بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

ریاضی و آمار (۲)

پایه یازدهم

علوم انسانی و معارف

فصل ۱

۱ گزاره ها و ترکیب گزاره ها

۲ استدلال ریاضی

تهیه و تنظیم : مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2

Majid.ghaderi.mathclass.2

فصل ۱
درس ۲

استدلال ریاضی

اهداف

- تبدیل عبارت های کلامی به عبارت های ریاضی
- آشنایی با استدلال های ریاضی (قیاس استثنایی ، مغالطه)
- استفاده از منطق گزاره ها برای بررسی صحت استدلال های ریاضی
- آشنایی با ترکیب گزاره ها و جدول ارزش ها
- ایجاد مهارت در نوشتن عکس نقیض گزاره ها و به کار گیری آنها

صفحه ۱۲ کتاب درسی

استدلال

یک استدلال می تواند از چندین جمله خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه مفروضات استدلال اند.

مثال

مفروضات استدلال

علی برای شام امشب ساندویچ یا پیتزا سفارش می دهد.

علی از سفارش ساندویچ صرف نظر می کند.

نتیجه استدلال

علی برای شام امشب پیتزا سفارش می دهد.

تمرین تکمیلی

سوال ۱ : نتیجهٔ استدلال های زیر را مشخص کنید.

۱ هیچ عدد مرکّبی، عددی اوّل نیست.

۴ عددی مرکب است.

نتیجه: ۴ عددی اول نیست.

۲ اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد، آن گاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم پیش بینی شده است.

نتیجه: فردا مدارس تعطیل است.

صفحه ۱۲ کتاب درسی

استدلال ریاضی

منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است.

اولین گام برای استدلال ریاضی این است که یک عبارت توصیفی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم.

مثال ۱: عبارت کلامی زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

«ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می شویم»

در عبارت داده شده به جای «ما» از x استفاده می کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$x + x + \frac{x}{۲} + \frac{x}{۴} + ۱ = ۱۰۰ \quad \rightarrow \quad \frac{۱۱}{۴}x = ۹۹$$

صفحه ۱۲ کتاب درسی

مثال ۲ : عبارت کلامی زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

«عَدَدٌ ضُرِبَ فی نِصفِه وَزیدَ عَلَی الحاصلِ اثنا عَشَرَ حَصَلَ خَمسَةُ اَمثالِ العَدَدِ.»

یعنی: «عددی را در نصف خودش ضرب کردیم، آنگاه بر حاصل ضرب عدد ۱۲ را افزودیم. حاصل ۵ برابر عدد منظور شد.»

در عبارت داده شده به جای «عدد مجهول» از x استفاده می کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$(x)\left(\frac{x}{۲}\right)+۱۲=۵x \quad \rightarrow \quad \frac{۱}{۲}x^{۲}-۵x+۱۲=۰$$

صفحه ۱۳ کتاب درسی

مثال ۳ : عبارت کلامی زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

«ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن است.»

در عبارت داده شده به جای «قیمت فروش» از x و به جای «سود» از y استفاده می کنیم.
در این صورت خواهیم داشت:

$$y = ۰/۱x$$

تمرین تکمیلی

سوال ۲ : عبارت کلامی زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

«حاصل ضرب هر عدد حقیقی در معکوس خود، برابر یک است.»

در عبارت داده شده به جای «عدد مجهول» از x استفاده می کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$x \times \frac{۱}{x} = ۱ \quad , \qquad x \in \mathbb{R}$$

کار در کلاس صفحه ۱۴ کتاب درسی

عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) عددی به علاوهٔ پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

در عبارت داده شده به جای «عدد مجهول» از x استفاده می کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$x + ۵ = ۲x$$

ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

در عبارت داده شده به جای «اعداد مجهول» از x و y استفاده می کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$xy = x + y$$

پ) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوهٔ ۳، بزرگ تر از خودش است.

در عبارت داده شده به جای «عدد مجهول» از x استفاده می کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$x^{۲} + ۳ > x$$

صفحه ۱۴ کتاب درسی

قیاس

قیاس استدلالی است از کل به جزء ؛ که اگر مقدمه های آن درست باشند، نتیجه به دست آمده حتما درست است.

به عبارتی دیگر قیاس؛ گونه ای برهان منطقی است که در آن از حداقل دو فرض مقدماتی نتیجه ای حاصل می گردد.

به عنوان مثال

مقدمه (فرض) ۱ : سیب نوعی میوه است.

مقدمه (فرض) ۲ : میوه ها سرشار از ویتامین هستند.

در نتیجه سیب سرشار از ویتامین است.

صفحه ۱۴ کتاب درسی

قیاس استثنایی

یکی از انواع قیاس ها که در استدلالات ریاضیاتی کاربرد فراوان دارد، قیاس استثنایی است.

قیاس استثنایی قیاسی است که نتیجه یا نقیض آن به صراحت در مقدمات آن ذکر شده باشد.

علت این که این قیاس را استثنایی می نامند این است که در آن از رابط (آدات) استثناء استفاده می شود.

این آدات شامل : «لیکن» – «اما» – «ولی» و ... می باشد.

توجه: یکی از مقدمات این قیاس؛ جمله شرطی است.

مثال:

۱ اگر علی درس بخواند در درس ریاضی قبول می شود، اما علی درسخوان نیست.

در نتیجه علی در درس ریاضی قبول نمی شود.

۲ اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، ماه کامل است. امشب، شب چهاردهم ماه است.

در نتیجه ماه کامل است.

مغالطه

صفحه ۱۴ کتاب درسی

گاهی از قیاس استثنایی به شکل نادرست استفاده می شود و منجر به نتیجه گیری نادرست می شود. به این گونه استدلالات **مغالطه** می گویند.

مغالطه جزیی از برهان است که به طور قابل اثباتی در منطق آن ایراد وجود دارد، پس کل برهان را نامعتبر می سازد. به عبارتی دیگر استدلالی نادرست است که به ظاهر درست جلوه می کند.

نکته

در مغالطه از روی یک استدلال نادرست به نتیجه ای می رسیم که امکان دارد صحیح یا غلط باشد، سپس از آن برای نتیجه گیری های بعدی استفاده می شود.

مثال:

۱ اگر کسی از من متنفر باشد، آنگاه پشت سر من حرف می زند. سعید پشت سر من حرف زده است.

پس سعید از من متنفر است.

۲ اگر باران ببارد، زمین خیس می شود. زمین خیس شده است.

پس باران باریده است.

مقایسه کنید

قیاس استثنایی

اگر $\boxed{\text{امشب شب چهاردهم ماه باشد،}}^{\,p}$ آنگاه $\boxed{\text{ماه کامل است.}}^{\,q}$

p امشب، شب چهاردهم ماه است.

$\therefore q$ در نتیجه ماه کامل است.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

مغالطه

اگر $\boxed{\text{کسی از من متنفر باشد،}}^{\,p}$ آنگاه $\boxed{\text{پشت سر من حرف می زند.}}^{\,q}$

p سعید پشت سر من حرف زده است.

$\therefore q$ در نتیجه سعید از من متنفر است.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

در اینجا $\therefore$ نماد نتیجه است.

کار در کلاس ۱ بالای صفحه ۱۵ کتاب درسی

با استفاده از جدول ارزش، همیشه درستی قیاس استثنایی زیر را مشخص کنید.

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

تمرین تکمیلی

سوال ۳ : با استفاده از جدول ارزش، درستی یا نادرستی مغالطه را مشخص کنید.

$$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	ن
ن	ن	د	ن	د

کار در کلاس ۲ بالای صفحه ۱۵ کتاب درسی

در هر یک از استدلال های زیر، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

الف)

$$\underset{p}{\boxed{۳ > ۰}} \Rightarrow \underset{q}{\boxed{۴ > ۱}}$$

$۳ > ۰$

$\therefore$ ۴ > ۱

ب) اگر $\underset{p}{\boxed{\text{خطوط } L_1 \text{ و } L_2 \text{ موازی باشند،}}}$ آنگاه $\underset{q}{\boxed{\text{خطوط } L_1 \text{ و } L_2 \text{ هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند.}}}$

p : خطوط L_1 و L_2 موازی باشند.

$\therefore$ خطوط L_1 و L_2 هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند.

تمرین تکمیلی

سوال ۴ : در هر یک از استدلال های زیر جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

الف)

p : مجموع هر دو عدد طبیعی زوج ؛ عددی زوج است.

q : اعداد ۴ و ۶ زوج هستند.

درنتیجه : عدد ۱۰ زوج است.

ب)

$p: x \in \mathbb{N}, x > ۱ \quad \Longrightarrow \quad q: x^{۲} > x$

$p: ۵ \in \mathbb{N}, ۵ > ۱$

$\therefore \; ۲۵ > ۵$

تمرین تکمیلی

سوال ۵ : گزاره های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) مجموع دو عدد فرد، یک عدد زوج است.

$$x, y \in \mathbb{E} \implies x + y \in \mathbb{O}$$

ب) حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی، مضرب ۶ است.

$$x \in \mathbb{Z} \implies x(x+۱)(x+۲) = ۶k \;, \qquad k \in \mathbb{N}$$

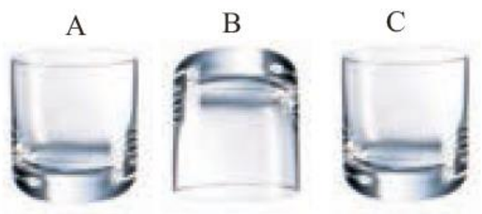
پ) مجموع دو عدد گویا، یک عدد گویاست.

$$x, y \in \mathbb{Q} \implies x + y \in \mathbb{Q}$$

مثال صفحه ۱۵ کتاب درسی

سه لیوان همانند شکل زیر داریم که یکی از آنها وارونه است. می خواهیم همهٔ آنها در حالت درست (رو به بالا) قرارگیرند؛ ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارونه است، آن را درست کنیم و برعکس). سؤال این است که آیا این کار امکان پذیر است؟

اگر بلی با چند حرکت مجاز؟ امتحان کنید!



در عبارت داده شده به جای «تعداد لیوان های وارونه» از x استفاده می کنیم.

در وضعیت فعلی(اولیه) مقدار x برابر یک است و وضعیت مطلوب زمانی رخ می دهد که هیچ لیوانی وارونه نباشد، یعنی $x=0$

وضعیت مطلوب زمانی رخ می دهد که داشته باشیم: $x-1$

تعداد حرکت مجاز برای تغییر وضعیت لیوان ها، در هر بار دقیقاً دو لیوان است. پس در هر حرکت به سه طریق می توانیم لیوان ها را تغییر وضعیت دهیم.

۱) دو لیوان را درست کنیم. در این حالت دو لیوان از لیوان های وارونه کم می شود، پس داریم: $x-2$

۲) دو لیوان را وارونه کنیم. در این حالت دو لیوان به لیوان های وارونه اضافه می شود، پس داریم: $x+2$

۳) یک لیوان را وارونه و یک لیوان را درست کنیم. در این حالت تعداد لیوان های وارونه تغییر نمی کند.

لذا مشاهده کردیم که این کار امکان پذیر نیست.

کار در کلاس ۱ پایین صفحه ۱۵ کتاب درسی

سه لیوان همانند شکل زیر داریم که یکی از آنها وارونه است. می خواهیم همهٔ آنها در حالت درست (رو به بالا) قرارگیرند؛ ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارونه است، آن را درست کنیم و برعکس). سؤال این است که آیا این کار امکان پذیر است؟

آیا فقط یک راه حل دارد؟

در عبارت داده شده به جای «تعداد لیوان های وارونه» از x استفاده می کنیم.

در وضعیت فعلی(اولیه) مقدار x برابر ۲ است و وضعیت مطلوب زمانی رخ می دهد که هیچ لیوانی وارونه نباشد، یعنی $x = ۰$

وضعیت مطلوب زمانی رخ می دهد که داشته باشیم: $x - ۲$

تعداد حرکت مجاز برای تغییر وضعیت لیوان ها، در هر بار دقیقاً دو لیوان است. پس در هر حرکت به سه طریق می توانیم لیوان ها را تغییر وضعیت دهیم.

۱) دو لیوان را درست کنیم. در این حالت دو لیوان از لیوان های وارونه کم می شود، پس داریم: $x - ۲$

۲) دو لیوان را وارونه کنیم. در این حالت دو لیوان به لیوان های وارونه اضافه می شود، پس داریم: $x + ۲$

۳) یک لیوان را وارونه و یک لیوان را درست کنیم. در این حالت تعداد لیوان های وارونه تغییر نمی کند.

لذا مشاهده کردیم که این کار امکان پذیر است. می توان با استفاده از حالت اول و با یک حرکت این کار را انجام داد یا ابتدا با استفاده از حالت سوم سپس حال اول و با دو حرکت به وضعیت مطلوب رسید.

کار در کلاس ۲ پایین صفحه ۱۵ کتاب درسی

مثال سه لیوان را برای حالتی که بیش از ۳ لیوان داریم و تعداد فردی از لیوان ها را که وارونه هستند، بررسی کنید. آیا استدلال گفته شده در آنجا قابل تعمیم به حالت اخیر است؟

در این کار در کلاس نیز مطابق استدلال گفته شده در مثال قبل، هرگز نمی توان تعداد فردی لیوان وارونه را اصلاح کرد چرا که همواره x به اندازه یک عدد زوج تغییر می کند.

یادآور می شویم که در عبارت داده شده به جای «تعداد لیوان های وارونه» از x استفاده کرده ایم.

صفحه ۱۶ کتاب درسی

در درس یک این فصل دیدیم که:

هر گزارهٔ شرطی با عکس نقیض خود هم ارز است. یعنی $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

اگر بخواهیم درستی گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ را نشان دهیم و این کار دشوار باشد، به جای آن می توان ثابت کرد که $\sim q \Rightarrow \sim p$ درست است.

مثال: ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 زوج باشد، آن گاه n نیز زوج است.

به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را اثبات می کنیم. یعنی:

ثابت می کنیم که چنانچه n عددی صحیح و زوج نباشد آنگاه n^2 نیز زوج نیست.

فرض کنیم n زوج نباشد، پس باقی مانده تقسیم آن بر ۲ برابر یک است. به عبارت دیگر:

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{k'} + 1 \Rightarrow n^2 = 2k' + 1$$

در نتیجه n^2 زوج نیست.

تمرین تکمیلی

سوال ۶ : ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و $n^{۲}$ مضرب ۳ باشد، آن گاه n نیز مضرب ۳ است.

به جای اثبات این حکم ، عکس نقیض آن را اثبات می کنیم. یعنی:

ثابت می کنیم که چنانچه n عددی صحیح و مضرب ۳ نباشد آنگاه $n^{۲}$ نیز مضرب ۳ نیست.

فرض کنیم n مضرب ۳ نباشد، پس باقی مانده تقسیم آن بر ۳ برابر یک یا ۲ است. به عبارت دیگر:

$$n = ۳k + ۱ \Longrightarrow n^{۲} = ۹k^{۲} + ۶k + ۱ = ۳(۳k^{۲} + ۲k) + ۱ \Longrightarrow n^{۲} = ۳k' + ۱$$

در نتیجه $n^{۲}$ مضرب ۳ نیست.

$$n = ۳k + ۲ \Longrightarrow n^{۲} = ۹k^{۲} + ۱۲k + ۴ = ۳(۳k^{۲} + ۴k) + ۱ \Longrightarrow n^{۲} = ۳k'' + ۱$$

در نتیجه $n^{۲}$ مضرب ۳ نیست.

تمرین تکمیلی

سوال ۷ : ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آنگاه a عددی فرد است.

به جای اثبات این حکم، می توانیم عکس نقیض آن را نوشته و اثبات کنیم. پس داریم :

(عددی زوج است $a^2 \Rightarrow$ عددی زوج است a) $\equiv$ (عددی فرد است $a \Rightarrow$ عددی فرد است a^2)

اینک ثابت می کنیم، اگر a عددی زوج باشد، آنگاه a^2 عددی زوج است.

می دانیم که اگر a عددی زوج باشد، می توان آن را به صورت $2k$ نمایش داد.

در نتیجه داریم:

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \xrightarrow[k' \in \mathbb{Z}]{2k^2 = k'} a^2 = 2k' \Rightarrow$$ عددی زوج است a^2

تمرین تکمیلی

سوال ۸ : عکس نقیض رابطه زیر را بنویسید سپس آن را اثبات کنید.

اگر $n^۲$ مضرب ۵ باشد آنگاه n مضرب است.

اگر n مضرب ۵ نباشد آنگاه $n^۲$ مضرب ۵ نیست.

می دانیم که اگر n مضرب ۵ نباشد، می توان آن را به صورت $n \neq ۵k$ نمایش داد.

در نتیجه داریم :

$$n^۲ \neq (۵k)^۲ \neq ۲۵k^۲ \neq ۵(۵k^۲) \xrightarrow[k' \in \mathbb{Z}]{۵k^۲ = k'} n^۲ \neq ۵k' \Rightarrow$$ $n^۲$ مضرب ۵ نیست

مثال ۱ صفحه ۱۶ کتاب درسی

ایراد استدلال زیر را پیدا کنید.

«معادلهٔ $x^2 - x = 0$ تنها یک ریشه دارد و آن $x = 1$ است.»

۱) $x^2 - x = 0$

۲) $x(x-1) = 0$ تجزیهٔ معادله

۳) $\dfrac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} = \dfrac{0}{x}$ تقسیم طرفین بر x و ساده‌سازی

۴) $x - 1 = 0$ حاصل ساده‌سازی و تبدیل به معادله ساده‌تر

۵) $x = 1$ جواب معادله

در گام سوم نمی توان عبارت x را از صورت و مخرج ساده کرد، زیرا عامل ضربی مشترکی که از صورت و مخرج یک عبارت گویا خط می خورند باید مخالف صفر باشند.

مثال ۲ صفحه ۱۶ کتاب درسی

در اثبات گزارهٔ زیر ایراد استدلال را پیدا کنید.

« فرض کنید a و b و c اعداد حقیقی اند. داریم: $a < b \Rightarrow ac < bc$ »

۱) $a < b$

۲) $a + c < b + c$ طرفین را با c جمع می‌کنیم.

۳) $c(a + c) < c(b + c)$ طرفین نامساوی قبل را در c ضرب می‌کنیم.

۴) $ac + c^2 < bc + c^2$ c را در پرانتزها ضرب می‌کنیم.

۵) $ac + \cancel{c^2} < bc + \cancel{c^2}$ چون c^2 عددی همواره مثبت است، می‌توان آن‌را از طرفین کم کرد.

۶) $ac < bc$

در گام سوم نمی توان عدد حقیقی c را در طرفین نامعادله ضرب کرد، زیرا ممکن است c عددی منفی یا صفر باشد. تنها وقتی می توان این کار را انجام داد که c عددی مثبت باشد.

کار در کلاس صفحه ۱۷ کتاب درسی

سؤال زیر در یک امتحان ریاضی داده شده است.

« اگر $a = \dfrac{a-d}{c-d}$ و $a \neq 1$، آنگاه d مطلوب است.»

دانش آموزان از استدلال های زیر برای به دست آوردن d به کار برده اند. کدام یک از استدلال ها درست و کدام نادرست است؟ دلیل نادرستی هر استدلال غلط را بیان کنید.

(الف)

۱) $\cancel{a} = \dfrac{\cancel{a}-d}{c-d}$

۲) $0 = \dfrac{-d}{c-d}$

۳) $d = 0$

(ب)

۱) $a = \dfrac{a-d}{c-d}$

۲) $ac - ad = a - d$

۳) $ac - a = ad - d$

۴) $a(c-1) = (a-1)d$

۵) $\dfrac{\cancel{a}(c-1)}{\cancel{a}-1} = d$

۶) $-(c-1) = d$

(پ)

۱) $a = \dfrac{a-d}{c-d}$

۲) $a(c-d) = a - d$

۳) $ac - a = ad - d$

۴) $ac - a = (a-1)d$

۵) $\dfrac{ac-a}{a-1} = d$

الف) ایراد دارد. در گام اول، a در صورت عبارت عامل ضربی نیست که بتوان آن را ساده کرد.

ب) ایراد دارد. در گام پنجم، a در صورت عبارت عامل ضربی نیست که بتوان آن را ساده کرد.

پ) ایراد ندارد.

تمرین تکمیلی

سوال ۹ : دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

$$\frac{x+۱}{x+۲}-\frac{x-۳}{x+۲}=\frac{x+۱-x-۳}{x+۲}=\frac{-۲}{x+۲}$$

در این استدلال فقط x قرینه شده است ولی ۳- قرینه نشده است.

$$\frac{x+۱}{x+۲}-\frac{x-۳}{x+۲}=\frac{x+۱-x+۳}{x+۲}=\frac{۴}{x+۲}$$

تمرین ۲ صفحه ۱۸ کتاب درسی

در هر مورد گزاره ای همراه با یک استدلال نادرست برای آن داده شده است. دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

الف) اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، آنگاه مساحت آن نیز دو برابر می شود.

$$\text{طول} = x$$

$$\text{عرض} = y$$

$$\text{مساحت} = S_1 = x \times y = xy$$

$$S_2 = 2(xy)$$

$$S_2 = 2S_1$$

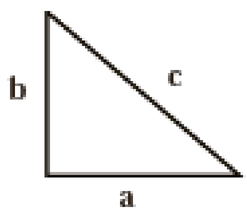
در این استدلال فقط طول دو برابر شده است و عرض تغییر نکرده است.

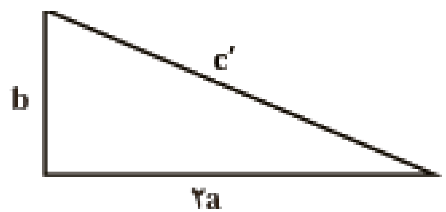
$S_2 = (2x)(2y) = 4xy \rightarrow S_2 = 4S_1$ **مساحت چهار برابر شده است**

تمرین ۲ صفحه ۱۸ کتاب درسی

در هر مورد گزاره ای همراه با یک استدلال نادرست برای آن داده شده است. دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

ب) در یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه a و b و وتر c ؛ همانند شکل زیر اگر ضلع a را دو برابر کنیم، آنگاه وتر آن نیز دو برابر می شود.





استدلال : می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ بالا قضیهٔ فیثاغورث به‌صورت زیر برقرار است : $c^2 = a^2 + b^2$

اکنون این رابطه را برای مثلث قائم‌الزاویهٔ جدید نیز می‌نویسیم :

$$c'^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2 = 4(\underbrace{a^2 + b^2}_{c^2}) = 4c^2 \Rightarrow c'^2 = 4c^2 \Rightarrow c' = 2c$$

پس وتر دو برابر شده است.

در این استدلال از عدد ۴ فاکتورگیری شده است که این عمل اشتباه است.

تمرین ۲ صفحه ۱۸ کتاب درسی

در هر مورد گزاره ای همراه با یک استدلال نادرست برای آن داده شده است. دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

پ) تساوی $\sqrt{\frac{12\times 3+4\times 16}{6}}=2\sqrt{11}$ برقرار است.

$$\sqrt{\frac{12\times 3+4\times 16}{6}}=\sqrt{\frac{12\times \cancel{3}+4\times 16}{2\times \cancel{3}}}=\sqrt{\frac{12+\overset{2}{\cancel{4}}\times 16}{\cancel{2}}}=\sqrt{12+32}=\sqrt{44}=\sqrt{4\times 11}=2\sqrt{11}$$

در گام اول این استدلال عمل ساده کردن عدد ۳ از صورت و مخرج اشتباه است.

تمرین ۳ صفحه ۱۸ کتاب درسی

گزاره های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگ تر از هفت برابر آن عدد، به علاوهٔ پنج است.

پ) مجموع معکوس های دو عدد بزرگ تر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

ت) مجموع مکعبات دو عدد بزرگ تر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

ث) هر عدد ناصفری از معکوس خود بزرگ تر یا مساوی با آن است.

الف) $۲\sqrt{x} = x$

ب) $x^{۳} > ۷x + ۵$

پ) $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} \geq x + y$

ت) $x^{۳} + y^{۳} > (x + y)^{۳}$

ث) $x \neq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{۱}{x}$

پایان درس دوم