

فصل ۲: گراف و مدل سازی

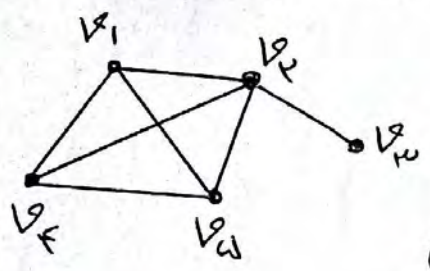
تعریف گراف:

گراف از تعدادی نقطه که به آنها رأس و تعدادی خط یا منحنی که به آنها یال می گوئیم تشکیل شده است.

گراف ساده:

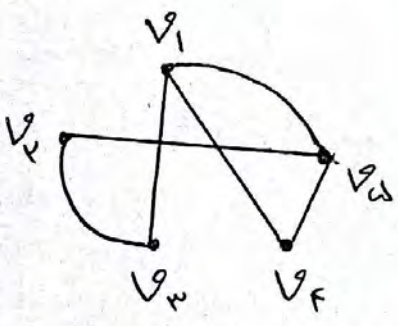
گراف ساده تشکیل شده از یک مجموعه منتهی و غیر تهی از نقاط مانند V (مجموعه رئوس) و یک مجموعه منتهی از خط یا منحنی مانند E (مجموعه یالها) که مجموعه E زیر مجموعه ای از تمام زیر مجموعه های دو عضوی V است.

گراف G با مجموعه رئوس V و مجموعه یالهای E را بصورت $G(V, E)$ نشان می دهند.



$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

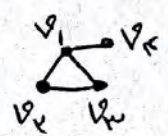
$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_2v_5\}$$



$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

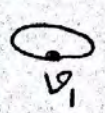
$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$$

تذکره ۴:



(۱) در گراف ساده بین هر دو رأس حداکثر یک یال وجود دارد.

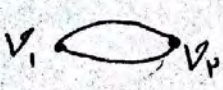
(۲) یال v_1v_2 با یال v_2v_1 فرق ندارد و یکی هستند



(۳) یال بین یک رأس و همان رأس را طوقه یا حلقه می نامند

گراف ساده طوقه ندارد.

(۴) ممکن است بین دو رأس چند تا یال باشد



$v_1v_2 = 2$ یال چندگانه

که آنها را یال چندگانه می نامند.

گراف ساده یا چندگانه ندارد



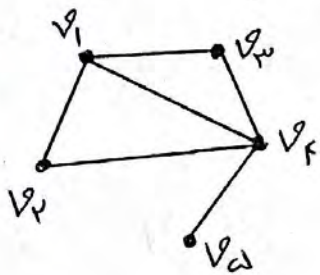
یا یالی که روی آن جهت باشد یا جهت دار نامیده می شود
گراف ساده یا جهت دار ندارد.

$$v_1 v_2 = (v_1, v_2)$$

نتیجه: گراف ساده، گرافی است که بین هر دو رأس آن حداکثر یک یال وجود داشته و یال طوقه، یال چندگانه و یال جهت دار ندارد.

تعریف مرتبه و اندازه گراف:

به تعداد رأس های گراف G ، مرتبه گراف گفته می شود که آن را با $P(G)$ یا ساده تر با P نشان می دهیم همچنین به تعداد یالهای گراف G ، اندازه گراف گفته می شود که آن را با $q(G)$ یا ساده تر با q نشان می دهیم.

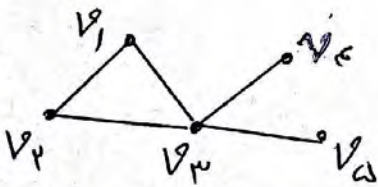


$$P(G) = P = 5 = \text{تعداد رأس ها} = \text{مرتبه}$$

$$q(G) = q = 4 = \text{تعداد یالها} = \text{اندازه}$$

درجه یک رأس:

درجه رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال های از گراف G که به رأس v متصل اند و آن را با $deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می دهیم. اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر درجه یک رأس زوج باشد آن را رأس زوج می نامند.



$$d(v_1) = 2$$

$$d(v_2) = 2$$

$$d(v_3) = 4$$

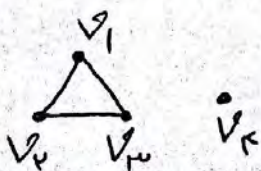
$$d(v_4) = 1$$

$$d(v_5) = 1$$

رأس تنها (انزوله):

به رأسی که درجه آن صفر باشد یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد

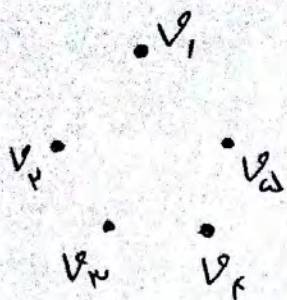
رأس تنها (انزوله) می گوئیم.



$$v_4 = \text{رأس تنها (انزوله)}$$

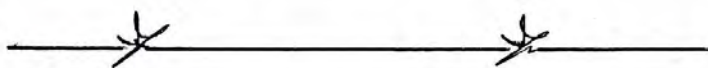
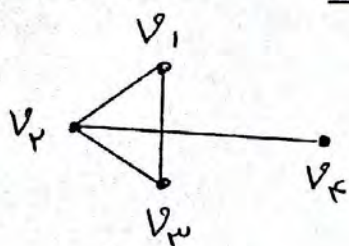
گراف تهی :

گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند یعنی هیچ یالی نداشته باشند، گراف تهی نامیده می‌شود.
بنابراین منظور از گراف تهی n رأسی، گرافی شامل n رأس تنها و بدون یال است.

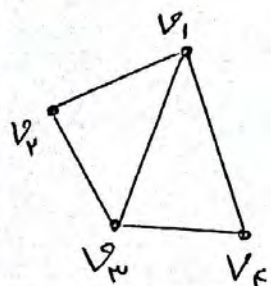


مثال ۱: نمودار گراف $G(V, E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

و $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$ را رسم کنید



مثال ۲: در گراف مقابل، مجموعه رأس‌ها، مجموعه یال‌ها، مرتبه، اندازه و درجه رأس‌ها را مشخص کنید.

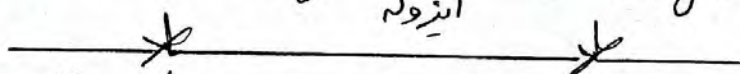


$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \Rightarrow P = 5$$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\} \Rightarrow q = 5$$

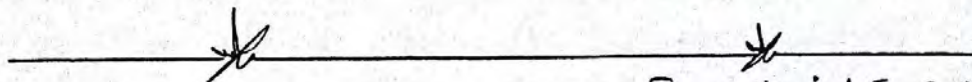
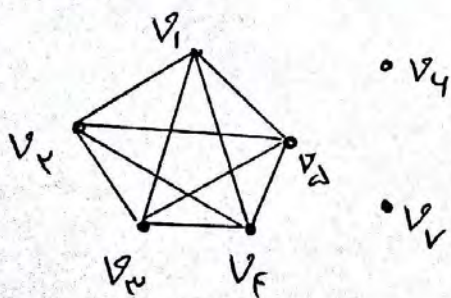
$$\deg(v_1) = 4 \text{ (زوج)}, \deg(v_2) = 2 \text{ (زوج)}, \deg(v_3) = 3 \text{ (فرد)}$$

$$\deg(v_4) = 2 \text{ (زوج)}, \deg(v_5) = 0 \text{ (انزوله)}, \deg(v_4) = 0 \text{ (انزوله)}$$

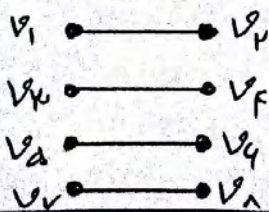


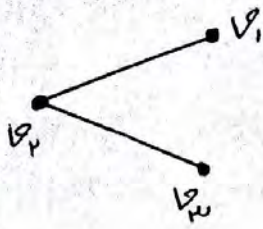
مثال ۳: گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۱۰ را رسم کنید که دو رأس انزوله داشته باشد.

$$P = 7 \text{ و } q = 10$$

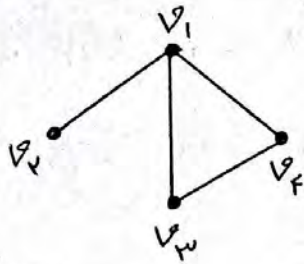


مثال ۴: گرافی از مرتبه ۸ با حداقل یال و چنانکه رسم کنید که رأس تنها نداشته باشد.





تعریف: دو رأس مجاور (همسایه) :
 دو رأسی که توسط یال به هم وصل شده باشند
 را ، دو رأس مجاور (همسایه) می‌گویند. در شکل
 مقابل رأس‌های v_1 و v_2 مجاورند یا v_1 و v_3
 مجاورند ولی v_2 و v_3 مجاور (همسایه) نیستند.



مجموعه همسایه‌های یک رأس :
 مجموعه همه رأس‌هایی در تراف G که با
 رأس v مجاورند را مجموعه همسایه‌های
 رأس v می‌نامند. آن مجموعه همسایه‌ها
 بمقابل v باشد آنرا با علامت $N_G[v]$ و آن شامل v نباشد را با
 علامت $N_G(v)$ نشان می‌دهند. در ترافت فوق :

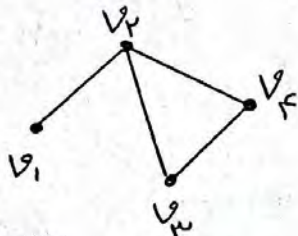
$$N_G[v_1] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$$

$$N_G(v_2) = \{v_1\}$$

$$N_G(v_3) = \{v_1, v_4\}$$

$$N_G(v_4) = \{v_1, v_3\}$$



دو یال مجاوره
 دو یال را مجاور می‌گوئیم ، هرگاه رأسی وجود
 داشته باشد که هر دو یال به آن وصل باشند
 در ترافت مقابل یال‌های v_1, v_2 و v_3, v_4 مجاورند (هر دو به v_2 وصل‌اند)
 ولی یال‌های v_1, v_3 و v_2, v_4 مجاور نیستند.

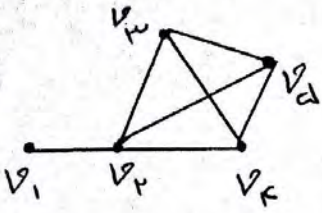
بزرگترین و کوچکترین درجه ترافت :

بزرگترین درجه در بین درجه رأسی ترافت را $\Delta(G)$

درجه گفته و آنرا با نماد $\Delta(G)$ یا ساده تر Δ (دلتای بزرگ) نمایش

می‌دهیم و کوچکترین درجه در بین درجه رأسی ترافت را

مینیمم درجه گفته و آن را با نماد $\delta(G)$ یا δ (دلتای گویا) نشان می‌دهیم.



$$\deg(v_1) = 1$$

$$\deg(v_2) = 4$$

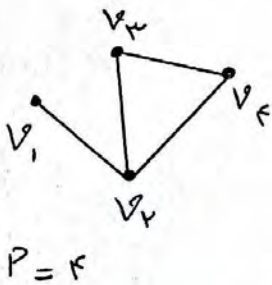
$$\deg(v_3) = \deg(v_4) = 3$$

$$\delta = 1 \quad \Delta = 4$$

ممکن است یک گراف چند رأس از درجه ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد

تذکر مهم:

۱) در هر گراف، رأسی که به همه رأس‌های دیگر وصل باشد را، رأس



فعلی گوییم پس: $\deg(\text{رأس فعل}) = P - 1$
 (P = مرتبه گراف = تعداد رأس‌ها)

$$\text{رأس فعل} = v_2 \Rightarrow \deg(v_2) = 3 = 4 - 1 = P - 1$$

۲) چون بیشترین درجه رأس در یک گراف P رأسی وقتی درست می‌آید

که آن رأس به همه $(P-1)$ رأس دیگر وصل شود پس: $\Delta \leq P-1$

مثلاً اگر گراف از مرتبه ۵ (۵ رأسی) باشد در این صورت: $\Delta \leq 4$

۳) اگر در یک گراف از مرتبه P (P رأسی)، k رأس فول (از درجه $P-1$) داشته

باشیم در این صورت: $\delta \geq k$

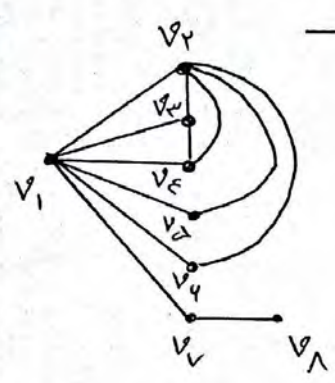
مثال ۱: نشان دهید گرافی وجود ندارد که درجه‌های آن ۲، ۲ و ۳ و ۴ و ۴ باشد.

حل: $P=5$ پس باید $\Delta \leq 4$ در صورتی که ماکزیمم درجه ۵ است پس چنین گرافی وجود ندارد.

ریاضیات گسسته

مثال ۲: نشان دهید گرافی با درجه‌های ۲ و ۳ و ۴ و ۴ و ۴ وجود ندارد.

حک: $P=7$ است پس سه رأس فول یعنی از درجه $P-1=4$ داریم در نتیجه $K=3$ است و باید $K \geq 3$ باشد در حالی که $K=2$ است پس چنین گرافی وجود ندارد.

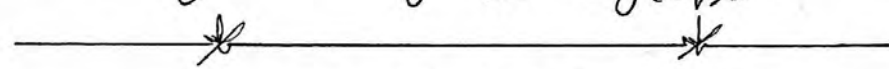


مثال ۳: گرافی رسم کنید که درجه رأس‌ها بصورت ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۴ باشد.

$deg(v_1)=4 \quad deg(v_2)=1$

$deg(v_3)=deg(v_4)=deg(v_5)=3$

$deg(v_6)=deg(v_7)=deg(v_8)=2 \quad deg(v_9)=1$



ارتباط درجه‌ها با تعداد یالها در گراف:

قضیه: اگر G یک گراف با مرتبه P و اندازه q و $V=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشد در این صورت مجموعه درجات رئوس با دو برابر تعداد یالها برابر است یعنی:

$$\sum_{i=1}^P deg v_i = deg v_1 + deg v_2 + \dots + deg v_p = 2q$$

$P =$ تعداد رأس‌ها
 $q =$ تعداد یالها

اثبات: گراف G با مجموعه رأس‌های $V=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ را در نظر می‌گیریم. یکی یکی یالهای گراف را اضافه می‌کنیم. با اضافه کردن یال اول دو رأس درجه یک بدست می‌آید (درجه بقیه فعلاً صفر است) پس مجموع درجه‌ها برابر ۲ است. یال دیگری اضافه می‌کنیم مجموع درجه‌ها برابر ۴ می‌شود با اضافه کردن هر یال، به مجموع درجه‌ها، دو واحد اضافه می‌شود پس مجموع درجه‌ها دو برابر تعداد یالها می‌شود.

(هماهنگ - دیماه ۹۷) :

ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است (انتهی)

اثبات: فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رؤس فرد گراف G و B مجموعه همه رؤس زوج گراف G باشد در این صورت :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$

از طرفی می دانیم که مجموع درجات رؤس گراف G عددی زوج است

یعنی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ زوج است از طرفی $\sum_{v \in B} \deg(v)$ نیز زوج است بنابراین

تفاضل آنها نیز زوج است بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ زوج است و نتیجه می شود که $n(A)$ عددی زوج است.

مثال ۱) در یک گراف از مرتبه ۱۰ و اندازه ۳۳، $\Delta = 7$ و $\delta = 4$ است تعداد رأس های درجه ۷ و ۴ را بدست آورید.

گراف فقط رأس هایی از درجه $\Delta = 7$ و $\delta = 4$ دارد
 $P = 10$, $q = 33$

جمع رأس های درجه ۴ $\Rightarrow x =$ تعداد رأس های درجه ۴

جمع رأس های درجه ۷ $\Rightarrow y =$ تعداد رأس های درجه ۷

$$\begin{cases} x + y = P = 10 \\ 4x + 7y = 2q = 2(33) = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 4x + 7y = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

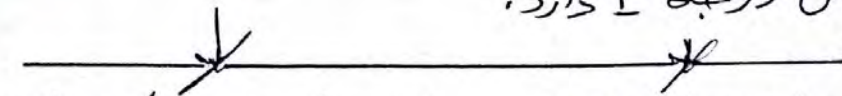
پس گراف ۴ رأس درجه ۴ و ۴ رأس از درجه ۷ دارد.

مثال ۲) گرافی از مرتبه ۸ و اندازه ۱۴، دو رأس از درجه ۵ $\Delta = 5$ ، یک رأس از درجه ۲ و یک رأس از درجه ۱ $\delta = 1$ دارد این گراف چند رأس درجه ۳ دارد؟

$P = 8$ و $q = 14$
 ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ و ۴ و ۴ و ۵ و ۵ : درجه ها
 $\sum_{v \in A} \deg(v) = 2x$ $\sum_{v \in B} \deg(v) = 2y$

تعداد راس ها = $2 + x + y + 1 + 1 = P = 8 \Rightarrow x + y = 4$
 مجموع درجه ها = $4 + 4 + 4x + 3y + 2 + 1 = 2q = 2(14) = 28 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 4x + 3y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

پس یک راس درجه ۳ دارد.

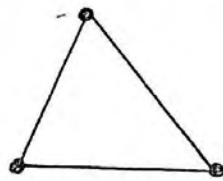


گراف اویلری (لئونارد اویلر - ریاضیدان سوئیسی):

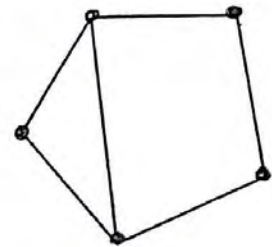
یک گراف ساده یا چندگانه را اویلری می‌گویند هرگاه بتوان از یک رأس حرکت کرد و هر یال را یکبار پیچود و به رأس اولیه بازگشت.



اوایلری است



اوایلری است

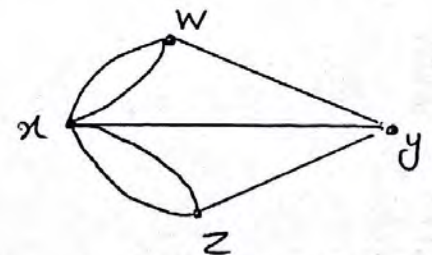
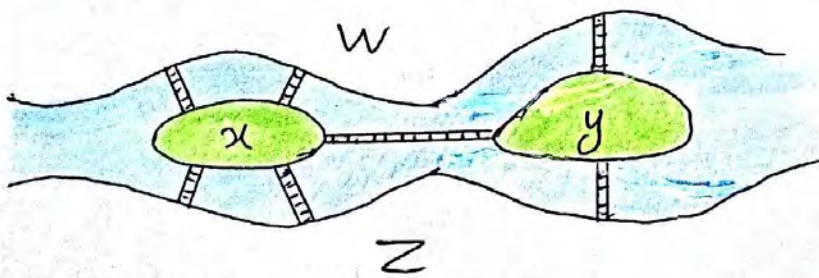


اوایلری نیست



مسئله تاریخی:

شهر کو نیلسبرگ (در روسیه) از چهار ناحیه x و y و z و w که توسط هفت پل روی رودخانه (در قرن ۱۸ میلادی) به یکدیگر متصل شده بودند، تشکیل شده است. مردم شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها به نقطه شروع حرکت بازگشت یا نه؟ اویلر ثابت کرد این کار امکان پذیر نیست.



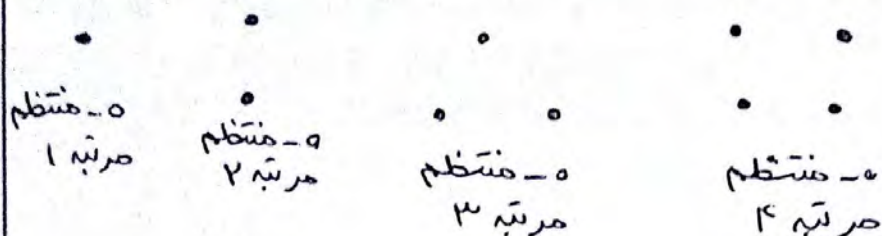
(گراف ناحیه‌ها و پل‌ها)

گراف ساده نیست چون بین دو راس w و x بیش از یک یال وجود دارد. چون در هر راس باید از یک یال وارد و از یک یال دخیار خارج شویم آنرا این کار امکان پذیر باشد باید درجه همه راس‌ها زوج باشد درجه y زوج نیست پس این کار امکان ندارد.

گراف‌های منتظم:

گراف G از مرتبه P را r -منتظم می‌نامند هرگاه درجه هر رأس گراف G برابر r باشد ($0 < r \leq P-1$)

گراف‌های ۰-منتظم



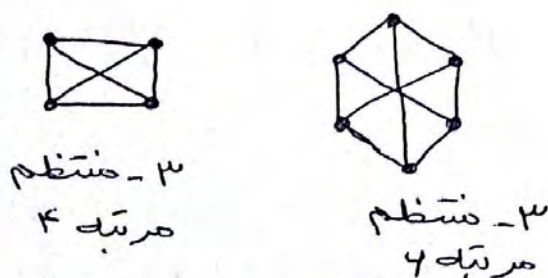
گراف‌های ۱-منتظم



گراف‌های ۲-منتظم



گراف‌های ۳-منتظم



قضیه درجه‌ها در گراف منتظم:

در هر گراف r -منتظم با P رأس داریم: $P r = 2q$

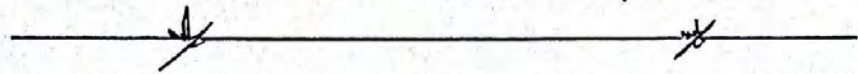
اثبات: می‌دانیم در هر گراف از مرتبه P (تعداد رأس) و اندازه (تعداد یالها) q مجموع درجه‌ها برابر $2q$ است.

$$r + r + r + \dots + r = 2q \Rightarrow P r = 2q$$

تذکره: طبق قضیه بالا $P r$ عددی زوج است پس P و r نمی‌توانند هر دو فرد باشند

یعنی گراف فرد - منتظم مرتبه فرد ندارد

مثال گراف ۳ - منتظم مرتبه ۱ وجود ندارد.



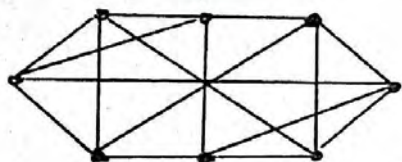
مثال ۱) در یک گراف ۴ - منتظم داریم: $q = 3p - 1$ ، مرتبه و اندازه

گراف را بدست آورده و گراف را رسم کنید.

$r = 4$

$Pr = 2q \Rightarrow P \times 4 = 2q \Rightarrow 2P = q$

$q = 3P - 1 \Rightarrow 2P = 3P - 1 \Rightarrow \boxed{P = 1} \Rightarrow \boxed{q = 14}$



بسیار گراف ۴ - منتظم مرتبه ۱ می باشد.



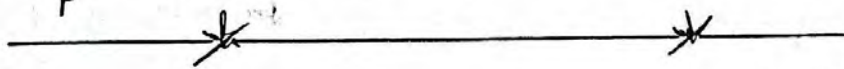
مثال ۲) با حذف ۱۶ یال از یک گراف ۷ - منتظم ، گرافی ۳ - منتظم به

وجود آمده است . مرتبه گراف را بدست آورید .

گراف ۷ - منتظم: $7P = 2q \Rightarrow q = \frac{7P}{2}$

گراف ۳ منتظم: $3P = 2q \Rightarrow q = \frac{3P}{2}$

$\frac{7P}{2} - 14 = \frac{3P}{2} \Rightarrow 7P - 32 = 3P \Rightarrow 4P = 32 \Rightarrow \boxed{P = 8}$



گراف های کامل:

گراف K_n از مرتبه n را گراف کامل می گویند هرگاه درجه هر رأس آن

$(n-1)$ باشد . به عبارت دیگر هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد

گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می دهیم .

تذکره مهم:

۱) K_n یک گراف n رأسی و $n-1$ - منتظم است .

۲) یک گراف کامل n رأسی به تعداد $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!}$ یال دارد .

ریاضیات گسسته

ص ۵۷

(۳) گراف کامل از مرتبه P را با K_P نیز نمایش می‌دهند

$(K_n = K_p)$

ساختار گراف‌های کامل تا مرتبه ۵ :

مرتبه (رأس) $n=p$	۱	۲	۳	۴	۵
نمودار					
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
اندازه (یالها) q	۰	۱	۳	۶	۱۰

درجه‌ها و تعداد یالهای گراف کامل :

درجه هر رأس در K_P برابر $P-1$ است، چون هر رأس به همه $P-1$ رأس‌های دیگر وصل است پس گراف کامل $(P-1)$ -منتظم است. به عنوان مثال K_5 همان گراف 4 -منتظم است و اما تعداد یالها :

$$P(P-1) = 2q \Rightarrow \underbrace{(P-1) + (P-1) + \dots + (P-1)}_{\text{تا } P} = 2q \Rightarrow P(P-1) = 2q$$

$$\Rightarrow q = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow \boxed{q(K_P) = \frac{P(P-1)}{2}}$$

فرمول تعداد یالهای گراف کامل P رأسی

(مثال)

تعداد یالهای گراف K_5 تا $q(K_5) = \frac{5(5-1)}{2} = 10$

تعداد یالهای گراف K_7 تا $q(K_7) = \frac{7(7-1)}{2} = 21$

مثال ۱) حاصلضرب مرتبه در اندازه یک گراف کامل برابر 9_0 می‌باشد. این گراف چند منتظم است؟

$P =$ مرتبه
 $q =$ اندازه

$$P \cdot q = 9_0 \Rightarrow P \times \frac{P(P-1)}{2} = 9_0 \Rightarrow P \times P \times (P-1) = 180 = 4 \times 4 \times 5$$

$\Rightarrow \boxed{P=4} \Rightarrow$ گراف K_4 است \Rightarrow گراف 3 -منتظم است

مثال ۲) باکم کردن ۳۳ یال از یک گراف کامل، گراف ۴- منتظم برست می آید. مرتبه گراف کامل را برست آورید.

$$4P = 2q \Rightarrow q = 2P$$

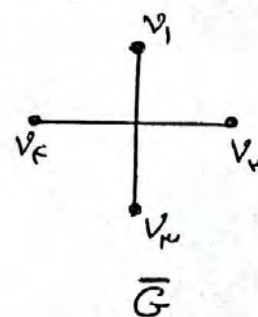
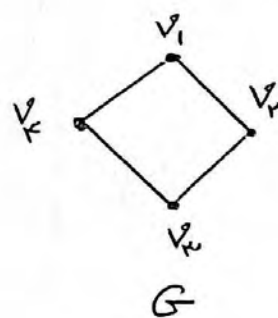
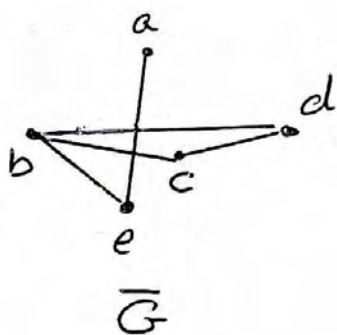
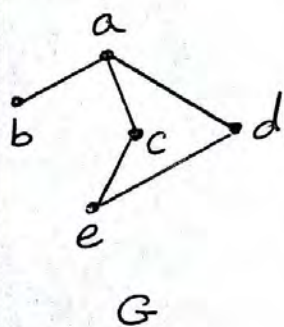
$$q = \frac{P(P-1)}{2}$$

$$\frac{P(P-1)}{2} - 33 = 2P \xrightarrow{\times 2} P^2 - P - 44 = 4P \Rightarrow P^2 - 5P - 44 = 0$$

$$\Rightarrow (P-11)(P+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P=11 & \text{وق} \\ P=-4 & \text{غ} \end{cases} \Rightarrow \text{گراف مورد نظر} = K_{11}$$

مکمل گراف:

مکمل گرافی مانند G که آن را با \bar{G} (یا G^c) نمایش می دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف G است و بین دو رأس از G یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد.



تذکر مهم:

۱) اگر تعداد یالهای گرافهای G و \bar{G} را با هم جمع کنیم، برابر تعداد یالهای گراف کامل K_P می شود یعنی:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2}$$

۲) درجه یک رأس در گراف G را اگر با درجه همان رأس در \bar{G} جمع کنیم درجه آن رأس در گراف کامل می شود یعنی:

$$\text{deg}_G(v) + \text{deg}_{\bar{G}}(v) = P-1$$

۳) مکمل گراف r - منتظم، گرافی \bar{r} - منتظم است و $r + \bar{r} = P-1$

۴) مکمل گراف کامل، گراف \emptyset است چون در گراف کامل تمام یالها رسم شده است.

مثال) تعداد یالهای گراف G با تعداد یالهای گراف \bar{G} برابر است. مرتبه گراف در تقسیم بر ۴ چه باقیمانده ای دارد؟

$$q(G) = q(\bar{G})$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 2q(G) = \frac{P(P-1)}{2}$$

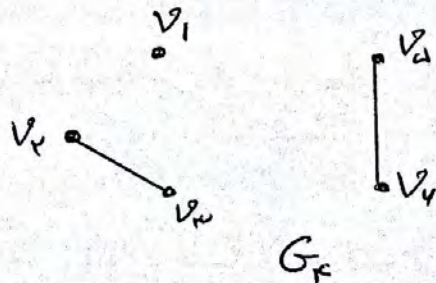
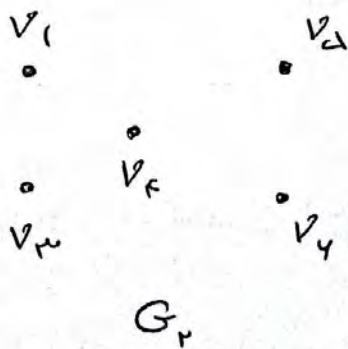
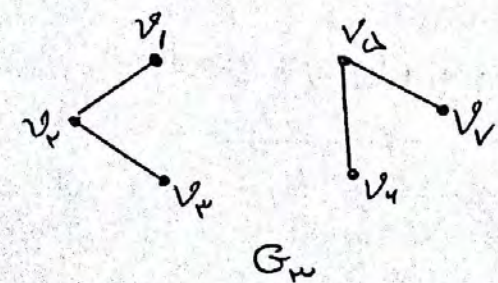
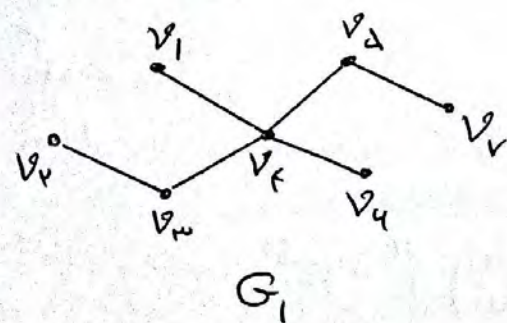
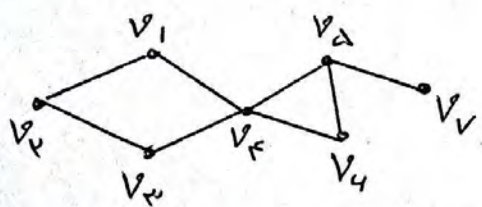
$$\Rightarrow q(G) = \frac{P(P-1)}{4}$$

q باید عددی صحیح باشد یعنی $4 | P(P-1)$ می دانیم هر عدد صحیح مانند P به یکی از صورتهای $4k$ و $4k+1$ یا $4k+2$ یا $4k+3$ است اگر $P=4k$ یا $P=4k+1$ باشد $P(P-1)$ مضرب ۴ می شود پس مرتبه یا بر ۴ بخش پذیر است یا اینکه با بقیمانده ای برابر ۱ در تقسیم بر ۴ دارد.

زیرگراف:

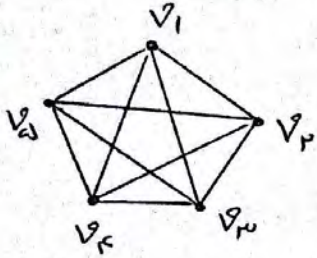
یک زیرگراف از گراف G ، گرافی است که مجموعه رئوس آن زیر مجموعه ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یالهای آن زیر مجموعه ای از مجموعه یالهای G باشد.

مثال: ۴ زیرگراف از گراف مقابل را رسم کنید.

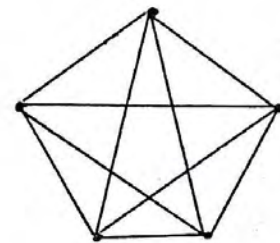
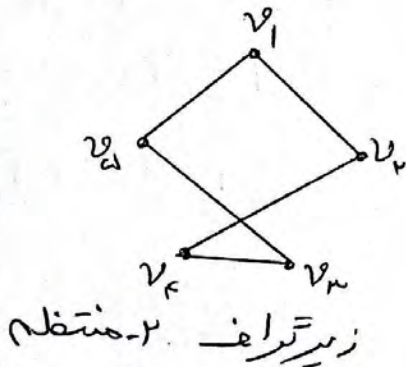
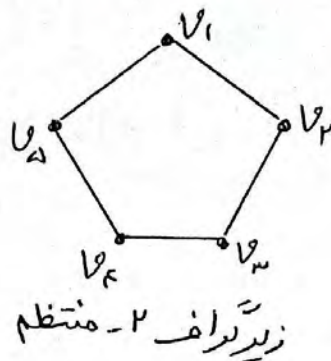
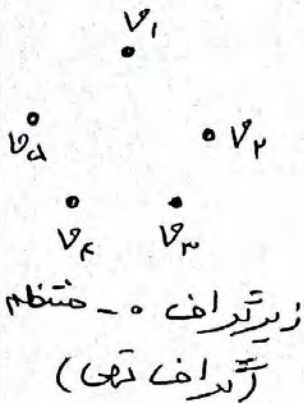


تذکره ۴۴: هر گراف، زیرگراف خودش است.

مثال ۲: پنج زیرگراف از گراف K_5 با رأس های $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ رسم کنید.



حل: گراف K_5 بصورت مقابل است اگر قرار باشد زیرگراف K_4 و K_3 منتظم باشد K_2 نمی تواند فرد باشد (فرد منتظم مرتبه فرد نداریم) پس:



زیرگراف ۴ - منتظم که خودگراف است

نکته ریاضی:

تعداد زیرگراف های کامل در گراف کامل K_p برابر است با: $2^p - 1$

اثبات: می دانیم: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ = تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی

تعداد زیرگراف های کامل در K_p = $\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{p} = 2^p - 1$

مثال) گراف K_4 چند زیرگراف کامل دارد؟

تا $4^3 - 1 = 4^4 - 1 = 2^4 - 1$ = جواب

تقریب ۱: گراف G از مرتبه ۱۲ و اندازه ۱۰ است. اگر $\deg_G(v) = ۳$ باشد
 $q(G)$ و $\deg_{\bar{G}}(v)$ را بدست آورید.

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 10 + q(\bar{G}) = \frac{12 \times 11}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = ۵۶$$

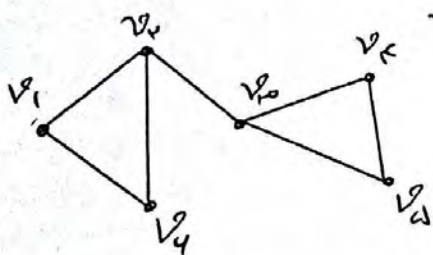
$$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = P-1 \Rightarrow 3 + \deg_{\bar{G}}(v) = 12-1 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(v) = ۸$$

تقریب ۲: مکمل گرافی از مرتبه P که $(2P-1)$ - منتظم است، گرافی
 ۲- منتظم است. P را بدست آورید.

$$r = 2P - 1$$

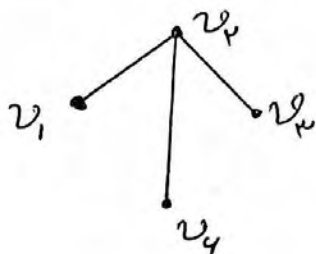
$$r' = 2$$

$$r + r' = P - 1 \Rightarrow 2P - 1 + 2 = P - 1 \Rightarrow \boxed{P = 4}$$

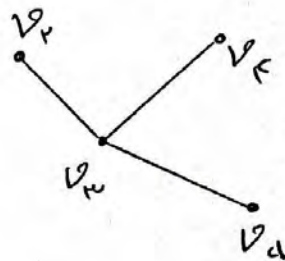


تقریب ۳: گراف G بصورت مقابل است.

الف) زیر گرافی ۴ راسی از اندازه ۳ رسم کنید



یا



ب) G چند زیر گراف دارد که دوراس از درجه ۳ داشته باشد.

حل: مطابق شکل بالا: v_2 و v_3 باید باشند. یا v_1, v_4 می تواند باشد یا
 نباشد (حالت ۲) یا v_4, v_5 هم می تواند باشد یا نباشد (حالت ۱) پس
 طبق اصل ضرب $2 \times 2 = 4$ زیر گراف با دوراس از درجه ۳ می توانیم داشته باشیم

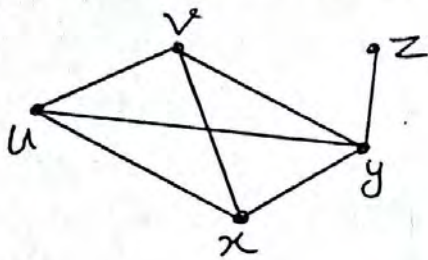
تکته ریاضی:

گراف G از مرتبه P و اندازه q است تعداد زیر گراف های هم مرتبه با G
 برابر است با: 2^q

مثال: گراف تقریب ۳ در بالا از اندازه $q=7$ است چند زیر گراف هم مرتبه
 با خودش دارد؟
 تا $2^7 = 2^7 = 128 =$ جواب

مسیر در گراف :

فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند. یک مسیر از u به v (که به آن $u-v$ مسیر می‌گوییم) در G دنباله‌ای متشکل از رأس‌های دو به دو همسایر در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود بطوریکه هر دو رأس متوالی در این مسیر مجاور هستند. طول مسیر همان تعداد یال‌های طی شده است که یکی کمتر از تعداد رأس‌ها است. (مثال)



$u-v$ یک $u-v$ مسیر به طول ۱

$u-x-v$ یک $u-v$ مسیر به طول ۲

$u-x-y-v$ یک $u-v$ مسیر به طول ۳

$u-x-y-z$ یک $u-z$ مسیر به طول ۴

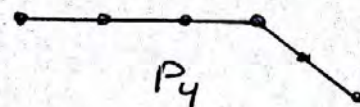
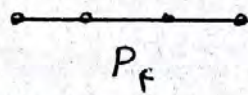
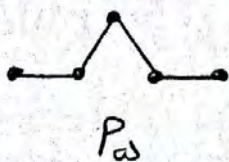
تذکره مهم :

- ۱) هر رأس به تنهایی، یک مسیر به طول صفر از خودش به خودش است
- ۲) تعداد مسیرهای به طول صفر برابر تعداد رأس‌ها (مرتبه گراف) است
- ۳) تعداد مسیرهای به طول ۱ همان تعداد یال‌های گراف (اندازه گراف) است
- ۴) جهت حرکت در مسیر مهم نبوده و فقط یال‌های طی شده مهم است. در مثال بالا مسیر $u-x-y-v$ با مسیر $v-y-x-u$ فرقی ندارد و یک مسیر است.



تعریف مسیر n رأسی :

گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد را مسیر n رأسی گفته و با P_n نمایش می‌دهیم (مثال)

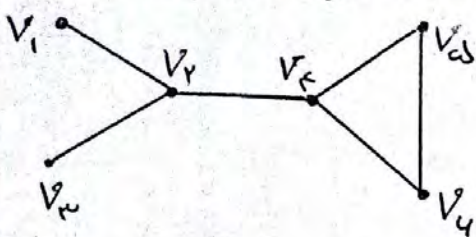


تذکره مهم :

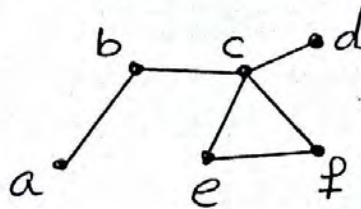
طول مسیر P_n برابر $n-1$ است (تعداد رأس‌ها یک واحد بیشتر از طول مسیر است)

گراف‌های همبند :

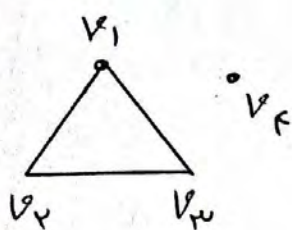
گراف G را همبند می‌گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت آنرا ناهمبند می‌گوییم.



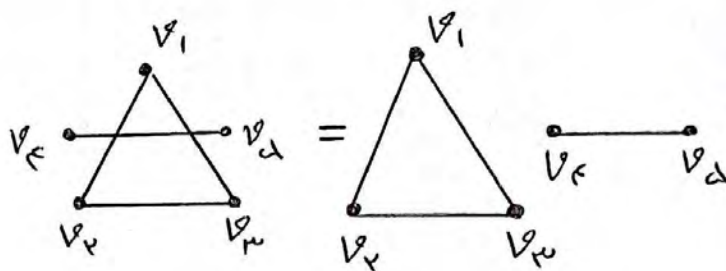
همبند



همبند



ناهمبند

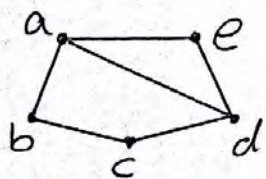


ناهمبند



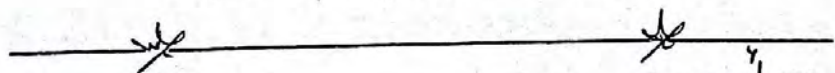
دور در گراف :

یک دور به طول m در گراف G دنباله‌ای از $m+1$ رأس که رأس‌های متوالی مجاور بوده و m رأس اول آن دوبه دو مستقیم بوده و رأس آخر همان رأس اول باشد حداقل طول دور برابر ۳ می‌تواند باشد.



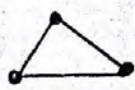
$abcd a$ = دوری به طول ۴

$a e d a$ = دوری به طول ۳



تعریف دور n رأسی :

گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را دور n رأسی گفته و با نماد C_n نشان می‌دهند (مثال)



C_3



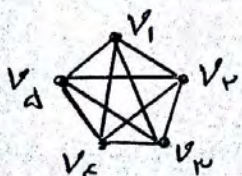
C_4



C_5

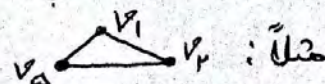


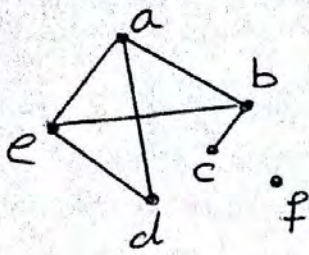
C_6



مثال) گراف K_5 چند زیر گراف بصورت C_3 دارد؟

جواب = $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$





(هماهنگت کشوری - خرداد ۹۹) (نمره ۱/۲۵)
 گراف G را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.
 الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید

جواب: $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$

ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید
 جواب: a, b, e, d, a

ج) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.

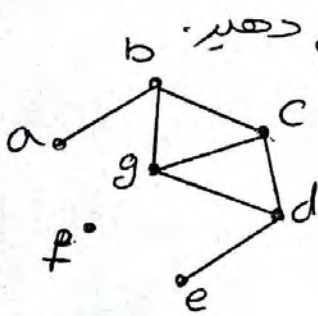
جواب: a, d, e, b, c = مسیر به طول ۴
 a, e, b, c = مسیر به طول ۳

(هماهنگت کشوری - خرداد ۹۹)

در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس v در گراف \bar{G} برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید (نمره ۰/۷۵)

$$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = P - 1 \Rightarrow 9 + 12 = P - 1 \Rightarrow P = 22$$

(هماهنگت کشوری - دیماه ۹۷) (نمره ۱/۵)



با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید.
 الف) یک $a-c$ مسیر به طول ۳ بنویسید.

جواب: $abgc$

ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

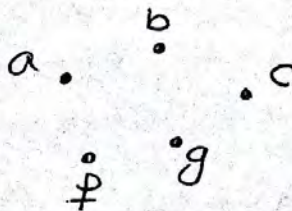
جواب: $bc dgb$

ج) درجه رأس a در گراف \bar{G} را تعیین کنید.

جواب: $\deg_{\bar{G}}(a) = 5$

د) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟
 جواب: خیر. چون مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد.

ه) یک زیر گراف تهی H را سی، از گراف G رسم کنید.



(هماصنک کشوری - دیماه ۹۷) (انفرد)

گراف G با مجموعه رئوس $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه یالهای

$E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن

نمودار آن به قسمتهای (الف) تا (ج) پاسخ دهید:

(الف) مجموعه همسایگی باز راس d را بنویسید. $N_G(d) = \{b, e\}$: جواب

(ب) اندازه گراف را مشخص کنید: $q = 4$: جواب

(ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

$12 =$ مجموع درجات رئوس

(هماصنک کشوری - دیماه ۹۷) (انفرد)

گراف کامل K_p دارای ۳۲ یال است. در این گراف، مرتبه گراف $\Delta(G)$

را مشخص کنید (انفرد) $q(K_p) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow \frac{P(P-1)}{2} = 32 \Rightarrow$

$P(P-1) = 72 = 9 \times 8 \Rightarrow \boxed{P=9}$ $\Delta(G) = P-1 = 9-1 = 8$

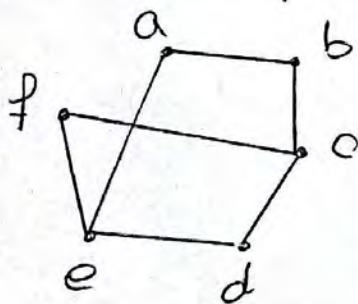
$\delta(G) = 8$

(هماصنک شهریور ۹۸) (۲ نفره)

گراف G با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یالهای

$E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$ زیر را در نظر بگیرید:

(الف) نمودار گراف را رسم کنید.



(ب) $N_G[b] = \{a, b, c\}$ را مشخص کنید.

(ج) یک مسیر به طول ۵ از a به d بنویسید.

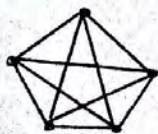
b, a, e, f, c, d

(هماصنک کشوری - شهریور ۹۸) (انفرد)

یک گراف له راسی غیر تهی K - منظم رسم کنید بطوریکه:

(الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

(ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



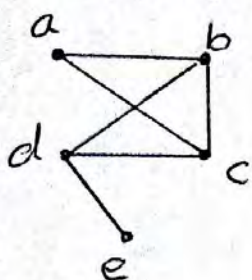
(الف)



(ب)

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۲۵، ۱ نمره)

الف) گراف G بصورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.



$\kappa(G) = 1$

الف) $\kappa(G)$ را مشخص کنید

$q = 4$

ب) اندازه گراف را تعیین کنید

ج) مجموعه همسایگی بسته راس b را بنویسید.
 $N_G(b) = \{b, a, c, d\}$

$x = c$

د) اگر $N_G(d) = \{e, x, b, a, c\}$ باشد، x کدام راس است؟



(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۱ نمره)

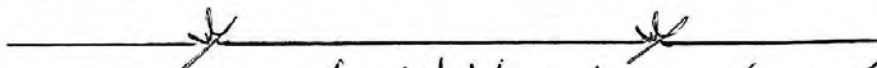
$(0 < k < n)$

الف) گراف k - منتظم از مرتبه n را تعریف کنید

جواب: گرافی از مرتبه n که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر k باشد

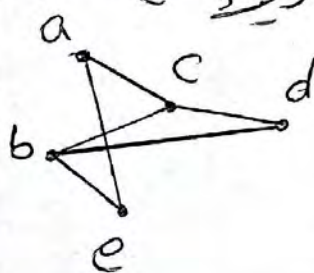
ب) آیا گراف ۳ - منتظم از مرتبه k وجود دارد؟ دلیل بیاورید.

جواب: وجود ندارد زیرا: تناقض $d \times 3 = 2q \Rightarrow d \times 3 = 2q$
 $\sum_{i=1}^d deg v_i = 2q$



(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۱ نمره)

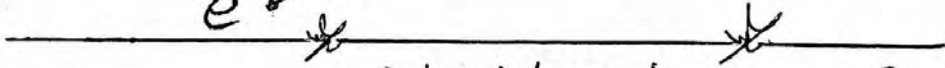
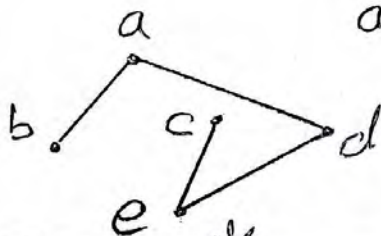
الف) گراف G بصورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) دوری به طول ۴ مشخص کنید.

جواب: a, c, d, b, a

ب) مکمل گراف G را رسم کنید.



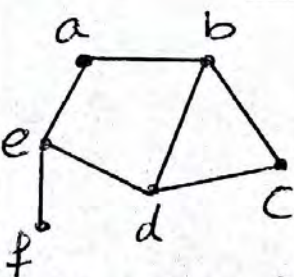
(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸) (۵، ۱ نمره)

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

$P = 4, q = 7$

ب) مجموعه همسایگی $N_G(b)$ را بنویسید.

$N_G(b) = \{a, d, c\}$



$q(\bar{G}) + q(G) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) + 7 = \frac{4(4-1)}{2}$

$\Rightarrow q(\bar{G}) = 8$

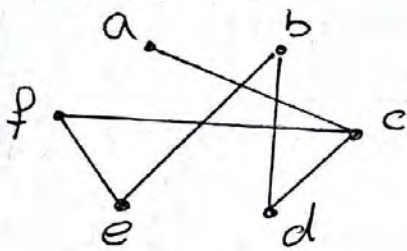
$\Rightarrow \sum deg v_i = 2q = 2 \times 8 = 16$

ج) مجموع درجه‌های راس‌های گراف \bar{G} را مشخص کنید

تذکره مهم: شامل رأس a نیست $\rightarrow N_G(a) =$ مجموعه همسایگی باز رأس a
 شامل رأس a است $\rightarrow N_G[a] =$ مجموعه همسایگی بسته رأس a

*** تمرینات مهم فصل ۱ درس ۱ با پاسخ ***

۱) گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید:



الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.
 $p = 4$ $q = 7$

ب) درجه رأس‌های G را مشخص کنید.

$deg(a) = deg(d) = deg(e) = deg(f) = 2$ $deg(b) = deg(c) = 3$

ج) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟ رأس‌های c و e

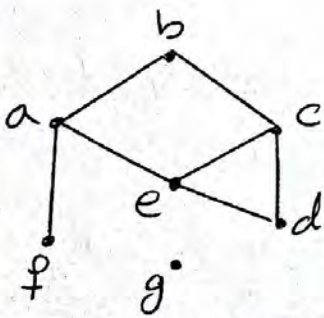
د) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟ $2q = 2 \times 7 = 14$

۲) گراف H با مجموعه رأس‌های $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه یال‌های $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$ مفروض است.

بدون کشیدن نمودار آن به قسمتهای (الف) تا (د) در مورد گراف H پاسخ دهید.

$P = 4$, $q = 4$, $deg(v_1) = deg(v_2) = deg(v_3) = deg(v_4) = 3$, $2q = 12$

۳) گراف G را در نظر بگیرید.



الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ $E(G) = \{ab, bc, cd, ce, de, ea, af\}$

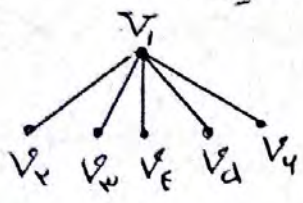
ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید $\Delta(G) = 3$, $\delta(G) = 1$

ج) مجموعه همسایه‌های رأس‌های f و g را بنویسید.

$N_G(f) = \{a\}$ $N_G(g) = \emptyset$ $N_G(e) = \{a, c, d\}$

د) اگر $N_G(x) = \{a, c, d\}$ آنگاه x کدام رأس است؟ x رأس e است.

۳) گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_i)$ دارای d عضو باشد و مجموعه‌های $N_G(v_i)$ برای $2 \leq i \leq 4$ تک‌عضوی باشند. گراف G را رسم کنید.

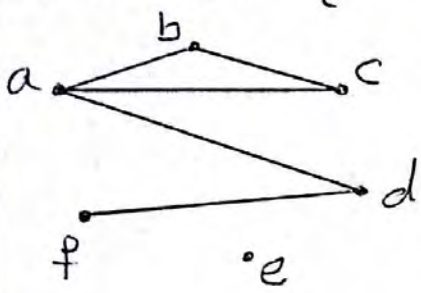


$P=4 \Rightarrow N_G(v_1) = d$

پس v_1 به تمام رئوس دیگر وصل است و چون

پس $N_G(v_i)$ تک‌عضوی است پس v_2, v_3, v_4 فقط به یک رأس وصل هستند که همان v_1 است

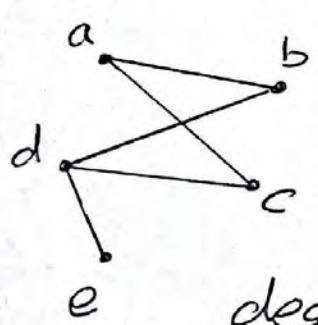
۴) در گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:



$N_G(a) = \{b, c, d\}$ $N_G(b) = \{a, c\}$
 $N_G(c) = \{a, b\}$ $N_G(d) = \{a, f\}$
 $N_G(e) = \{d\}$ $N_G(f) = \{d\}$

گراف G را رسم و اندازه آن را مشخص کنید
 $P=4, q=5$

۵) گراف G رسم شده است. مجموع درجات رأس‌های گراف G را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف \bar{G} را تعیین نمایید.



$P=5, q=4$

$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 4 + q(\bar{G}) = \frac{5 \times 4}{2}$

$\Rightarrow q(\bar{G}) = 4 \Rightarrow \text{مجموع درجات رئوس } \bar{G} = 2q(\bar{G}) = 8$





$deg_G(a) + deg_{\bar{G}}(a) = P-1 \Rightarrow 2 + deg_{\bar{G}}(a) = 5-1 \Rightarrow deg_{\bar{G}}(a) = 2$

$deg_G(c) + deg_{\bar{G}}(c) = P-1 \Rightarrow 3 + deg_{\bar{G}}(c) = 5-1 \Rightarrow deg_{\bar{G}}(c) = 1$

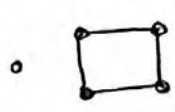

۶) گراف‌های کامل از مرتبه ۱ تا ۵ را رسم کنید





(7) در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف ۲- منتظم از مرتبه

<p>۱۱ رسم کنید</p> <p>الف) $n=4$ $r=1$</p> 	<p>ب) $n=4$ $r=2$</p> 	<p>ج) $n=5$ $r=2$</p> 
<p>د) $n=5$ $r=3$</p> <p>سه رأس درجه فرد نداریم</p>	<p>ه) $n=4$ $r=4$</p> 	<p>و) $n=7$ $r=3$</p> <p>۷ رأس درجه فرد نداریم</p>

(8) برای هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵-رأسی رسم کنید بطوریکه:

<p>الف) یک رأس تنها داشته باشد</p> 	<p>ب) دو رأس تنها داشته باشند</p> 
--	---

<p>ج) سه رأس تنها داشته باشند</p> 	<p>د) چهار رأس تنها داشته باشند</p> <p>امکان ندارد</p>	<p>ه) پنج رأس تنها داشته باشند</p> 
---	--	--

(9) هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند 4 نفر از آنها هر کدام دقیقاً با 2 نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با 4 نفر دست داده باشد.

حل: هفت نفر را رؤس گراف در نظر می‌گیریم و 2 نفری را که با هم دست داده‌اند بهم وصل می‌کنیم، 4 تا رأس درجه 2 خواهیم داشت اگر نفر هفتم با 4 نفر دست داده باشد درجه آن 4 است و فقط یک رأس درجه فرد داریم که امکان پذیر نیست.

(10) علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از 4 نفر دیگر باشد یا نباشد:

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ریاضیات گسسته

$e = \text{مهرداد}$ ، $d = \text{ناصر}$ ، $c = \text{محمد}$ ، $b = \text{سما}$ ، $a = \text{علی}$

که در فهرست دوستان x است (x, y)

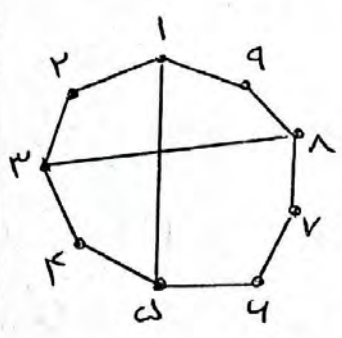
تمام حالتها ممکن $= \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, e), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d)\} \Rightarrow ۲۰ = \text{جمعاً}$

ب) اگر بودن در فهرست دوستان ، رابطهای دو طرفه داشته باشند
یعنی هر دو نفر یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ کدام
در فهرست دوستان دیگری نیست ، در این صورت چند حالت مختلف
می تواند وجود داشته باشد ؟
حل : فقط ۱۰ حالت کنی می تواند وجود داشته باشند.

$\{ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de\}$

۱۱) یک گراف ۹ راسی رسم کنید بطوریکه :

الف) دورهایی به طول ۴ و ۶ و ۷ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



$۱۲۳۴۵۱ = \text{دوره به طول ۴}$

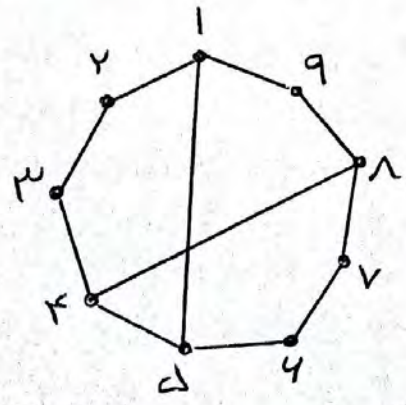
$۱۵۶۷۸۹۱ = \text{دوره به طول ۶}$

$۱۲۳۸۷۶۵۱ = \text{دوره به طول ۷}$

$۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱ = \text{دوره به طول ۹}$

دوره به طولهای دیگری وجود ندارد.

ب) دورهایی به طول ۴ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



$۱۲۳۴۵۱ = \text{دوره به طول ۴}$

$۱۵۶۷۸۹۱ = \text{دوره به طول ۶}$

$۱۲۳۴۸۷۶۵۱ = \text{دوره به طول ۸}$

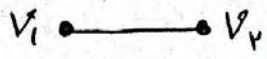
$۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱ = \text{دوره به طول ۹}$

دوره به طولهای دیگری وجود ندارد.

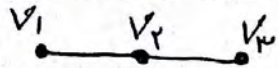
۱۲) فرض کنید G یک گراف باشد و $K \geq \deg(G)$ ، درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید:

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است
 جواب: درست است

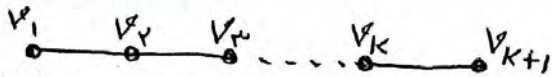
فرض کنید v_1 یک رأس از گراف باشد چون $K \geq \deg(G)$ پس v_1 به حداقل یک رأس دیگر مانند v_2 وصل است.



چون $\deg(v_2) \geq K$ پس v_2 به حداقل یک رأس دیگر وصل است.



و اگر همین طور ادامه دهیم نمودار زیر قابل رسم است که یک مسیر به طول K است.



ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K+1$ است.

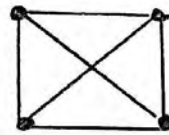
جواب: نادرست است $\deg(G) \geq 2$ ولی مسیر به طول ۳ نداریم



۱۳) یک گراف K رأسی غیر تهی K - منتظم بکشید که:

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

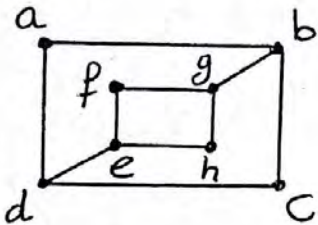
الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد



درس ۱ : مدل سازی با گراف

تعریف مجموعه احاطه گره :

زیر مجموعه D از راس های گراف را مجموعه احاطه گره می نامیم هرگاه هر راس از گراف که در D نباشد، حداقل به یکی از راس های D وصل باشد.



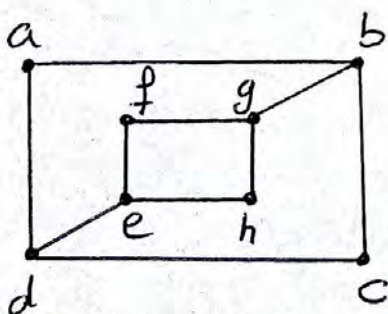
در گراف مقابل $D = \{a, f, h, c\}$ یک مجموعه احاطه گره است چون راس های دیگر گراف که در D نیستند (یعنی راس های b, d, e, g) به یکی از راس های D

وصل هستند مجموعه $D = \{a, b, g, e, d\}$ هم می تواند یک مجموعه احاطه گره دیگر باشد چون راس های دیگر گراف که در D نیستند به یکی از راس های D وصل هستند. در گراف G هر راس خودش و همه راس های دیگر گراف G را پوشش می دهد و احاطه می کند



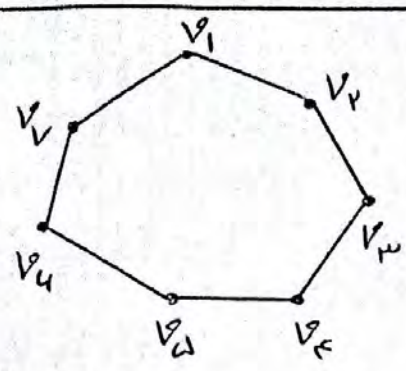
تعریف مجموعه احاطه گره می بینیم :

در بین تمام مجموعه های احاطه گره گراف G ، مجموعه (یا مجموعه) که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه گره می بینیم نامیده و تعداد اعضای چنین مجموعه ای را عدد احاطه گری گراف G می نامیم و آن را با $\gamma(G)$ (گامای جی) نشان می دهیم به یک مجموعه احاطه گره می بینیم، یک γ - مجموعه هم می گوئیم



مجموعه احاطه گره می بینیم $D = \{b, e\}$

$$\gamma(G) = 2$$



مثال) برای گراف مقابل که دور C_7 است مطلوب است محاسبه $\chi(G) = ?$ و یک مجموعه احاطه گر؟

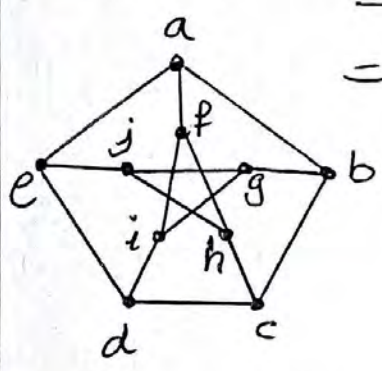
یک مجموعه احاطه گر $= \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$

یک مجموعه احاطه گر مینیم $= \{v_1, v_4, v_7\}$

یک مجموعه احاطه گر مینیم دیگر $= \{v_1, v_2, v_5\}$

$\chi(G) = 3$

مثال) در گراف مقابل که به گراف پترشن معروف است مطلوب است:



الف) دو مجموعه احاطه گر معرفی کنید.
 $D = \{a, b, c, d, e\}$ یا $D = \{a, i, j, c\}$

ب) دو مجموعه احاطه گر مینیم معرفی کنید.

$D = \{a, i, h\}$ یا $D = \{a, g, c\}$ $\chi(G) = 3$

معرفی یک نماد:

می دانیم اگر x یک عدد صحیح باشد جزو صحیح x را با علامت $[x]$

نشان داده و آنرا بصورت زیر تعریف می کنیم $[x] = n \iff n < x < n+1$ $n \in \mathbb{Z}$

یا $[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ $[3] = 3$ $[4,7] = 4$

جزو صحیح عدد x را کف x نیز می گویند و آنرا با علامت $\lfloor x \rfloor$ نشان داده و به آن کف x می گویند.

اگر x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیح بعد از x از علامت $[x]$ استفاده می کنیم و آنرا سقف x می خوانیم در حالت کلی:

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lceil 3 \rceil = \lfloor 3 \rfloor = 3$$

$$\lceil 3,7 \rceil = \lfloor 3,7 \rfloor = 3$$

$$\lfloor 5,1 \rfloor = 5$$

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

$$\lceil 3,7 \rceil = 4$$

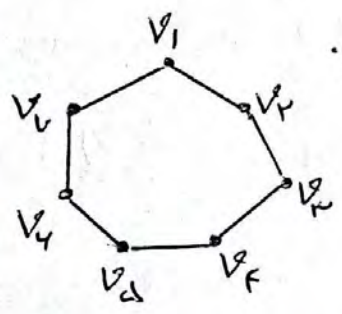
$$\lceil 5,1 \rceil = 4$$

باتوجه به مثالهای بالا، اعداد کف و سقف در اعداد صحیح باهم برابرند

گران پایین $\gamma(G)$:

اگر G یک گراف n رأسی با کمترین درجه Δ باشد آنگاه: $\gamma(G) \geq \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$
 در گراف G عدد $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ را یک گران پایین $\gamma(G)$ می نامند یعنی $\gamma(G)$ نمی تواند از آن کمتر باشد

مثال ۱: عدد احاطه گری گراف C_7 را بیست آورید.



$$\Delta = 2, n = 7$$

گراف ۲- منتظم است پس: $\gamma(G) \geq \lceil \frac{7}{2+1} \rceil = 3$

از طرفی $D = \{v_1, v_4, v_7\}$ یک مجموعه احاطه گر است پس $\gamma(G) \leq 3$

$$\left. \begin{matrix} \gamma(G) \geq 3 \\ \gamma(G) \leq 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \gamma(G) = 3$$

مثال ۲: (هماهنگت - خرداد ۹۹):

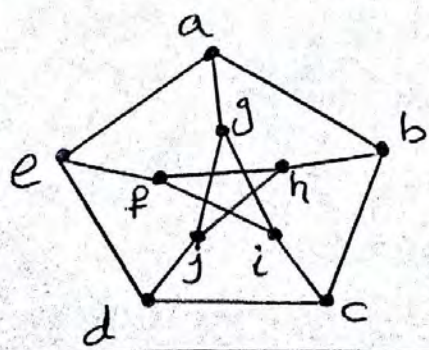
عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید (۱، ۲، ۵، ۸)

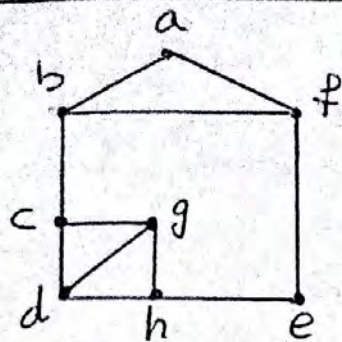
حل: در گراف مقابل $n=10$ و $\Delta=3$ پس:

$$\gamma(G) \geq \lceil \frac{10}{3+1} \rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$$

از طرفی $D = \{g, h, d\}$ یک مجموعه احاطه گری برای گراف است پس $\gamma(G) \leq 3$

بنابراین: $\gamma(G) = 3$



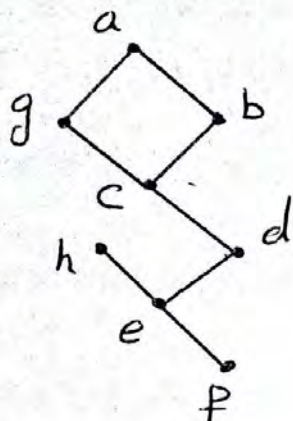


مسئله ۳: عدد احاطه تری گراف مقابل را بدست آورید.

حل: گراف از مرتبه $n=8$ و $\Delta=3$ است.

پس: $\lfloor \frac{8}{3+1} \rfloor = 2$ از طرفی $\{f, g\}$ کل راسها

را احاطه می کنند پس $\chi(G) < 2$ در نتیجه: $\chi(G)=2$



مسئله ۴: عدد احاطه تری گراف مقابل را بدست آورید.

حل: گراف از مرتبه $n=8$ و $\Delta=3$ است.

پس $\lfloor \frac{8}{3+1} \rfloor = 2$ به نظر می رسد که با ۲ راس نمی توان

کل راسها را احاطه کنیم زیرا برای احاطه کردن رئوس

a, b, c, d و g حداقل دو تا از آنها باید در مجموعه احاطه تر باشند

(حوا) $\lfloor \frac{8}{3+1} \rfloor = 2$ و برای احاطه کردن رئوس e, f, g و h حداقل یکی

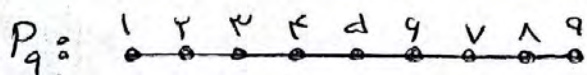
از آنها باید انتخاب شوند (حوا) $\lfloor \frac{3}{3+1} \rfloor = 1$ بنابراین حداقل ۳ راس

باید در مجموعه احاطه تر باشد یعنی $\chi(G) \geq 3$ از طرفی حوا $\{a, c, e\}$

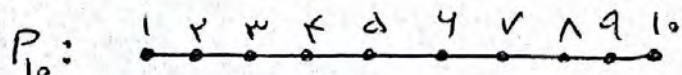
یک مجموعه احاطه تر است پس $\chi(G) \leq 3$ در نتیجه: $\chi(G)=3$

مسئله ۵: گرافهای P_9 و P_{10} را رسم کنید و عدد احاطه تری

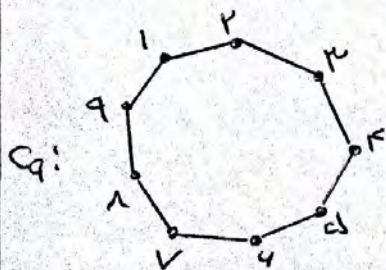
هر یک را مشخص کنید



$\chi(P_9) = \lfloor \frac{9}{2+1} \rfloor = 3$ از طرفی $\{2, 4, 6, 8\}$ یک مجموعه احاطه تر است پس $\chi(P_9) \leq 3$ در نتیجه: $\chi(P_9)=3$

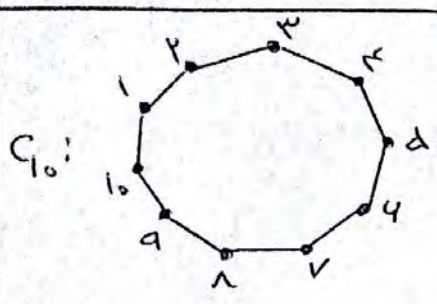


$\chi(P_{10}) = \lfloor \frac{10}{2+1} \rfloor = 4$ از طرفی $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ یک مجموعه احاطه تر است پس $\chi(P_{10}) \leq 4$ در نتیجه: $\chi(P_{10})=4$



$\chi(C_9) = \lfloor \frac{9}{2+1} \rfloor = 3$ از طرفی $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ یک مجموعه

احاطه تر است پس $\chi(C_9) \leq 3$ در نتیجه: $\chi(C_9)=3$



$\{1, 4, 7, 9\}$ از طرفی $\Delta(C_{10}) \geq \lfloor \frac{10}{2+1} \rfloor = 4$
 یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد پس $\Delta(C_{10}) = 4$

در نتیجه: $\Delta(C_{10}) = 4$



مثال ۲: (خاصیت دیماه ۹۸)
 اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیم درجه گراف باشد: (نمره ۱۲۵)
 الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor$ است.

جواب: اگر $n=10$ باشد C_{10} و P_{10} رسم شود چون $\Delta(G) = \lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor = 4$

ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر بزرگتر از $\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor$ باشد
 (یا برابر $\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor$ نباشد)



$\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor = 2$

$\Delta(G) = 3$ ولی



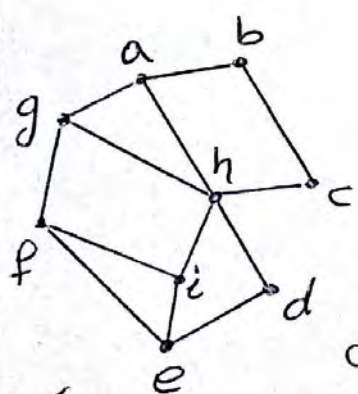
مجموعه احاطه‌گر مینیمال:

مجموعه احاطه‌گر که با حذف هر یک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد را احاطه‌گر مینیمال می‌گوئیم.

مثال ۱: (خاصیت شهریور ۹۸):

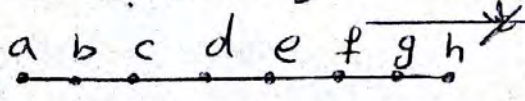
در گراف مقابل یک مجموعه احاطه‌گر غیر مینیمال انتخاب کنید پس با حذف برخی از رأس‌ها

آنها به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل کنید (نمره)



یک مجموعه احاطه‌گر غیر مینیمال $\{a, h, f, b\}$

اکنون با حذف رأس a از آن، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال بدست می‌آید



مثال ۲: (خاصیت شهریور ۹۸)

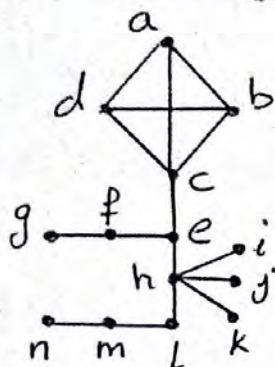
الف) گراف P_8 را رسم کنید. (نمره ۱۵)

ب) یک Δ - مجموعه از آن مشخص کنید. $\{a, d, g\}$
 ج) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن مشخص کنید

$\{a, d, e, h\}$

حل تمرینات مهم فصل ۲ درس ۲ با پاسخ *

۱) عدد احاطه گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



الف) $n=14$ و $\Delta=5$ پس: $\lfloor \frac{14}{5} \rfloor = 3$ $\chi(G) \geq 3$

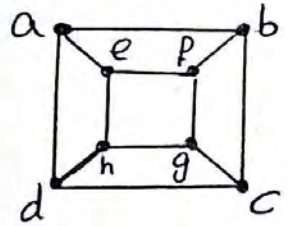
اما حداقل یکی از رئوس a, b, c, d باید انتخاب شود چون باید a, b, c, d احاطه شود حداقل یکی

از رئوس e, f, g باید انتخاب شود تا گراف

حداقل e, f, g احاطه شود حداقل یکی از رئوس h, i, j, k باید انتخاب شود تا گراف

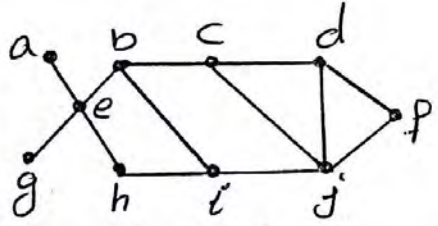
حداقل h, i, j, k احاطه شود حداقل یکی از رئوس l, m, n باید انتخاب شود تا گراف

حداقل l, m, n احاطه شود بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعه احاطه‌گر باید باشد لذا $\chi(G) \geq 4$ از طرفی چون $\{c, f, h, m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\chi(G) \leq 4$ پس $\chi(G) = 4$



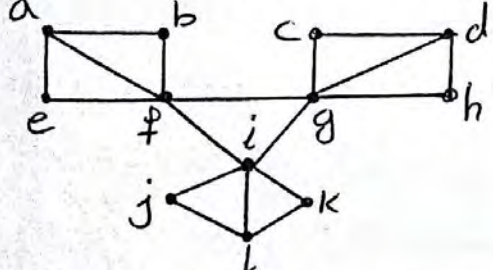
ب) $n=8$ و $\Delta=3$ پس $\lfloor \frac{8}{3} \rfloor = 2$ $\chi(G) \geq 2$ از طرفی

$\{h, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\chi(G) \leq 2$ پس: $\chi(G) = 2$



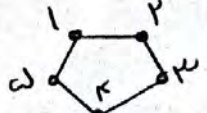
پ) $n=10$ و $\Delta=4$ پس $\lfloor \frac{10}{4} \rfloor = 2$ $\chi(G) \geq 2$ از طرفی

$\{e, j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\chi(G) \leq 2$ پس: $\chi(G) = 2$



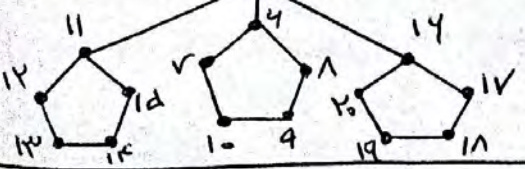
ت) $n=12$ و $\Delta=5$ پس $\lfloor \frac{12}{5} \rfloor = 2$ $\chi(G) \geq 2$

از طرفی $\{f, d, l\}$ یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد است لذا $\chi(G) \leq 3$ پس $\chi(G) = 3$



ث) $n=20$ و $\Delta=5$ پس $\lfloor \frac{20}{5} \rfloor = 4$ $\chi(G) \geq 4$

از طرفی $\{2, 4, 8, 12, 16, 17, 19\}$ یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد است پس $\chi(G) = 8$



۳) اگر برای گراف G داشته باشیم $\chi(G) = 1$ در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی برد؟

حل: چون $\chi(G) = 1$ پس یک راس وجود دارد که با همه راسها مجاور است در نتیجه: $\Delta(G) = P-1$ پس $q_{min} = P-1$ و گراف می‌تواند حداکثر یک گراف کامل باشد پس $q_{max} = \binom{P}{2}$

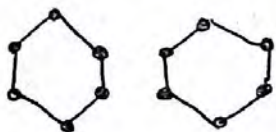
۳) $\chi(P_n)$ و $\chi(C_n)$ را به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ مشخص کنید.

پاسخ: $\chi(C_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ و $\chi(P_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

۴) اگر G یک گراف k -منتظم n راسی باشد نشان دهید $\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor \leq \chi(G)$

حل: چون گراف k -منتظم است پس $\Delta = k$ و $\chi(G) \geq \lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor = \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$

۵) یک گراف ۲-منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه‌تری آن کمترین مقدار ممکن باشد.



حل: می‌دانیم: $\chi(G) \geq \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$ پس $\chi(G) \geq \lfloor \frac{12}{3} \rfloor$

$\chi(G) \geq 4$ در شکل مقابل $\chi(G) = 4$



۶) یک گراف ۶ راسی که $\chi(G) = 4$ - مجموعه آن به اندازه یک باشد رسم کنید



۷) یک گراف ۶ راسی که $\chi(G) = 4$ - مجموعه آن به اندازه دو باشد رسم کنید

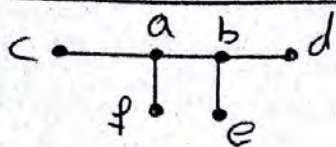
۸) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq n$ روشی برای رسم یک گراف



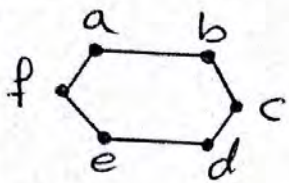
n راسی که عدد احاطه‌تری آن k باشد ارائه دهید

حل: کافیست $k-1$ راس انزوله قرار دهیم و در بقیه رئوس یک راس را به تمام رئوس دیگر وصل کنیم مثلاً: $n=7, k=3, \chi(G)=3$

- ۹) (همایون کشوری - خرداد ۹۹۹۸): گراف ۶ راسی با عدد احاطه‌تری ۲ رسم کنید:
- الف) بطوریکه مجموعه احاطه‌تری با اندازه ۲ داشته باشد.
- ب) بطوریکه بیش از یک مجموعه احاطه‌تری با اندازه ۲ داشته باشد.



حل الف) گراف روبه‌رو از مرتبه ۴ و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گر یکتا $\{a, b\}$ است.



حل ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌تری به اندازه ۲ است که عبارتند از: $\{a, d\}$, $\{f, c\}$, و $\{e, b\}$

۱۰) برای هر $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهید که:

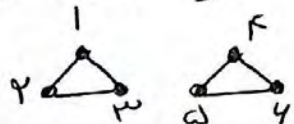
الف) چگونه می‌توانید یک گراف n راسی با عدد احاطه‌تری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

حل: کافیست یک رأس انزوله باشد و در بقیه رئوس یک راس را به همه رئوس دیگر وصل کرد.

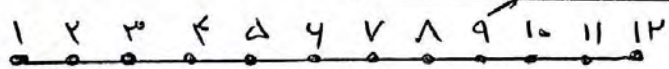
ب) چگونه می‌توانید یک گراف n راسی با عدد احاطه‌تری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

حل ب) کافیست دو گراف کامل K_n را یکجا بکشید. مثلاً برای $n=4$ یک K_4 بکشیم

در بهترین ۹ مساحت (ب) می‌توانستیم گراف را بصورت زیر هم رسم کنیم.



مجموعه‌های $\{1, 2\}$ و $\{4, 5\}$ مجموعه احاطه‌ترین

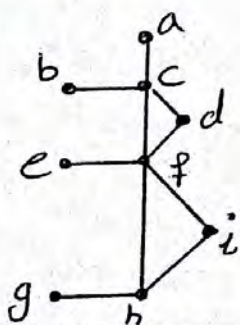


(همانند - دیباه ۹۷) گراف P_{12} را رسم کنید:

الف) یک ۸- مجموعه از آن مشخص کنید

حل: مجموعه $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ یک ۸- مجموعه است.

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن مشخص کنید $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$



(همانند - دیباه ۹۸)

برای گراف روبه‌رو: الف) یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید $\{c, f, h, g\}$

ب) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌گر مینیمال باشد $\{c, f, g\}$

(هماهنگت کشوری - خرداد ۹۸)

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) یک گراف کامل n رأسی، یال دارد. جواب: ۲۸

ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ یا $3=5$ حداقل رأس برای احاطه همه رئوس لازم است. جواب: ۳

ج) اگر در گراف G از مرتبه P داشته باشیم $\chi(G)=1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر است. جواب: $P-1$



(هماهنگت کشوری دیماه ۹۸)

درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.

تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است. جواب: نادرست



(هماهنگت - شهریور ۹۸)

جاهای خالی را پر کنید:

الف) گراف G را می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. جواب: همبند

ب) مقدار $C(n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n > 2$ برابر است با: جواب: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



(هماهنگت کشوری - دیماه ۹۷)

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است. جواب: نادرست

ب) گراف 3 -منتظم از مرتبه n قابل رسم نیست.

جواب: درست