x)$  تعریف شده باشد، آنگاه

$$g\left(\frac{x_0}{2}\right) = 3f\left(2 \times \frac{x_0}{2}\right) = 3f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی  $(\frac{x_0}{2}, 3y_0)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع  $y = 3f(2x)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار  $f(x)$  را سه برابر کرده و طول نقاط را در  $\frac{1}{2}$  ضرب می‌کنیم.

**توجه:** گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض‌های افقی و عمودی را به همراه انتقال عمودی یا افقی استفاده کنیم.

**مثال الف:** برای مثال اگر نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(2x + 1)$  تعریف شده باشد، آنگاه

$$g\left(\frac{x_0 - 1}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x_0 - 1}{2} + 1\right) = f(x_0 - 1 + 1) = f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی  $(\frac{x_0 - 1}{2}, y_0)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع  $y = f(2x + 1)$ ، کافی است، عرض نقاط نمودار  $f(x)$  را ثابت نگه داشته، ولی ابتدا از طول نقاط یک واحد از آن کم کرده و سپس در  $\frac{1}{2}$  ضرب می‌کنیم.

**مثال ب:** اگر نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  یک نقطه از نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد و تابع  $g$  به صورت  $g(x) = f(2x) + 1$  تعریف شده باشد. آنگاه

$$g\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x_0}{2}\right) + 1 = f(x_0) + 1 = y_0$$

بنابراین نقطه‌ی  $(\frac{x_0}{2}, y_0 + 1)$  از نمودار تابع  $g$  متناظر با نقطه‌ی  $(x_0, y_0)$  از نمودار  $f$  است.

با توجه به مطلب می‌توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع  $y = f(2x) + 1$ ، کافی است، طول نقاط نمودار  $f(x)$  را در  $\frac{1}{2}$  ضرب کرده و به عرض نقاط یک واحد اضافه کنیم.

**توجه:** برای رسم نمودار تابعی نظیر  $g(x) = 3f\left(\frac{5x+3}{4}\right) + 5$  به کمک نمودار تابع  $f(x)$  می‌توان از

**ترفند تغییر متغیر** نیز استفاده کنید. این ترفند برای تعیین نقاط  $g$  به کمک نقاط متناظر آنها در  $f$  بکار می‌رود. بدین ترتیب که:

الف: عرض نقاط  $f$  را ابتدا سه برابر و سپس ۵ واحد اضافه می‌کنیم.

ب: عبارت  $\frac{5x+3}{4}$  را برابر  $t$  قرار می‌دهیم و  $x$  را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{5x+3}{4} = t \rightarrow 5x+3 = 4t \rightarrow x = \frac{4t-3}{5}$$

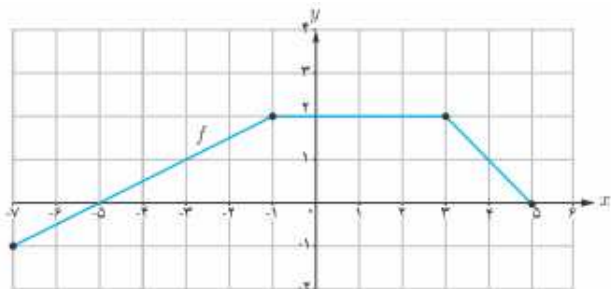
یعنی طول نقاط  $f$  را ابتدا ۴ برابر کرده و سپس ۳ واحد اضافه می‌کنیم و در نهایت بر ۵ تقسیم می‌کنیم.

**تمرین ۷:** اگر نمودار تابع  $f$  به مقابل باشد. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف)  $g(x) = f(2x + 1)$

ب)  $h(x) = f(2x) - 3$

ج)  $k(x) = 2f(x) - 1$



**نتیجه:** خلاصه‌ی آنچه که در این درس بیان شده است برای تابع  $y = f(x)$  و با فرض مثبت بودن عدد  $k$  به شکل زیر بیان می‌شود.

نتیجه		نحوه‌ی تبدیل		تابع جدید
مطیع	نمودار به اندازه‌ی $k$ واحد بالا می‌رود.	به عرض نقاط $k$ واحد اضافه می‌شود.	طول نقاط ثابت می‌ماند.	$y = f(x) + k$
	نمودار به اندازه‌ی $k$ واحد پایین می‌رود.	از عرض نقاط $k$ واحد کم می‌شود.		$y = f(x) - k$
	اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت عمودی منقبض می‌شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت عمودی منبسط می‌شود.	عرض نقاط در $k$ ضرب می‌شود.		$y = kf(x)$
لجباز	نمودار به اندازه‌ی $k$ واحد به عقب می‌رود.	از طول نقاط $k$ واحد کم می‌شود.	عرض نقاط ثابت می‌ماند.	$y = f(x + k)$
	نمودار به اندازه‌ی $k$ واحد به جلو می‌رود.	به طول نقاط $k$ واحد اضافه می‌شود.		$y = f(x - k)$
	اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت افقی منبسط می‌شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت افقی منقبض می‌شود.	طول نقاط در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌شود.		$y = f(kx)$

**تمرین برای حل:**

**۸:** نقطه‌ی  $(-۸, ۶)$  روی نمودار  $y = f(x)$  قرار دارد. در هر یک از توابع زیر تعیین کنید که این نقطه به چه نقطه‌ای متناظر می‌شود.

$$۱-۸) g(x) = f(x) - ۱$$

$$۴-۸) g(x) = f(۲x)$$

$$۲-۸) g(x) = f(x) + ۲$$

$$۵-۸) g(x) = ۳f(x - ۱)$$

$$۳-۸) g(x) = ۳f(x)$$

$$۶-۸) g(x) = ۵f(x + ۱) + ۲$$



۹: ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را رسم کنید. سپس به کمک تبدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

۲-۹)  $g(x) = \sqrt{2+x}$

۲-۹)  $g(x) = 2 + \sqrt{x-1}$

۲-۹)  $g(x) = 2 + \sqrt{x}$

۲-۹)  $g(x) = \sqrt{1-x}$

۲-۹)  $g(x) = -2\sqrt{x}$

۲-۹)  $g(x) = \sqrt{2x+1} - 3$

۱۰: ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \cos x$  را در فاصله‌ی  $[-2\pi, 2\pi]$  رسم کنید. سپس به کمک تبدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

الف)  $g(x) = \cos 2x - 1$

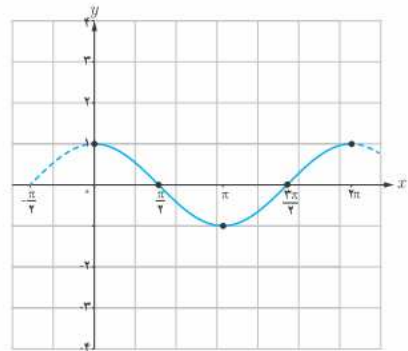
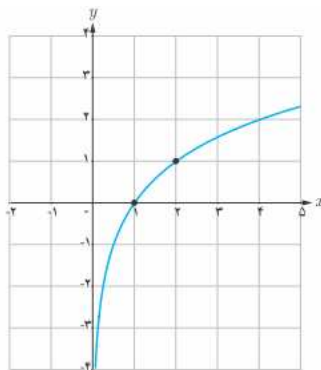
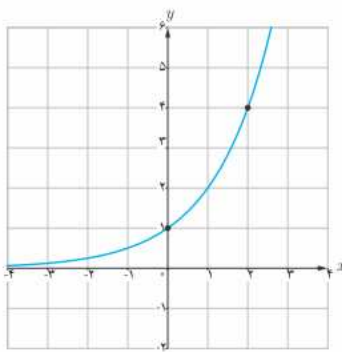
ب)  $h(x) = 2 \cos \frac{x}{3}$

۱۱: در زیر نمودار توابع  $y = 2^x$  و  $y = \log_2^x$  و  $y = \cos x$  رسم شده اند. نمودار توابع زیر را به کمک تبدیلات رسم کنید.

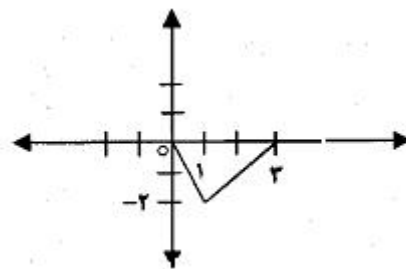
الف)  $y = 2^{x-1} + 2$

ب)  $y = \log_2^{x+2}$

ج)  $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$



۱۲: در زیر نمودار تابع  $y = f(x)$  رسم شده است. با استفاده از تبدیلات، سپس نمودار تابع  $y = -2f(x-3)$  را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.



۱۳: تابع  $y = f(x)$  با دامنه  $[-۲, ۱]$  و برد  $(۱, ۵]$  را در نظر بگیرید. به کمک ویژگی‌های تبدیلات، دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف)  $g(x) = ۲f(x - ۱) - ۳$

ب)  $h(x) = f\left(\frac{۱}{۲}x\right) + ۱$

\*\*\*

**تهیه کننده: جابر عامری، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی**

@amerimath

کانال تلگرامی:

www.mathtower.ir

سایت:

## درس دوّم : تابع درجه ۳ ، توابع یکنوا و تقسیم و بخش پذیری

در این درس ابتدا با توابع چند جمله ای، بویژه تابع درجه‌ی ۳ آشنا می شویم. سپس به معرفی توابع یکنوا می پردازیم و در نهایت تقسیم چندجمله ای ها و ویژگی های آن و همچنین بخش پذیری دو چندجمله ای را معرفی می کنیم.

### قسمت اول : توابع چند جمله ای و تابع درجه ۳

اگر  $n$  یک عدد صحیح نامفی و  $a_0$  و  $a_1$  و  $a_2$  و ... و  $a_n$  اعداد حقیقی باشند که  $a_n \neq 0$ . در این صورت تابع زیر را یک **تابع چندجمله‌ای** از درجه‌ی  $n$  می نامند.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

برای مثال توابع زیر توابع چندجمله ای هستند.

(الف) تابع ثابت

$f(x) = c$       تابع چندجمله ای از درجه صفر<sup>۱</sup>

(ب) تابع خطی

$f(x) = ax + b$       تابع چندجمله ای از درجه یک

(ج) تابع درجه ۲ (سه‌می)

$f(x) = ax^2 + bx + c$       تابع چندجمله ای از درجه دو

(د) تابع زیر نیز یک تابع چند جمله ای از درجه ۳ است.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$       تابع چندجمله ای از درجه سه

**مثال :** نشان دهید که تابع زیر یک تابع چند جمله ای است. سپس درجه‌ی آن را بنویسید.

$$f(x) = x^2(1-x)^3$$

حل :

---

1. برای تابع  $f(x) = 0$  درجه تعریف نمی شود.

$$f(x) = x^2(1-x)^3 = x^2(1-3x+3x^2-x^3) = x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5$$

این تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی ۵ است.

### توجه :

۱: طبق تعریف توابع چندجمله‌ای، توابع کسری، رادیکالی، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی و مثلثاتی چندجمله‌ای محسوب نمی‌شوند.

۲: دامنه‌ی هر تابع چندجمله‌ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. (مگر اینکه دامنه را محدود کرده باشیم).

**تمرین ۱:** تعیین کنید که کدام یک از توابع زیر چندجمله‌ای است. درجه‌ی توابع چندجمله‌ای را نیز مشخص کنید.

الف)  $f(x) = (x-1)^2 + 3$

ت)  $f(x) = |x-2|$

ب)  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+5x-1}$

ث)  $f(x) = x(2+x)(2-x) + 1$

پ)  $f(x) = \sqrt{x^2+5x+1}$

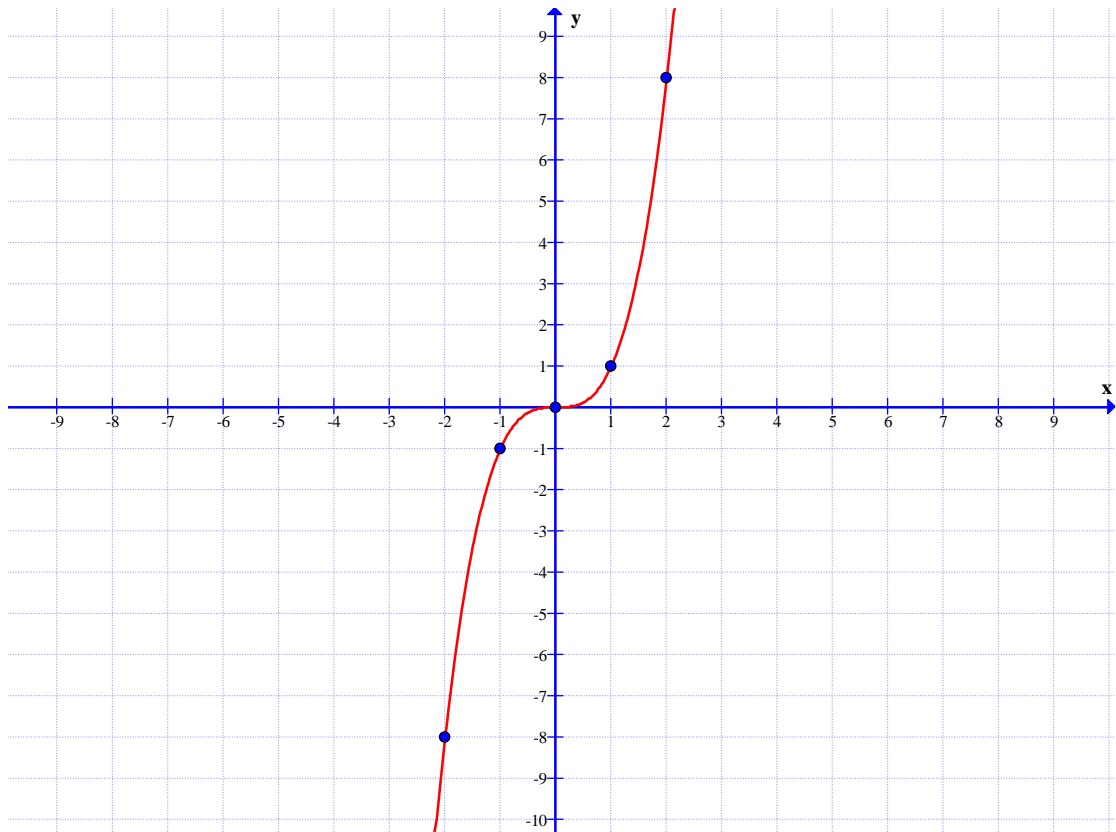
ج)  $f(x) = \sin x$

ساده‌ترین تابع چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ به صورت زیر است.

$$f(x) = x^3$$

این تابع دارای نموداری به شکل زیر است.

$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y$	-۸	-۱	۰	۱	۸



**تمرین ۲:** به دو طریق نشان دهید که تابع  $f(x) = x^3$  وارون پذیر است. سپس وارون آن را تعیین کنید.

**تمرین ۳:** به ازای چه مقدار  $m$  تابع زیر به یک تابع چندجمله‌ای تبدیل خواهد شد.

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x - 1}{x^2 + 5 + mx^2}$$

**تمرین ۴:** به کمک رسم نمودار تابع  $f(x) = x^3$  و با استفاده از تبدیلات، نمودار هر یک از توابع زیر را

رسم کنید.

الف)  $g(x) = (x + 1)^3$

ب)  $h(x) = -x^3 + 1$

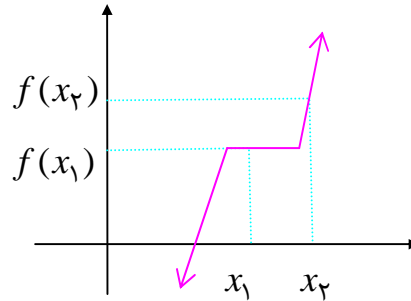
ج)  $k(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

\*\*\*

### قسمت دوم: توابع یکنوا

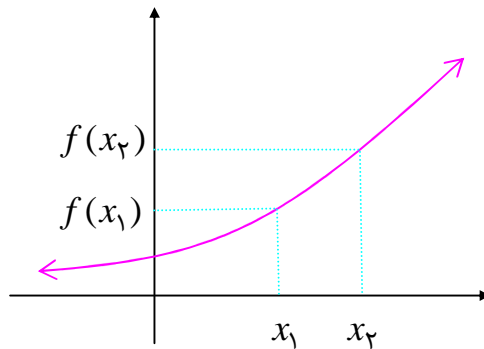
تابع  $y = f(x)$  را روی دامنه اش صعودی گویند، هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



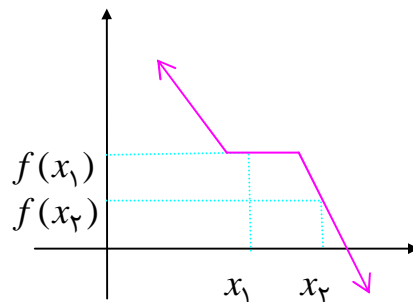
تابع  $y = f(x)$  را روی دامنه اش صعودی اکیداً (اکیداً صعودی) گویند، هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



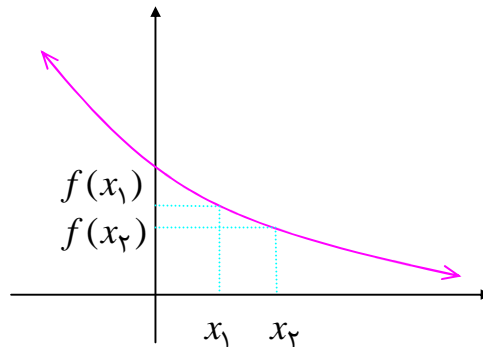
تابع  $y = f(x)$  را روی دامنه اش نزولی گویند، هرگاه:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



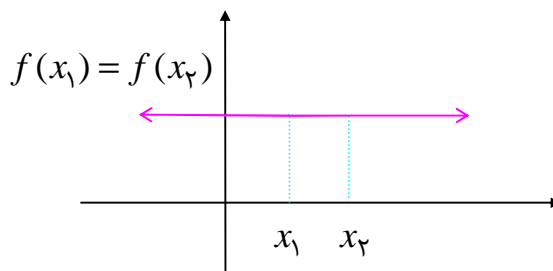
تابع  $y = f(x)$  را روی دامنه اش **نزولی اکید (اکیداً نزولی)** گویند، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



تابع  $y = f(x)$  را روی دامنه اش **ثابت** است، هرگاه :

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$



**توجه :**

۱ : هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را تابع **اکیداً یکنوا** می نامند.

۲ : اگر تابعی صعودی یا نزولی باشد، را **یکنوا** می نامند.

۳ : طبق تعریف تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است یعنی **یکنوا** است ولی **اکیداً یکنوا** نیست.

۴ : برای تعیین صعودی یا نزولی یا ثابت بودن تابع به کمک نمودار آن، نمودار را از چپ به راست نگاه کنید.

۵ : به طور مشابه، صعودی یا نزولی بودن تابع را می توان در یک فاصله مانند  $I \subseteq D_f$  تعریف نمود.

**تمرین ۵ :** نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید و سپس به پرسش های زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع را بنویسید.

ب : نزولی یا صعودی بودن تابع در فاصله های زیر را بنویسید.

۱)  $[0, 1]$

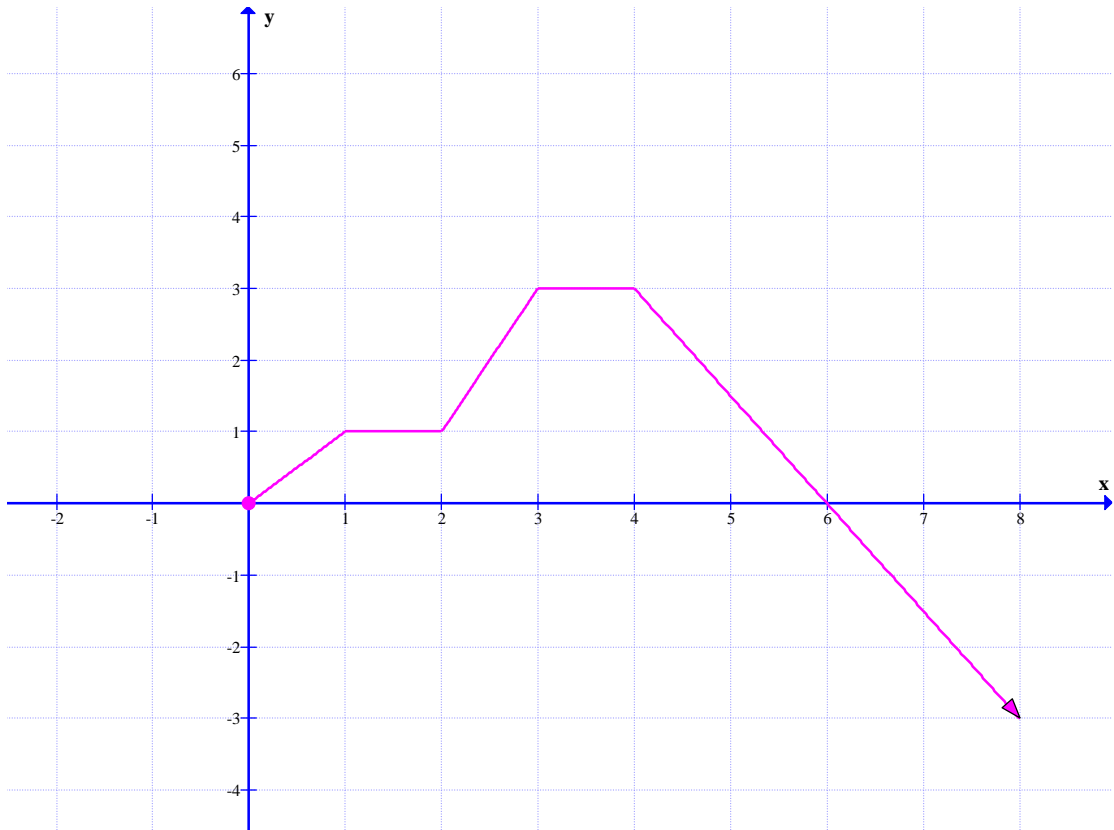
۳)  $[1, 4]$

۵)  $[3, 4]$

۲)  $[1, 2]$

۴)  $[3, 6]$

۶)  $[4, +\infty)$



**تمرین ۶:** صعودی یا نزولی بودن تابع  $f(x) = [x - 1]$  را در دامنه اش به کمک تعریف بررسی کنید.

**حل:**

$$f(x) = [x] - 1$$

تابع صعودی است.  $x_1 < x_2 \rightarrow [x_1] \leq [x_2] \rightarrow [x_1] - 1 \leq [x_2] - 1 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow$

**تمرین ۷:** صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را در دامنه‌ی آنها بررسی کنید.

الف)  $y = 2^{x+1}$

ب)  $y = -3x + 2$

**حل:**

(الف)

$$x_1 < x_2 \rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \rightarrow 2^{x_1+1} < 2^{x_2+1} \rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$$

تابع صعودی اکید است.

(ب)

$$x_1 < x_2 \rightarrow -3x_1 > -3x_2 \rightarrow -3x_1 + 2 > -3x_2 + 2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$$

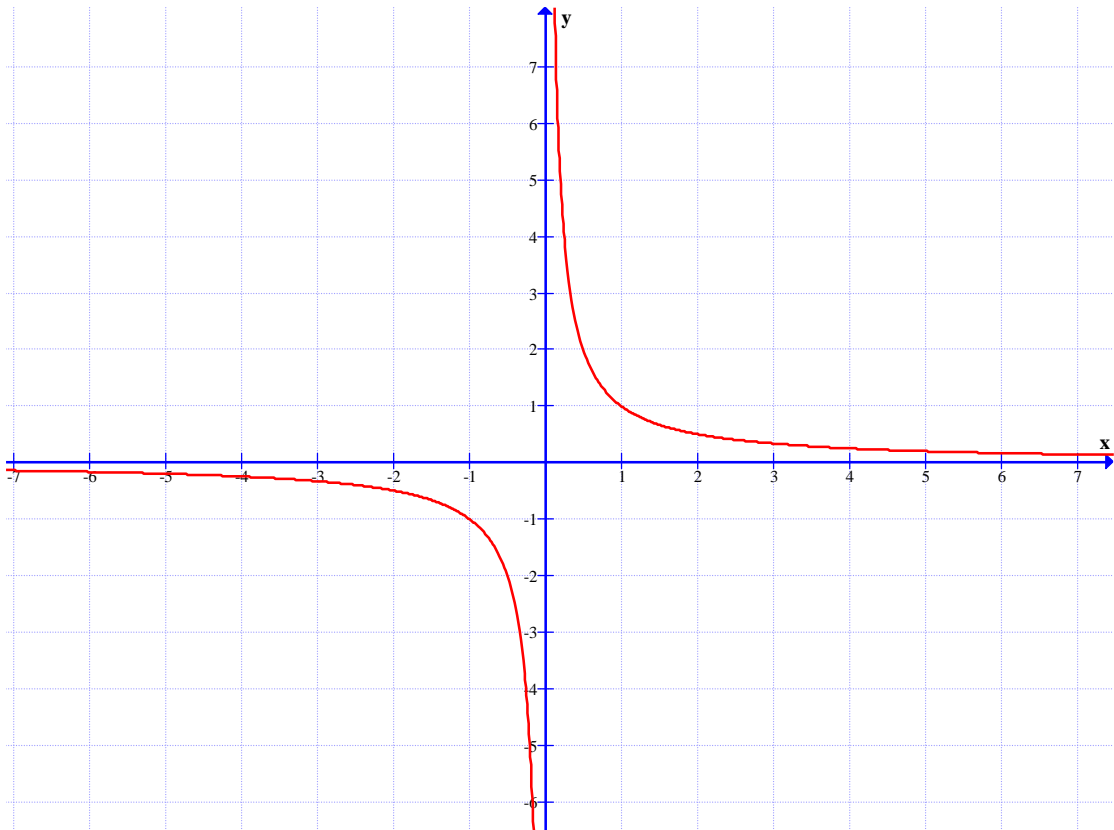
تابع نزولی اکید است.



**توجه :** اگر تابعی در یک فاصله شامل نقاط خارج از دامنه باشد، یکنوایی آن (صعودی و نزولی بودن) آن بررسی نمی شود.

**مثال :** تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  را در نظر بگیرید. واضح است که دامنه‌ی این تابع  $R - \{0\}$  است. همچنین این

تابع نموداری به شکل زیر دارد.



بنابراین:

الف : تابع در فاصله‌ی  $(-\infty, 0)$  نزولی اکید است.

ب : تابع در فاصله‌ی  $(0, +\infty)$  نزولی اکید است.

ج : تابع در فاصله‌ی  $\{0\} - [-1, 1]$  ، نه صعودی و نه نزولی است.

د : صعودی و نزولی بودن تابع در یک فاصله شامل صفر، مثلاً  $[-1, 1]$  بررسی نمی شود.

**تمرین ۸ :** ثابت کنید تابعی که در دامنه اش صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، تابعی یک به یک است.

**مثال :** تابع  $y = 2^{x+1}$  صعودی اکید و تابع  $y = -3x + 2$  نزولی اکید است لذا یک به یک هستند.

**تذکر:** طبق تعریف توابع یکنوا، برای حالتی که تابع به صورت زوج مرتب یک نمودار آن به صورت نقاط غیر متصل، نمایش داده شده باشد. نیز قابل بررسی است.

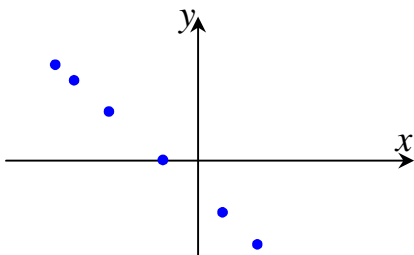
برای مثال:

تابع  $f = \{(1,5), (2,6), (7,9)\}$  یک تابع صعودی اکید است.

تابع  $g = \{(1,5), (2,6), (7,6)\}$  یک تابع صعودی است.

تابع  $h = \{(1,5), (2,6), (4,0)\}$  نه صعودی و نه نزولی است.

تابع زیر یک نیز یک تابع نزولی اکید است.



\*\*\*

### تمرین برای حل:

**۹:** نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این توابع در چه فاصله‌ی صعودی، در

چه فاصله‌ی نزولی و در چه فاصله‌ی ثابت است؟

الف)  $f_1(x) = |x + 2| - 3$

ج)  $f_3(x) = \sqrt{1-x}$

ب)  $f_2(x) = -x^2 - 6x + 10$

د)  $f_4(x) = |1+x| + |1-x|$

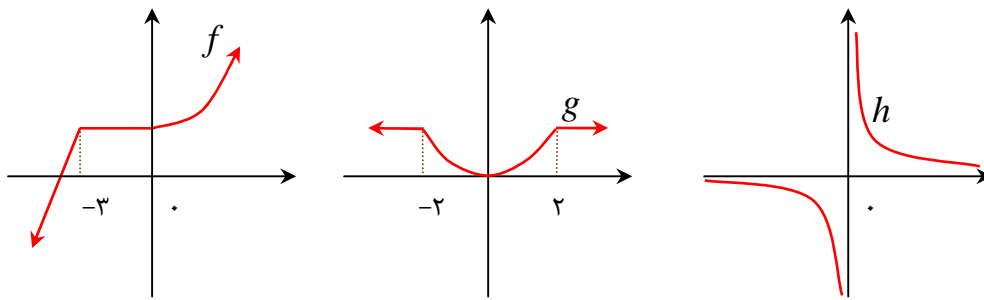
**۱۰:** نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید این تابع در چه فاصله‌ی صعودی و در

چه فاصله‌ی نزولی است و در چه فاصله‌ی ثابت است؟

الف)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ 2 & x < -1 \end{cases}$

ب)  $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$

۱۱: نمودار توابع  $f$  و  $g$  و  $h$  در زیر رسم شده اند.



الف) تابع  $f$  در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع  $g$  در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

ج) تابع  $h$  در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

۱۲: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. تعیین کنید که کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود، اکیداً  
یکنوا است؟

الف)  $f(x) = \sqrt{2-x}$

ب)  $g(x) = 2^{-x}$

ج)  $h(x) = \log_2^x$

۱۳: تابع  $f(x) = (x-2)^3 + 1$  را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع  $f$  را به کمک نمودار تابع  $y = x^3$  رسم کنید.

ب) نشان دهید که  $f$  وارون پذیر است و نمودار  $f^{-1}$  را رسم کنید.

ج) ضابطه‌ی  $f^{-1}$  را به دست آورید.

۱۴: در هر مورد تابعی را بنویسید که شرایط داده شده را دارا باشد و سپس نموداری برای آن رسم کنید.

الف: تابعی که در یک فاصله، هم صعودی و نزولی باشد.

ب: تابعی که در یک فاصله، نه صعودی و نه نزولی باشد.

۱۵:

الف: اگر تابع  $f$  در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟

ب: اگر تابع  $f$  در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

**۱۶:** اگر توابع  $f$  و  $g$  در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع  $f + g$  نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای  $f - g$  می‌توان گفت؟

**۱۷:** تابع  $f = \{(1, 2), (2, m - 1), (3, 7 - m)\}$  صعودی اکید است، حدود  $m$  را بیابید.

**۱۸:**

الف) فرض کنید تابع  $f$  در یک بازه اکیداً صعودی باشد و  $a$  و  $b$  متعلق به این بازه باشند. اگر  $f(a) \leq f(b)$  نشان دهید که  $a \leq b$

ب) اگر  $\log(x + 1) \leq \log(2x - 3)$ ، حدود  $x$  را به دست آورید.

**۱۹:**

الف) فرض کنید تابع  $f$  در یک بازه اکیداً نزولی باشد و  $a$  و  $b$  متعلق به این بازه باشند. اگر  $f(a) \leq f(b)$  نشان دهید که  $a \geq b$

ب) اگر  $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ ، حدود  $x$  را به دست آورید.

**۲۰:** نامعادله‌ی  $\left(\frac{1}{16}\right)^{x+3} \times 4^{-1} < (2^{-3})^{x+1}$  را حل کنید.

**۲۱:** مقادیر  $m$  و  $n$  را چنان بیابید که تابع  $f(x) = (x - 1)^2 + mx^2 - nx + 3$  هم صعودی و هم

نزولی باشد.

\*\*\*

### قسمت سوم : تقسیم چندجمله ای ها و بخش پذیری

در سال های گذشته با تقسیم چندجمله ای ها بر یکدیگر آشنا شده اید. می دانید که برای تقسیم چند جمله

$$\begin{array}{r}
 \text{مقسوم علیه} \\
 A(x) \quad | \quad B(x) \\
 \dots \quad | \quad Q(x) \text{ خارج قسمت} \\
 \hline
 R(x) \text{ باقی مانده}
 \end{array}$$

ای  $A(x)$  را بر چند جمله ای غیر صفر  $B(x)$  که درجه‌ی  $A(x)$  بزرگتر یا مساوی درجه‌ی  $B(x)$  باشد، مراحل زیر به ترتیب را طی می کنیم.

**مرحله‌ی اول :** ابتدا چند جمله ای های مقسوم  $(A(x))$  و مقسوم علیه  $(B(x))$  را استاندارد می کنیم.

**مرحله‌ی دوم :** اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم علیه تقسیم می کنیم ( جملاتی از مقسوم و مقسوم علیه که دارای بزرگترین توانها هستند) و حاصل را به عنوان اولین جمله‌ی خارج قسمت قرار می دهیم.

**مرحله‌ی سوم :** خارج قسمت بدست آمده را در چند جمله ای مقسوم علیه ضرب می کنیم. سپس عبارت بدست آمده را قرینه کرده و در زیر مقسوم یادداشت می کنیم. حاصل جمع این عبارت با مقسوم، اولین باقی مانده را نتیجه می دهد.

**مرحله‌ی چهارم :** مانند مرحله‌ی دوم ، این بار باقی مانده‌ی به دست آمده را بر عبارت مقسوم علیه تقسیم می کنیم.

**توجه :** مراحل فوق را تا زمانی ادامه می دهیم که باقی مانده یا صفر شود و یا درجه‌ی چندجمله ای باقی مانده از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر شود.

**مثال :** تقسیم زیر را انجام دهید.

$$(-3x^2 + 3x^3 + x^5 + 3x - 5) \div (1 + x^2)$$

**حل:** ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را استاندارد کرده و مطابق مراحل فوق عمل می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 5 & x^2 + 1 \\
 \hline
 -x^5 + -x^3 & \\
 \hline
 2x^3 - 3x^2 + 3x - 5 & \\
 -2x^3 + -2x & \\
 \hline
 -3x^2 + x - 5 & \\
 +3x^2 - +3 & \\
 \hline
 x - 2 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l}
 \frac{x^5}{x^2} = x^3 \\
 \frac{x^3}{x^2} = 2x \\
 \frac{-3x^2}{x^2} = -3
 \end{array} \right\}$$

**تمرین ۲۲:** تقسیم‌های زیر را انجام دهید و باقی مانده و خارج قسمت آنها را تعیین کنید.

- ۱)  $(x^2 - 5x - 1) \div (x - 3)$
- ۲)  $(3x^2 + 2x^3 - 4x - 1) \div (x - 1)$
- ۳)  $(x^4 - 5x^2 - 1 + 7x) \div (-2 + x)$
- ۴)  $(x^5 + 1) \div (x^3 + x^2 - 1)$
- ۵)  $(x^3 + x^2y - 2y^3 - xy^2) \div (x + y)$

**تمرین ۲۳:** مقدار  $k$  را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم  $x^3 + kx^2 + 2$  بر  $x - 2$  برابر ۶ شود.

### قضیه‌ی تقسیم

اگر چند جمله‌ای  $A(x)$  را بر چند جمله‌ای غیر صفر  $B(x)$  تقسیم کنیم، در این صورت همواره خواهیم

داشت:

$$\begin{array}{r|l}
 A(x) & B(x) \\
 \dots & Q(x) \\
 \hline
 R(x) & 
 \end{array}$$

$$A(x) = Q(x) \times B(x) + R(x)$$

$$\deg(R(x)) < \deg(B(x))$$

**مثال:** تقسیم زیر را انجام داده و درستی عمل را بررسی کنید.

$$(-x^3 + x^2 + 6x + 1) \div (x + 2)$$

**حل:**

$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 + 6x + 1 \\ +x^3 - 2x^2 \\ \hline 3x^2 + 6x + 1 \\ -3x^2 - 6x \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} x + 2 \\ \hline -x^2 + 3x \end{array}$	$\frac{-x^3}{x} = -x^2$ $\frac{3x^2}{x} = 3x$
---	--	---

رابطه‌ی تقسیم (امتحان درستی عمل تقسیم)

$$(-x^2 + 3x)(x + 2) + 1 = -x^3 - 2x^2 + 3x^2 + 6x + 1 = -x^3 + x^2 + 6x + 1$$

**تمرین ۲۴:** مقدار  $k$  را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم  $x^2 + kx + 1$  بر  $x + 1$  برابر ۵ شود.

\*\*\*

### بخش پذیری در چند جمله ای ها

چند جمله ای  $A(x)$  را بر چند جمله ای  $B(x)$  بخش پذیر گویند، هرگاه باقی مانده‌ی تقسیم  $A(x)$  بر  $B(x)$  صفر شود.<sup>۲</sup> در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r} A(x) \quad | \quad B(x) \\ \dots \quad | \quad Q(x) \\ \hline R(x) \end{array} \quad A(x) = Q(x) \times B(x)$$

**تمرین ۲۵:** نشان دهید که  $3x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 5 + 7x$  بر  $3x + 5$  بخش پذیر است.

**تمرین ۲۶:** نشان دهید که عبارت  $4x^5 - 3x^2 + x - 2$  بر  $x - 1$  بخش پذیر است.

**تمرین ۲۷:** مقدار  $k$  را طوری بیابید که  $4x^2 + kx + 2$  بر  $x + 1$  بخش پذیر شود.

<sup>۲</sup> . چند جمله ای  $B(x)$  را عامل  $A(x)$  نیز می نامند.

### نکات تکمیلی تقسیم

اگر چند جمله‌ای  $P(x)$  را بر  $x - a$  تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r} P(x) \\ \dots \\ \hline R(x) \end{array} \left| \begin{array}{l} x - a \\ Q(x) \end{array} \right. \quad P(x) = Q(x) \times (x - a) + R(x)$$

حال اگر قرار دهیم  $x = a$

$$\Rightarrow P(a) = Q(a) \times \underbrace{(a - a)}_{\cdot} + R(a) \rightarrow P(a) = R(a)$$

یعنی باقی مانده‌ی تقسیم  $P(x)$  بر  $x - a$  برابر  $P(a)$  است.

**تمرین ۲۸:** باقی مانده‌ی تقسیم  $3x^2 - 5x + 4$  بر  $x - 1$  را حساب کنید.

**تمرین ۲۹:** باقی مانده‌ی تقسیم  $2x^8 - 5x^2 + x + 3$  بر  $x + 1$  را حساب کنید.

**تمرین ۳۰:** باقی مانده‌ی تقسیم  $P(x)$  بر  $ax + b$  را حساب کنید. ( $a \neq 0$ )

حل:

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R(x)$$

$$\rightarrow P(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R(x)$$

$$\xrightarrow{x = -\frac{b}{a}} P\left(-\frac{b}{a}\right) = a\left(\underbrace{-\frac{b}{a} + \frac{b}{a}}_{\cdot}\right)Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$\rightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right) = R\left(-\frac{b}{a}\right)$$

یعنی برای تعیین باقی مانده‌ی تقسیم  $P(x)$  بر  $ax + b$  کافی است ریشه‌ی  $ax + b$  را در

عبارت  $P(x)$  جایگزین کنیم.

**نتیجه:** باقی مانده‌ی تقسیم  $P(x)$  بر  $ax + b$  برابر  $P\left(-\frac{b}{a}\right)$  است.

**تمرین ۳۱:** باقی مانده‌ی تقسیم  $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5$  بر  $2x + 3$  را حساب کنید.



### تمرین برای حل :

**۳۲ :** باقی مانده‌ی تقسیم  $3x^2 - 2x - 8$  بر  $x - 2$  را حساب کنید.

**۳۳ :** مقدار  $m$  را طوری بیابید که  $P(x) = x^2 + mx - 2$  بر  $x - 3$  بخش پذیر باشد.

**۳۴ :** نشان دهید که  $P(x) = x^4 - 16$  بر  $x - 2$  بخش پذیر است.

**۳۵ :** باقی مانده‌ی تقسیم  $P(x) = x^3 + x - 2$  بر  $2x + 1$  را حساب کنید.

**۳۶ :** مقدار  $k$  را چنان بیابید که چندجمله‌ای  $2 - 4x + 3x^2 - x^3 + kx^3$  در تقسیم بر  $x + 1$  هم باقی مانده شوند.

**۳۷ :** مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای  $1 + bx + ax^2 + x^3$  بر  $x - 2$  و  $x + 1$  بخش پذیر باشد.

\*\*\*

### تعیین باقی مانده و خارج قسمت به روش هورنر

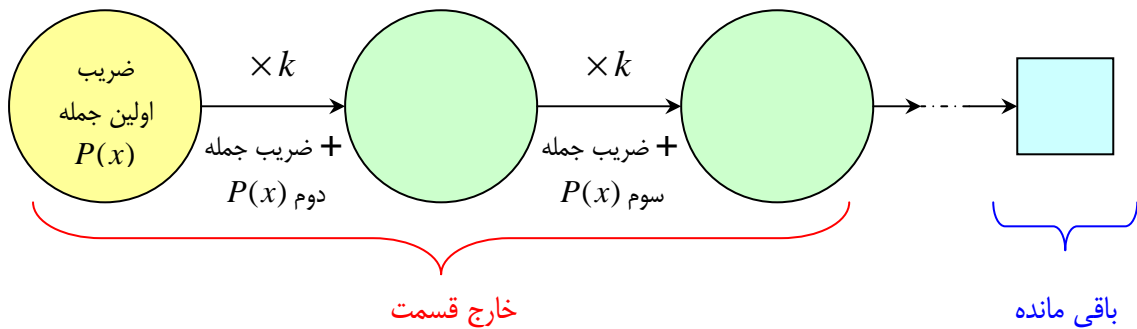
در حل بسیاری از مسائل ناگزیر هستیم که از تقسیم چندجمله‌ای بر چند جمله‌ای استفاده کنیم و باقی مانده و خارج قسمت تقسیم را تعیین کنیم. هورنر برای تعیین باقی مانده و خارج قسمت، تقسیم چندجمله‌ای بر چند جمله‌ای روش جالبی معرفی کرده است که نسبت به روش معمول قدری کوتاه تر است.

در اینجا تقسیم چند جمله‌ی درجه‌ی  $n$  به صورت  $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots$  بر دو جمله‌ی درجه‌ی اول  $x - k$  را توضیح می دهیم.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{مقسوم علیه} & \\
 \hline
 & \text{خارج قسمت} \\
 \hline
 & \\
 & \\
 & \\
 \hline
 & \text{باقی مانده}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 P(x) & x - k \\
 \hline
 & Q(x) \\
 & \\
 & \\
 & \\
 \hline
 & R
 \end{array}$$

در روش هورنر ابتدا باید مقسوم و مقسوم علیه را به صورت استاندارد<sup>۳</sup> بنویسیم و سپس نموداری مطابق نمودار زیر تنظیم کنیم.



**توجه :**

۱: عدد  $k$  همان ریشه‌ی مقسوم علیه است. (ریشه‌ی  $x - k$ )

۲: قبل از نوشتن ضرایب ها، در نمودار فوق، ضریب جمله یا جملاتی که وجود ندارند، برابر صفر قرار می دهیم.

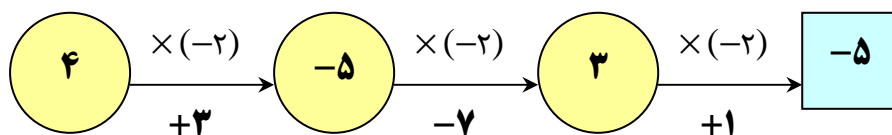
۳: اعداد داخل دایره ها، ضرایب جملات خارج قسمت می باشند که از درجه‌ی  $n - 1$  است.

۴: عدد آخر داخل مربع، باقی مانده است.

**مثال :** باقی مانده و خارج قسمت تقسیم  $4x^3 + 3x^2 - 7x + 1$  بر  $x + 2$  را تعیین کنید.

حل :

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$



خارج قسمت  $Q(x) = 4x^2 - 5x + 3$

باقی مانده  $R = -5$

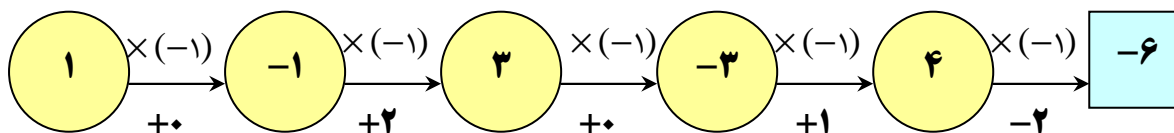
**مثال :** باقی مانده و خارج قسمت تقسیم  $x^5 + 2x^3 + x - 2$  بر  $x + 1$  را تعیین کنید.

حل :

$$x^5 + 0 \cdot x^4 + 2x^3 + 0 \cdot x^2 + x - 2$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

<sup>3</sup> مرتب کردن جملات بر حسب توان های نزولی متغیر  $x$



خارج قسمت  $Q(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x + 4$

باقی مانده  $R = -6$

### تمرین برای حل:

۳۸: به روش هورنر، باقی مانده و خارج قسمت تقسیم عبارت  $P(x)$  را بر  $x - 2$  به دست آورید.

الف)  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

ب)  $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$

ج)  $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2$

۳۹: به روش هورنر نشان دهید که عبارت  $t^4 + 2t^3 - t^2 + 1$  بر  $t + 1$  بخش پذیر است.

\*\*\*

### قسمت چهارم: معرفی چند اتحاد دیگر

در این جا در پی آن هستیم که چند اتحاد مفید دیگر را ارائه کنیم. در سال های قبل به یاد دارید که:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

اکنون می خواهیم این اتحاد ها را تعمیم دهیم. برای این کار تمرین زیر را انجام دهید.

تمرین ۴۰: از تقسیم  $x^4 - a^4$  بر  $x - a$  نشان دهید که

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$$

نتیجه: برای هر عدد طبیعی  $n$  عبارت  $x^n - y^n$  بر  $x - y$  بخش پذیر است. همچنین:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

تمرین ۴۱: عبارت های زیر را تجزیه کنید.

الف)  $x^5 - 1$

ب)  $x^6 - 64$

**تمرین ۴۲:** اگر  $n$  فرد باشد، به کمک فوق اتحاد ثابت کنید که :

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

**حل:** اگر در تساوی داده شده، مقدار  $y$  را به  $-y$  تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$x^n - (-y)^n = (x - (-y))(x^{n-1} + x^{n-2}(-y) + \dots + x(-y)^{n-2} + (-y)^{n-1})$$

از طرفی چون  $n$  فرد است لذا،  $n-1$  زوج می باشد و .... پس :

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

**تمرین ۴۳:** عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^y + 128$$

**حل:**

$$A = x^y + 128 = x^y + 2^y$$

$$= (x + 2)(x^6 - x^5(2) + x^4(2)^2 - x^3(2)^3 + x^2(2)^4 - x(2)^5 + (2)^6)$$

$$= (x + 2)(x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64)$$

**تمرین ۴۴:** اگر  $n$  زوج باشد، به کمک فوق اتحاد ثابت کنید که :

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

**حل:** اگر در تساوی داده شده، مقدار  $y$  را به  $-y$  تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$x^n - (-y)^n = (x - (-y))(x^{n-1} + x^{n-2}(-y) + \dots + x(-y)^{n-2} + (-y)^{n-1})$$

از طرفی چون  $n$  زوج است لذا،  $n-1$  فرد می باشد و .... پس :

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

**تمرین ۴۵:** عبارت زیر را طوری تجزیه کنید که  $x + 2$  یک عامل آن باشد.

$$A = x^4 - 16$$

**توجه:** اگر  $a$  یک عدد حقیقی و  $n$  یک عدد طبیعی باشد. به کمک اتحادهای فوق داریم:

الف:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + a^{n-4} + \dots + a^2 + a + 1)$$

مثال:

$$x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

ب: در حالتی که  $n$  فرد باشد.

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + a^{n-3} - a^{n-4} + \dots + a^2 - a + 1)$$

مثال:

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

مثال: عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^7 - x^3$$

حل:

$$A = x^7 - x^3 = x^3(x^4 - 1) = x^3(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

تمرین برای حل:

۴۶: عبارت  $x^6 - 1$  را طوری تجزیه کنید که  $x - 1$  یک عامل آن باشد.

۴۷: عبارت  $x^6 - 1$  را طوری تجزیه کنید که  $x + 1$  یک عامل آن باشد.

۴۸: عبارت  $x^5 + ۳۲$  را طوری تجزیه کنید که  $x + ۲$  یک عامل آن باشد.

۴۹: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱)  $x^5 - y^5 =$

۳)  $1 - x^6 =$

۲)  $x^4 - y^4 =$

۴)  $x^5 - ۳۲y^5 =$

\*\*\*

**تهیه کننده: جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی**

**@amerimath**

**کانال تلگرامی:**

**www.mathtower.ir**

**سایت:**