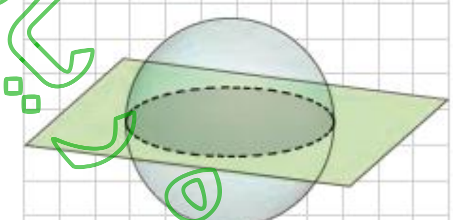
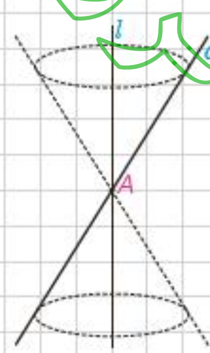
درس اوّل

# آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

## مقاطع مخروطی



در پایهٔ دهم با سطح مقطع صفحه با برخی اجسام هندسی آشنا شدید. فرض کنید یک کره را (مانند شکل) توسط یک صفحه قطع کنیم (برش دهیم). منظور از فصل مشترک خط و کره مجموعهٔ نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند. به نظر شما فصل مشترک یک صفحه و یک کره چه شکلی می‌تواند باشد؟



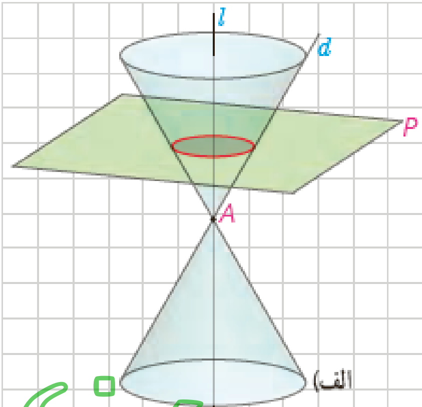

**رویهٔ مخروطی :** فرض کنید دو خط $d$ و $l$ در نقطهٔ $A$ (مانند شکل) متقاطع (غیرعمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط $d$ حول خط $l$ را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط $l$ را محور، نقطهٔ $A$ را رأس و خط $d$ را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

حال می‌خواهیم به‌طور شهودی با فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی، با توجه به حالت‌های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، آشنا شویم. از تصاویر ارائه شده برای درکِ بهتر شکل حاصل کمک بگیرید.

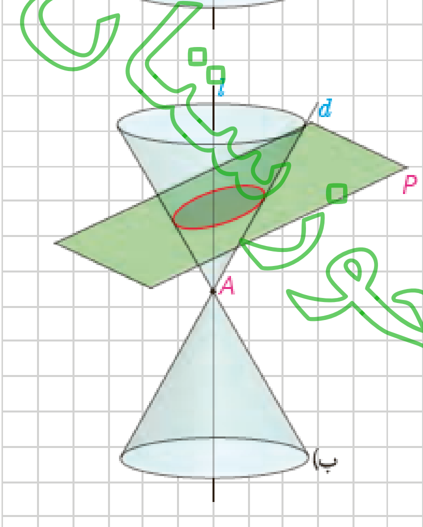
الف) در حالتی که صفحهٔ $P$ بر محورِ سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک **دایره** است.

ـ در چه حالتی فصل مشترک صفحهٔ $P$ و سطح مخروطی تنها نقطهٔ $A$ خواهد بود؟

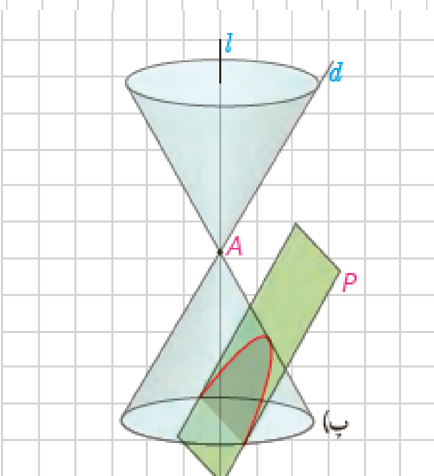
پاسخ : در حالتی که صفحه $P$ دو خط $l, d$ را در نقطه $A$ قطع کند.
فصل مشترک همان نقطه $A$ خواهد بود.



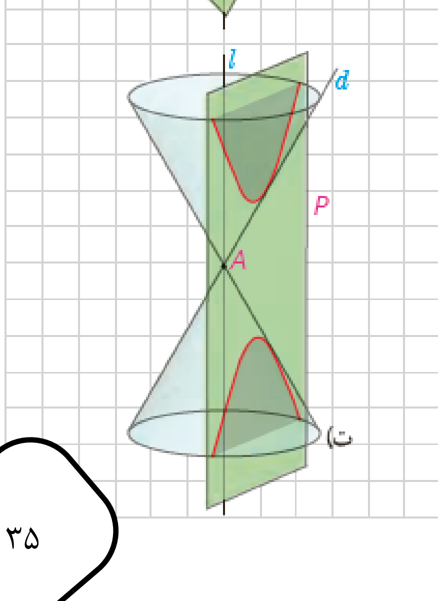

ب) در حالتی که صفحهٔ $P$ بر محور $l$ عمود نباشد و با مولدِ $d$ نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک **بیضی** خواهد بود.




پ) اگر صفحهٔ $P$ با مولد $d$ موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک **سهمی** است. (در این حالت اگر صفحه $P$ از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آنها یک خط است.)




ت) اگر صفحهٔ $P$ به‌گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور $l$ نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک **هذلولی** است. در این کتاب به تعریف دقیق و بررسی خواص **هذلولی** نخواهیم پرداخت.




با تعریف دایره آشنایی قبلی دارید. توجه داشته باشید که بیضی، سهمی و هذلولی نیز هر کدام تعاریف دقیق و مشخص دارند، اما اینکه چرا فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی مطابق با آنچه گفته شد دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی است، قابل اثبات است ولی ما در این کتاب به این اثبات‌ها نمی‌پردازیم. حال که با دایره، بیضی، سهمی و هذلولی (مقاطع مخروطی) به‌صورت شهودی آشنا شدیم، برای تعریف دقیق این اشکال، ابتدا مفهوم مکان هندسی را معرفی می‌کنیم.


۳۵

## مکان هندسی

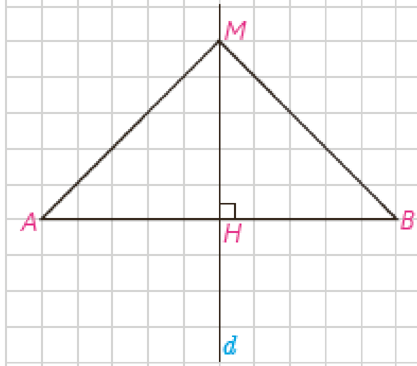
طریقهٔ رسم و ویژگی‌های عمود منصف یک پاره خط را از کتاب هندسهٔ ۱ به خاطر دارید. دو ویژگی زیر را یادآوری می‌کنیم :

ـ هر نقطه روی عمود منصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

ـ هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمود منصف آن است.

اگر خط $d$ عمودمنصف پاره‌خط $AB$ باشد، در این‌صورت

$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$




به‌طور خلاصه، یک نقطه روی عمود منصف پاره خط است، اگر و تنها اگر از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد.

به عبارت معادل، می‌گوئیم عمود منصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله‌اند.

به‌طور کلی مفهوم مکان هندسی به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

**تعریف:** مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

### فعالیت ۱

در کتاب هندسه ۱ با ویژگی‌ها و طریقهٔ رسم نیمساز زاویه آشنا شدید. دو قضیه مهم در مورد نیمساز زاویه را یادآوری کنید :

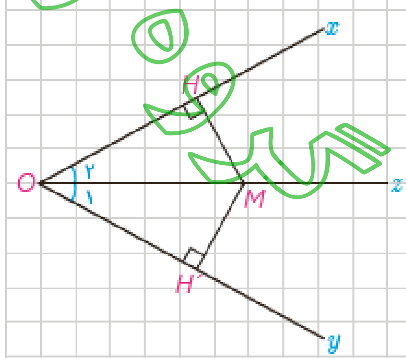
۱ــ هر نقطه روی نیمساز زاویه ............ از دو ضلع آن به یک فاصله است.

۲ــ هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله است ............ روی نیمساز زاویه است.

اکنون گزاره زیر را کامل کنید :

یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر ............ از دو ضلع آن به یک فاصله باشد.

$(\hat{O}_1 = \hat{O}_2) \quad M \in Oz \Leftrightarrow MH = MH'$




بنابراین می‌توان گفت :

نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که ............ از دو ضلع آن به یک فاصله باشد.

**فعالیت ۲**

دایرهٔ $C$ به مرکز $O$ و شعاع $r$ را در نظر بگیرید.

الف) هر نقطهٔ دلخواه $A$ روی دایره، از $O$ چه فاصله‌ای دارد؟ پاسخ : $r$

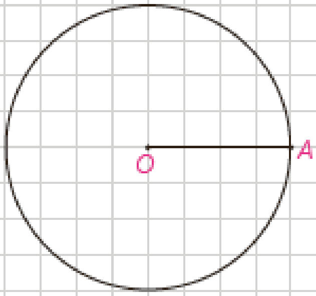
ب) اگر $B$، یک نقطه در صفحه باشد و از $O$ به فاصلهٔ $r$ باشد $(OB=r)$ با برهان خلف نشان دهید، $B$ روی دایره است و از (الف) و (ب) نتیجه بگیرید :

$A \in C \Leftrightarrow OA=r$

فرض کنیم $B$ روی دایره $(C)$ نباشد . در این صورت :

الف : اگر $B$ داخل دایره باشد. آنگاه $OB < r$ که این خلاف فرض است.

ب : اگر $B$ خارج دایره باشد. آنگاه $OB > r$ که این نیز خلاف فرض است.




**نتیجه**

نقطهٔ $A$ روی دایرهٔ $C(O,r)$ است، اگر و فقط اگر $OA = r$

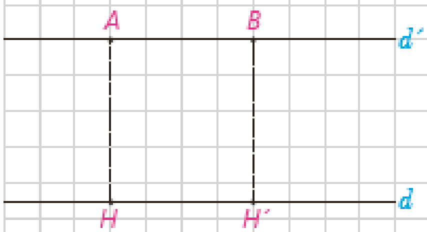
**نتیجه**

دایرهٔ $C(O,r)$ مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از نقطه $O$ به فاصله $r$ باشند

**فعالیت ۳**

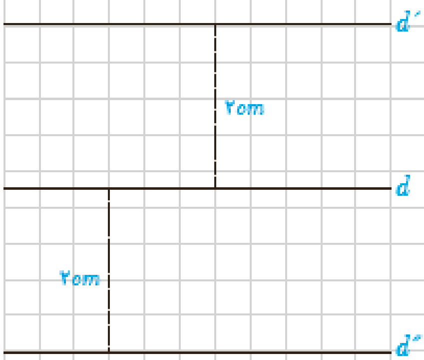
دو خط موازی $d$ , $d'$ را که فاصلهٔ آنها از هم ۲ سانتی‌متر است، در نظر بگیرید. آیا نقطه‌های دلخواه $A$ و $B$ روی $d'$، از خط $d$ فاصلهٔ یکسانی دارند؟ * این فاصله چقدر است؟ ** آیا می‌توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از $d$ به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشند و روی $d'$ نباشند؟ *** همه نقاطی که از $d$ به فاصله ۲ سانتی‌متر واقع‌اند، روی چه شکلی قرار دارند؟ ****

* بله   ** ۲ سانتی متر   *** بله   **** دو خط موازی




آیا گزاره زیر درست است؟ بله

یک نقطه در صفحه، از خط $d$ به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط $d'$ و $d''$ که موازی $d$ هستند، واقع باشد.




آیا نتیجه‌گیری زیر درست است؟ بله

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط $d$ به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر هستند، دو خط راست موازی $d$ (در دو طرف آن) و به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از آن می‌باشد.

## مکان‌های هندسی مهم در صفحه :

ـ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ ثابت $A$ و $B$ در صفحه به یک فاصله‌اند، عمودمنصف $AB$ است.

ـ مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است.

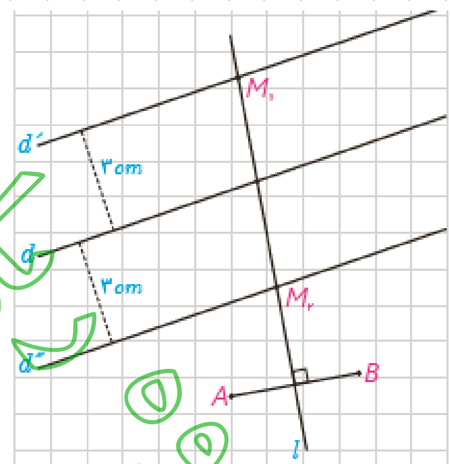
ـ مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ ثابت $O$ به فاصله ثابت $k$ قرار دارند، دایره‌ای به مرکز $O$ و به شعاع k است.

ـ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط $d$ به فاصلهٔ ثابت $k$ قرار دارند، دو خط موازی $d$، به فاصلهٔ $k$ از آن و در دو طرف آن است.

## کاربرد مکان هندسی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای مکان هندسی، ترسیم‌های هندسی و یافتن نقطه (یا نقاطی) است که دارای ویژگی معینی باشند. بدیهی است که اگر $S_1$ مکان هندسی نقاطی با ویژگی $P_1$ و $S_2$ مکان هندسی نقاطی با ویژگی $P_2$ باشد، $S_1 \cap S_2$ مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی $P_1$ و $P_2$ را دارند. بنابراین برای یافتن نقاطی که این دو ویژگی را داشته باشند، باید نمودارهای $S_1$ و $S_2$ را رسم کرده و نقطه (یا نقاط) برخورد آنها را به‌دست آورد.

**مثال :** دو نقطه $A$ و $B$ و خط $d$ که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله بوده و از $d$ به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد.




**حل :** مکان هندسی نقاطی که از $A$ و $B$ به یک فاصله‌اند، عمود منصف $AB$ و مکان هندسی نقاطی که از خط $d$ به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد، دو خط موازی $d$ به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن هستند. بنابراین نقطهٔ برخورد خط $l$ (عمود منصف $AB$) و دو خط موازی $d'$ و $d''$ جواب مسئله است (نقاط $M_1$ و $M_2$).

**بحث در وجود جواب :** اگر $l$ یکی از دو خط $d'$ و $d''$ را قطع کند دیگری را هم قطع می‌کند و مسئله مانند شکل، ۲ جواب دارد. اگر $l$ با دو خط موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر $l$ بر یکی از دو خط $d'$ و $d''$ منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

## تمرین

۱ــ مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید :

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع $d$ و $d'$ به یک فاصله‌اند.

ب) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط $d$ در نقطهٔ ثابت $A$ مماس‌اند.

پ) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت $r$ که بر خط $d$ در صفحه مماس‌اند.

ت) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت $r$ که بر دایرهٔ $C(O,r)$ در صفحهٔ این دایره مماس خارجی‌اند.

۲ــ نقاط $A$،$B$،$C$ و $D$ در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله و از $C$ و $D$ نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

۳ــ نقاط $A$،$B$ و $C$ در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

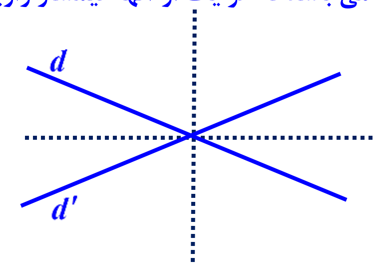
۴ــ نقطهٔ $A$ و خط $d$ در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از $A$ به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از $d$ به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۵ــ هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟

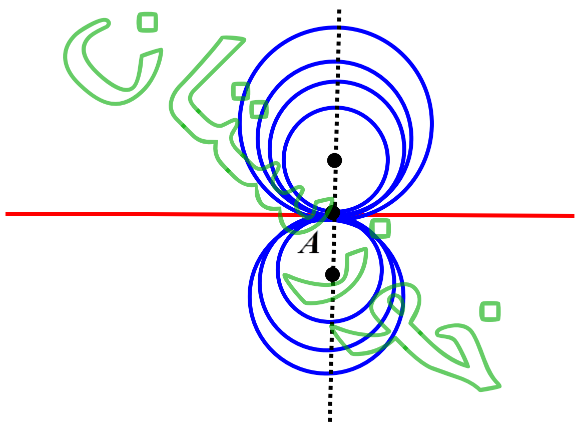
۶ــ هرگاه دو خط $d$ و $l$ موازی باشند، از دوران $d$ حول $l$ سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحهٔ $P$، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

**پاسخ تمرین ۱ :**

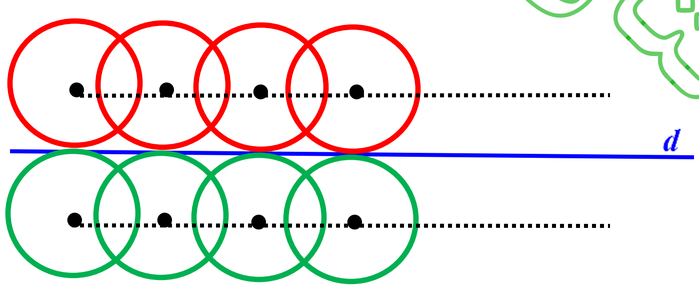
الف : مکان هندسی نقطه ای از صفحه که از دو خط متقاطع $d,d'$ به یک فاصله است. دو خط عمود برهم می باشدکه هر یک از آنها نیمساز زاویه ی بین دو خط $d,d'$ است.



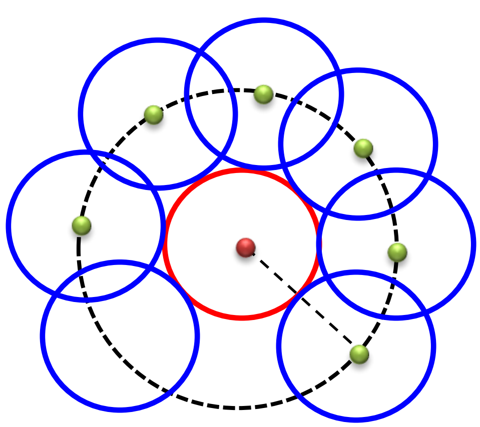

ب : مکان هندسی مرکز دایره ای که در نقطه ی $A$ بر خط $d$ مماس است . خطی است که در نقطه $A$ بر $d$ عمود می باشد.




پ : مکان هندسی مرکز دایره ای به شعاع $r$ که در صفحه بر خط $d$ مماس است . دو خط موازی با خط $d$ می باشد که فاصله هریک آنها از $d$ مساوی $r$ است.




ت : مکان هندسی مرکز دایره ای به شعاع $r$ که بر دایره ی $C(O,r)$ مماس خارج است دایره $C(O,2r)$ می باشد.

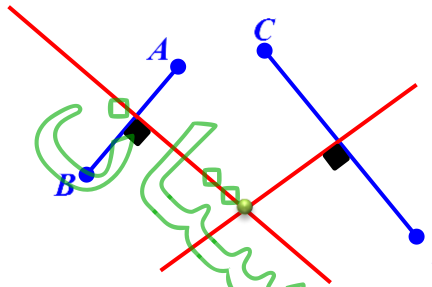


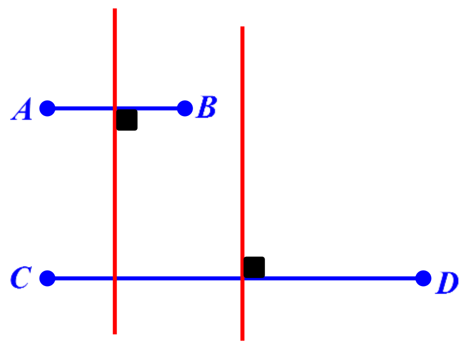
**پاسخ تمرین ۲**

کافی است محل تقاطع عمود منصف های دو پاره خط $AB , CD$ را تعیین کنیم .

بحث : اگر $AB \nparallel CD$ عمود منصف های این دو پاره خط ، یکدیگر را فقط در یک نقطه قطع می کنند و مساله در این حالت فقط یک جواب دارد.

ولی اگر $AB \parallel CD$ عمود منصف های این دو پاره خط ، موازی اند و مساله در این حالت فقط هیچ جوابی جواب ندارد.




**پاسخ تمرین ۳**

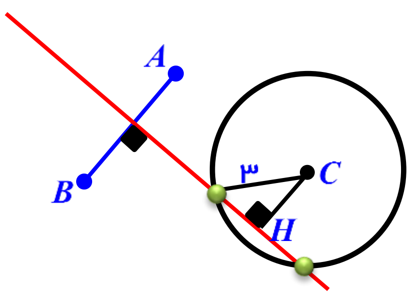
کافی است محل تقاطع عمود منصف پاره خط $AB$ و دایره ای به مرکز $C$ و شعاع ۳ را تعیین کنیم .

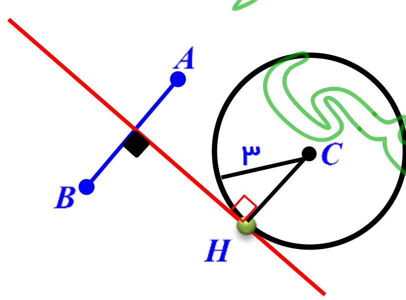
بحث : فرض کنیم $d$ عمود منصف پاره خط $AB$ است . اگر $CH$ فاصله $C$ تا خط $d$ باشد سه حالت زیر را به تفکیک بررسی می کنیم.

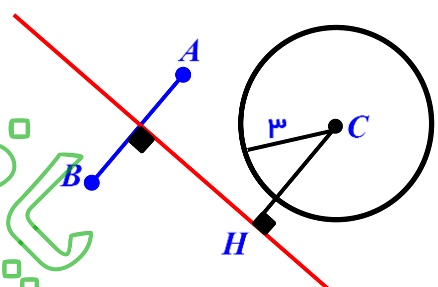
الف : اگر $CH < ۳$ : در این حالت خط $d$ دایره را در ۲ نقطه قطع می کند و مساله دو جواب دارد

ب : اگر $CH = ۳$ : در این حالت خط $d$ بر دایره مماس و دایره را در ۱ نقطه قطع می کند لذا مساله فقط یک جواب دارد.

ج : اگر $CH > ۳$ : در این حالت خط $d$ دایره را قطع نمی کند و مساله هیچ جوابی ندارد



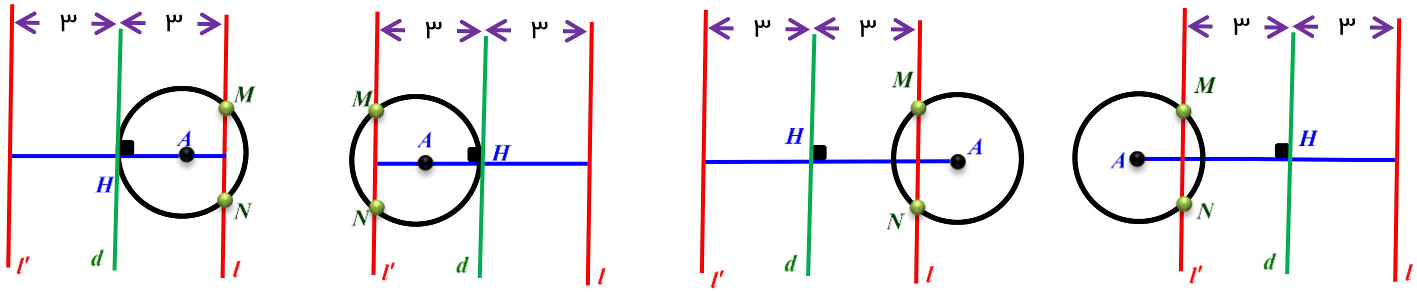




**پاسخ تمرین ۴**

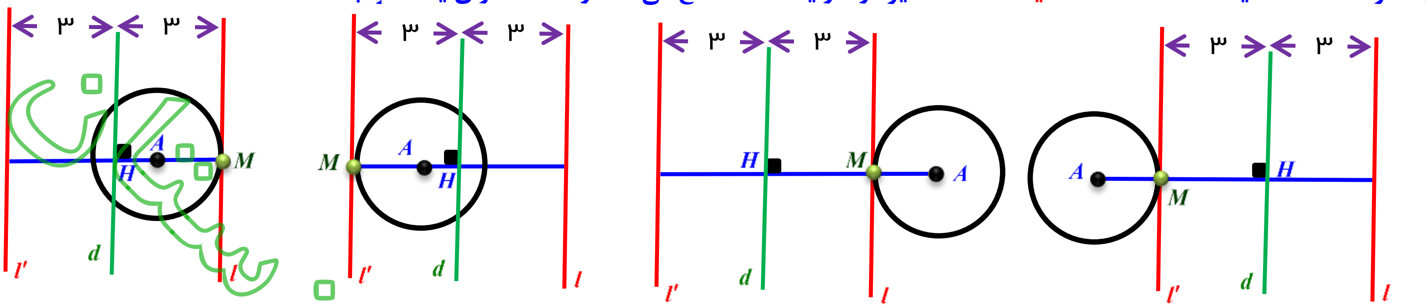
مکان هندسی نقطه ای که از $A$ به فاصله ۲ باشد دایره ای به مرکز $A$ و شعاع ۲ است . و مکان هندسی نقطه ای که از خط $d$ به فاصله ۳ باشد دو خط $l , l'$ موازی با خط $d$ است که فاصله هریک آنها از $d$ مساوی ۳ است. محل تقاطع این دو مکان هندسی پاسخ مساله است.

بحث : فرض کنیم $AH$ فاصله ی $A$ تا خط $d$ باشد. با توجه به اندازه شعاع دایره و مکان نقطه ی $A$ یکی از حالت های زیر رخ می دهد.

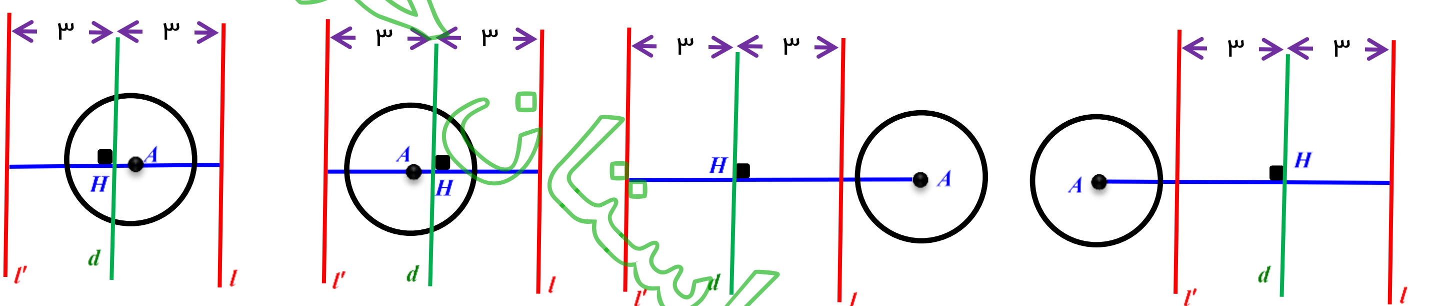
الف :اگر $۳-۲=۱ < AH < ۵=۳+۲$ خط $l$ (یا خط $l'$ ) دایره را در دو نقطه قطع می کند و مساله دارای دو جواب است.




ب :اگر $AH = ۵$ یا $AH = ۱$ خط $l$ (یا خط $l'$ ) دایره را در یک نقطه قطع می کند و مساله دارای یک حواب است.

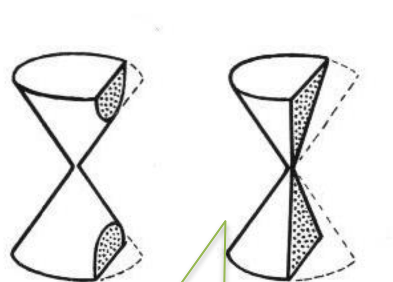



ج :اگر $AH > ۵$ یا $AH < ۱$ خط $l$ (یا خط $l'$ ) دایره را در هیچ نقطه ای قطع نمی کند و مساله جوابی ندارد.




## پاسخ تمرین ۵

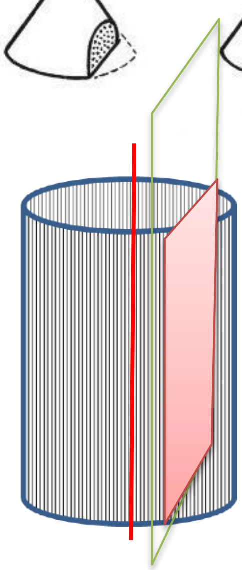
مکان هندسی خواسته شده دو خط متقاطع می باشد



## پاسخ تمرین ۶

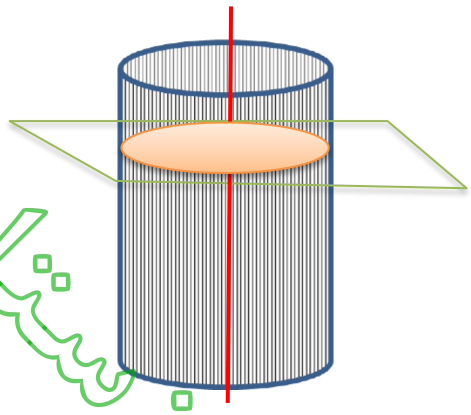
الف : اگر خط $l$ با صفحه $p$ موازی بوده و فاصله دو خط $d,l$ بیشتر از فاصله خط $l$ تا صفحه $p$ باشد . سطح مقطع ایجاد شده سطح بین دو خط موازی است.

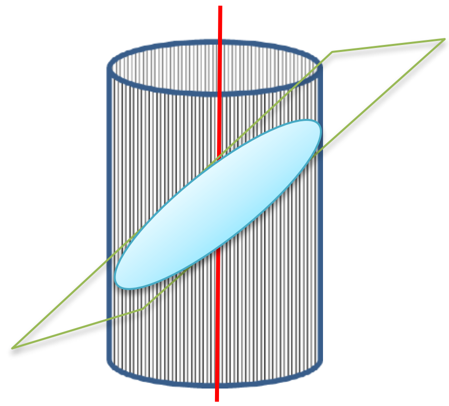
ب : اگر خط $l$ با صفحه $p$ موازی بوده و فاصله دو خط $d,l$ مساوی فاصله خط $l$ تا صفحه $p$ باشد . سطح مقطع ایجاد شده ، فقط یک خط موازی با $l$ است.



ج : اگر خط $l$ بر صفحه $p$ عمود باشد . سطح مقطع ایجاد شده سطح یک دایره است.

د : اگر خط $l$ و صفحه $p$ متقاطع بوده ولی بر هم عمود نباشند . سطح مقطع ایجاد شده سطح یک بیضی است.

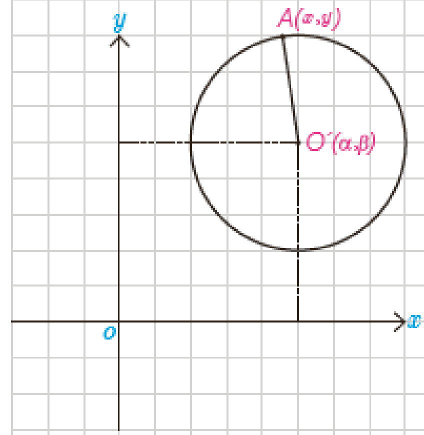




درس دوم

# دایـــره

معروف‌ترین مقطع مخروطی، دایره است و چنانچه قبلاً دیدیم، دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز دایره) به فاصله‌ای ثابت (شعاع دایره) واقع‌اند. حال می‌خواهیم ویژگی‌های دایره را به صورت تحلیلی در دستگاه مختصات دوبعدی با هم مرور کنیم.

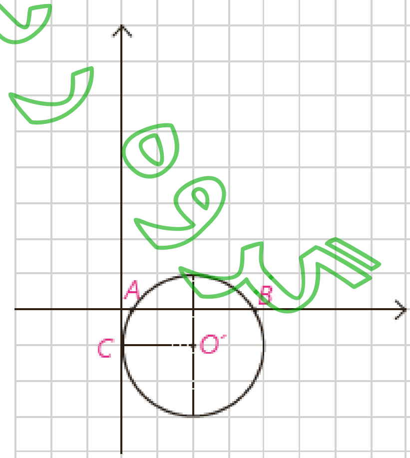



ـ **معادلهٔ دایره :** دایرهٔ $C(O',r)$ را در دستگاه مختصات $xoy$ در نظر می‌گیریم. اگر $O'(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد و $A(x,y)$ یک نقطهٔ دلخواه روی آن باشد، با توجه به تعریف دایره، همواره $O'A=r$ و با توجه به دستور تعیین فاصلهٔ بین دو نقطه می‌توان نوشت :

$$|O'A|=\sqrt{(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}}=r\Rightarrow \boxed{(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=r^{۲}}$$

و این معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(\alpha,\beta)$ و شعاع $r$ است، که به آن معادلهٔ استاندارد دایره نیز می‌گوئیم.

**مثال :** معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O'(۲,-۱)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به‌دست آورید.




**حل :** به کمک دستور بالا معادلهٔ استاندارد دایرهٔ فوق نوشته می‌شود :

$(x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۴$

اگر در این معادله، $y=۰$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور $x$ها به‌دست می‌آید :

$(x-۲)^{۲}+۱=۴\Rightarrow (x-۲)^{۲}=۳$

$\Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۳}\Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۳}$

لذا دایره فوق محور $x$ها را در نقاط $A(۲-\sqrt{۳},۰)$ و $B(۲+\sqrt{۳},۰)$ قطع می‌کند و اگر در معادلهٔ دایره، $x=۰$ قرار دهیم نقاط برخورد با محور yها پیدا می‌شوند :

$x=۰\Rightarrow (y+۱)^{۲}=۰\Rightarrow y=-۱$

بنابراین دایرهٔ فوق محور $y$ها را فقط در یک نقطهٔ $C(0,-1)$ قطع می‌کند و می‌دانیم که اگر یک خط دایره‌ای را فقط در یک نقطه قطع کند، در آن نقطه بر آن مماس است. پس همان‌طور که در شکل هم دیده می‌شود، دایره در نقطهٔ $C$ بر محور $y$ها مماس است.

در معادلهٔ دایره می‌توانیم به کمک اتحادها، عبارت‌های درجهٔ دوم را ساده کنیم، مثلاً در معادلهٔ فوق داریم :

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow$$

$$x^2-2x+4+y^2+2y+1=4 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2-2x+2y+1=0$$

که این معادله را **معادلهٔ ضمنی** دایره می‌نامیم.

**ــ تبدیل معادلهٔ ضمنی دایره به معادلهٔ استاندارد :**

در حالت کلی معادله‌ای به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ممکن است معادلهٔ دایره‌ای باشد. برای این منظور عبارت‌های $x^2+ax$ و $y^2+by$ را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم.

**مثال :** مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ را به‌دست آورید.

**حلّ :**

$$x^2+2x+y^2-4y=-1 \Rightarrow (x+1)^2-1+(y-2)^2-4=-1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow O'(-1,2), r=2$$

**فعالیت ۱**

می‌خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را در حالت کلی به‌دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید :

$$(x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4})+(y^2+by+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4})+c=0 \Rightarrow$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2-\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=0 \Rightarrow$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

$$\Rightarrow O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}), r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه‌ای دربارهٔ $c,b,a$ به‌دست می‌آید؟

معادله $x^2+y^2+ax+by+c=0$ یک دایره است اگر و تنها اگر $a^2+b^2-4c>0$

رابطهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2+b^2>4c$ باشد و اگر $a^2+b^2<4c$ باشد، این معادله هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند و اگر $a^2+b^2=4c$ باشد، این معادله تنها یک نقطه به مختصات $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ را در صفحه مشخص می‌کند (چرا؟)

**نتیجه**

**با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می‌توان معادلهٔ آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادلهٔ دایره می‌توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.**



**کار در کلاس**

۱ــ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ و شعاع آن ۳ واحد باشد.

۲ــ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r به چه صورت است؟

۳ــ کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها را به‌دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف) $x^2+y^2-2x-6y-1=0$

ب) $x^2+y^2+2x+3y+4=0$

ج) $2x^2+2y^2-3x+4y-2=0$

**مثال :** معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-2,-1)$ مرکز آن و $M(1,1)$ یک نقطه از آن باشد.

**حل :** مرکز دایره را داریم، پس باید طول شعاع آن را داشته باشیم تا معادلهٔ آن را بنویسیم. روشن است که $OM=r$ پس طول $OM$ را به‌دست می‌آوریم :

$$OM=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}=\sqrt{(1+2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{13}$$

و معادله دایره به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(x+2)^2+(y+1)^2=13$$

**پاسخ سوال ۱ کاردرکلاس**

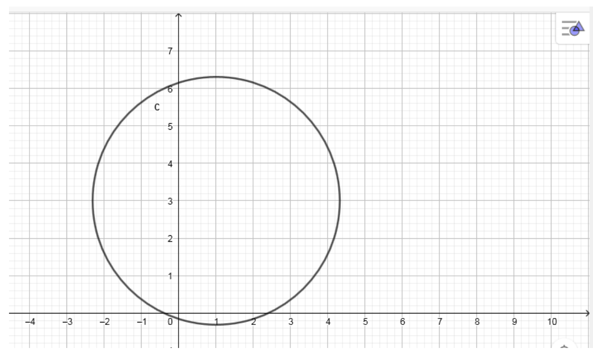
$$O(0,1), r=3 \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=3^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=9$$

**پاسخ سوال ۲ کاردرکلاس**

$$O(0,0) \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2=r^2$$

**پاسخ سوال ۳ کاردرکلاس**

**الف :**

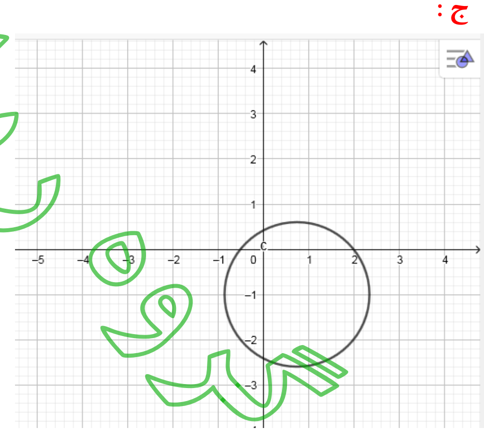


$$x^2+y^2-2x-6y-1=0 \Rightarrow a=-2, b=-6, c=-1$$
$$\Rightarrow a^2+b^2-4c=4+36+4=44>0$$
$$O'\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O'(1,3), r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{44}}{2}=\frac{2\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$$

**ب :**

$$x^2+y^2+2x+3y+4=0 \Rightarrow a=2, b=3, c=4$$
$\Rightarrow a^2+b^2-4c=4+9-16=-3<0 \Rightarrow$ این معادله هیچ نقطه ای از صفحه را مشخص نمی کند.

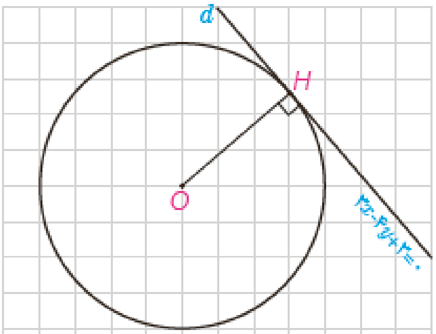
**ج :**



$$2x^2+2y^2-3x+4y-2=0 \Rightarrow x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y-1=0 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}, b=2, c=-1$$
$$\Rightarrow a^2+b^2-4c=\frac{9}{4}+4+4=\frac{41}{4}>0$$
$$O'\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right) \Rightarrow O'\left(\frac{3}{2},-1\right), r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{41}{4}}}{2}=\frac{\sqrt{41}}{4}$$

## فعالیت ۲

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(1,-1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادلهٔ $3x-4y+3=0$ مماس باشد.




۱ــ با توجه به آنچه از هندسهٔ ۲ به یاد دارید، شعاع دایره در نقطهٔ تماس $(H)$ برخط

عمود است

۲ــ طول شعاع دایره برابر است با فاصلهٔ مرکز دایره از . خط مماس

۳ــ به کمک دستور فاصلهٔ نقطه از خط داریم : ..

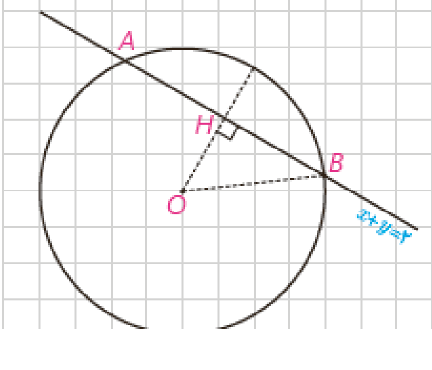
$$r=OH=\frac{|3(1)-4(-1)+3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$$

۴ــ معادلهٔ دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می‌نویسیم :

$$(x-1)^2+(y+1)^2=4$$

## کاردرکلاس

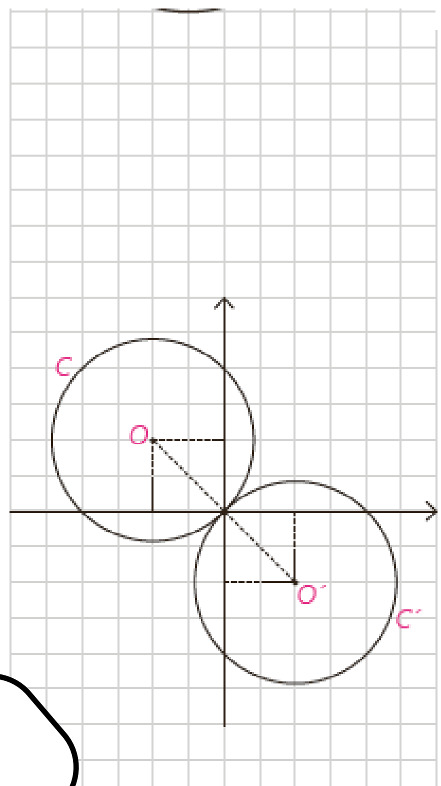
معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.




$$AB=2\sqrt{2}\Rightarrow AH=BH=\sqrt{2}\ ,\ OH=\frac{|1(0)+1(1)-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$r=OB=\sqrt{OH^2+BH^2}=\sqrt{2+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$$

**مثال :** معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(-1,1)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ از مماس بیرونی باشد.




**حل :** مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ فوق را به‌دست می‌آوریم :

$$x^2-2x+y^2+2y=0\Rightarrow$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=2\Rightarrow O'(1,-1), r'=\sqrt{2}$$

و چنانچه از هندسهٔ ۲ می‌دانیم اگر $d=OO'$ طول خط المرکزین دو دایرهٔ مماس خارج باشد، $d=r+r'$ بنابراین داریم :

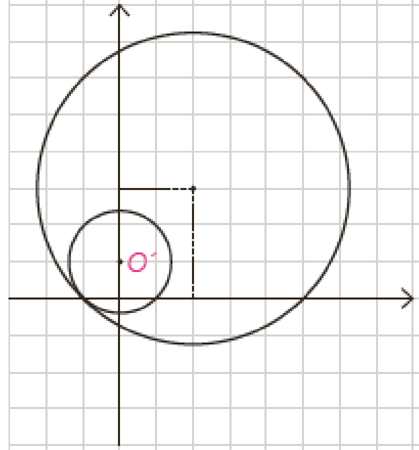
$$d=OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$d=2\sqrt{2}=r+\sqrt{2}\Rightarrow r=\sqrt{2}$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادلهٔ دایرهٔ $C$ را می‌نویسیم :

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2\Rightarrow x^2+y^2+2x-2y=0$$

## فعالیت ۳




معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و با دایرهٔ $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد.

۱ــ معادلهٔ دایره فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

$$(x-2)^2+(y-3)^2=16 \Leftrightarrow O'(2,3), r'=4$$

۲ــ طول خط المرکزین دو دایره را به‌دست می‌آوریم :

$$d=OO'=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

۳ــ با توجه به آنچه از هندسه ۲ می‌دانیم، داریم :

$$d=|r-r'| \Rightarrow |r-4|=2\sqrt{2} \Rightarrow r-4=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r=4\pm 2\sqrt{2}$$

۴ــ با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می‌نویسیم :

$$(x-0)^2+(y-1)^2=(4\pm 2\sqrt{2})^2$$

چرا مسئله دو جواب دارد؟

چون مشخص نیست از دو دایره ، کدام یک درونی و کدامیک بیرونی است با توجه به این دو نوع جواب بدست می آید

## کاردرکلاس

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2-4x-6y=3$ , $x^2+y^2-10x-14y+73=0$

ب) $x^2+y^2-2x=1$ , $x^2+y^2=1$

ج) $x^2+y^2=9$ , $x^2+y^2-2x+2y+1=0$

د) $x^2+y^2=4$ , $x^2+y^2-8x-4y+19=0$

(**راهنمایی:** مختصات مرکز و طول شعاع‌های هر دو دایره را به‌دست آورده و پس از تعیین طول خط المرکزین از اطلاعات خود از هندسه ۲ استفاده کنید.)

**پاسخ سوال کار درکلاس**

**الف :**

$$x^{۲}+y^{۲}-۴x-۶y=۳ \Rightarrow O(۲,۳), r=\frac{\sqrt{۱۶+۳۶+۱۲}}{۲}=۴$$

$$x^{۲}+y^{۲}-۱۰x-۱۴y+۷۳=۰ \Rightarrow O'(۵,۷), r'=\frac{\sqrt{۱۰۰+۱۹۶+۲۹۲}}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow d=OO'=\sqrt{(۵-۲)^{۲}+(۷-۳)^{۲}}=۴\ ,\ r+r'=۴+۱=۵, |r-r'|=۴-۱=۳$$

$\Rightarrow |r-r'|<d<r+r' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع اند

**ب :**

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x=۱ \Rightarrow O(۱,۰), r=\frac{\sqrt{۴+۰+۴}}{۲}=\sqrt{۲}$$

$$x^{۲}+y^{۲}=۱ \Rightarrow O'(۰,۰), r'=۱$$

$$\Rightarrow d=OO'=\sqrt{(۰-۱)^{۲}+(۰-۰)^{۲}}=۱\ ,\ r+r'=۱+\sqrt{۲}, |r-r'|=\sqrt{۲}-۱$$

$\Rightarrow |r-r'|<d<r+r' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع اند

**ج :**

$$x^{۲}+y^{۲}=۹ \Rightarrow O(۰,۰), r=۳$$

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y+۱=۰ \Rightarrow O'(۱,-۱), r'=\frac{\sqrt{۴+۴-۴}}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow d=OO'=\sqrt{(۰-۱)^{۲}+(۰+۱)^{۲}}=\sqrt{۲}\ ,\ r+r'=۳+۱=۴, |r-r'|=۳-۱=۲$$

$\Rightarrow d<|r-r'| \Rightarrow$ دو دایره متداخل اند

**د :**

$$x^{۲}+y^{۲}=۴ \Rightarrow O(۰,۰), r=۲$$

$$x^{۲}+y^{۲}-۸x-۴y+۱۹=۰ \Rightarrow O'(۴,-۲), r'=\frac{\sqrt{۶۴+۱۶-۷۶}}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow d=OO'=\sqrt{(۴-۰)^{۲}+(-۲-۰)^{۲}}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}\ ,\ r+r'=۲+۱=۳, |r-r'|=۲-۱=۱$$

$\Rightarrow r+r'<d \Rightarrow$ دو دایره برون هم هستند

## فعالیت ۴

می‌خواهیم وضعیت خط به معادلهٔ $x+y=4$ و دایرهٔ $x^2+y^2-2y-3=0$ را تعیین کنیم.

روش اول: از معادلهٔ خط، $y=4-x$ را در معادلهٔ دایره جایگزین می‌کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه‌های برخورد از معادله حاصل به‌دست می‌آید):

$x^2+(4-x)^2-2(4-x)-3=0\Rightarrow\cdots$

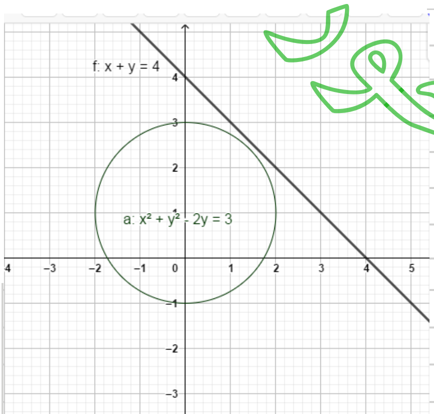
$$x^2+(4-x)^2-2(4-x)-3=0$$
$$x^2+16-8x+x^2-8+2x-3=0$$
$$2x^2-6x+5=0$$
$$\Rightarrow \Delta=36-4(2)(5)=-4<0$$

با ساده‌کردن معادلهٔ حاصل و تعیین علامت $\Delta$، نشان دهید معادلهٔ فوق ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش دوم: معادلهٔ دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصلهٔ مرکز دایره از خط را بیابید. چگونه تشخیص می‌دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

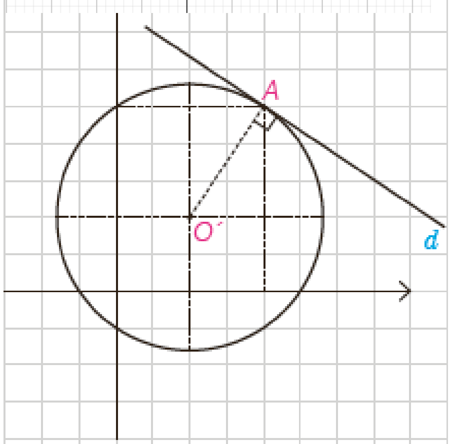
$$x^2+y^2-2y-3=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=4$$
$$\Leftrightarrow O(0,1)\ ,r=2$$
$$\Rightarrow OH=\frac{|1(0)+1(1)-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow OH^2>r^2\Rightarrow OH>r$$

با رسم شکل خط و دایره در یک دستگاه مختصات، درستی نتیجه‌گیری‌تان را ببینید.




**سؤال:** اگر در معادلهٔ حاصل از برخورد خط و دایره، $\Delta>0$ یا $\Delta=0$ شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت‌ها فاصله مرکز دایره از خط چگونه است؟

**مثال:** در نقطهٔ $A(2,3)$ روی دایرهٔ $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.




**حل:** با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، با تعیین مختصات مرکز دایره شیب $OA$ را تعیین می‌کنیم و از آنجا شیب مماس را به‌دست آورده و معادله آن را تعیین می‌کنیم.

$$(x-1)^2+(y-1)^2=5\Rightarrow O(1,1)\Rightarrow m_{OA}=\frac{3-1}{2-1}=2\Rightarrow$$

$$m_d=-\frac{1}{2}\Rightarrow y-3=-\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow \text{d معادله مماس}: y=-\frac{1}{2}x+4$$

۱ــ معادله دایره‌ای را بنویسید که :

الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و برخط $3x+4y=0$ مماس باشد.

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

۲ــ حدود a را طوری به‌دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد.

۳ــ وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

۴ــ وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2=4 \quad , \quad x^2+y^2-2x=4$

ب) $x^2+(y-1)^2=1 \quad , \quad (x-1)^2+y^2=1$

ج) $x^2+y^2=1 \quad , \quad x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

د) $x^2+y^2=1 \quad , \quad x^2+y^2-6x-2y+9=0$

۵ــ نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث $ABC$ هستند. معادلهٔ دایره محیطی مثلث $ABC$ را بنویسید. سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در رأس $B$ به‌دست آورید.

۶ــ وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $3x+4y=0 \quad , \quad x^2+y^2-4x-4y+7=0$

ب) $x+y=2 \quad , \quad x^2+y^2=2$

ج) $x+y=1 \quad , \quad x^2+y^2-2x-2y=2$

## پاسخ تمرین۱

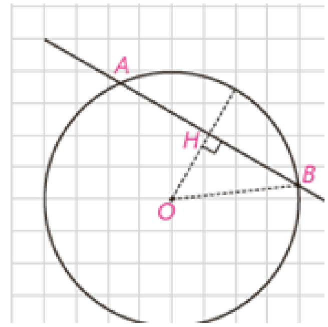
الف :

$$r = OA = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

ب :

$$r = OH = \frac{|3(2)+4(1)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

پ :




$$AB = 2 \Rightarrow AH = BH = 1$$

$$OH = \frac{|1(-1)+1(-1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

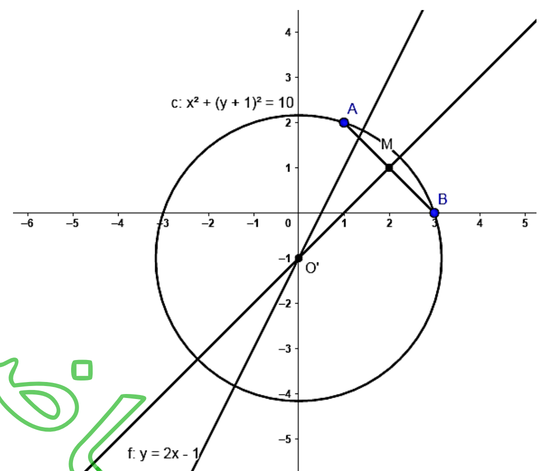
$$r = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{1+\frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{11}{2}$$

ت :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=-1 \Rightarrow O'(2,-1)$$

$$r = \frac{|4(2)+3(-1)-6|}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{25}$$

ج :




$$A(1,2), B(3,0) \Rightarrow M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2,1)$$

$$m_{AB} = \frac{0-2}{3-1} = -1 \Rightarrow m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow y-1 = 1(x-2) \Rightarrow y = x-1$$

$$\begin{cases} y = x-1 \\ y = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow x=0, y=-1 \Rightarrow O'(0,-1) \Rightarrow r = O'A = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 10$$

## پاسخ تمرین ۲

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 4c = 9 + 25 - 4a > 0$$

$$\Rightarrow 34 - 4a > 0 \Rightarrow a < \frac{34}{4} = \frac{17}{2}$$

## پاسخ تمرین ۳

$x^2+y^2-2x+4y-5=0$

$A(-1,-1)\Rightarrow 1+1-2(-1)+4(-1)-5=-5<0\Rightarrow$ نقطه درون دایره قرار دارد

$B(1,-2)\Rightarrow 1+4-2(1)+4(-2)-5=-16<0\Rightarrow$ نقطه درون دایره قرار دارد

$C(2,3)\Rightarrow 4+9-2(2)+4(3)-5=21>0\Rightarrow$ نقطه بیرون دایره قرار دارد

$D(4,-1)\Rightarrow 16+1-2(4)+4(-1)-5=0\Rightarrow$ نقطه روی دایره قرار دارد

## پاسخ تمرین ۴

الف :

$x^2+y^2=4\Leftrightarrow O(0,0),r=2\quad ,x^2+y^2-2x=4\Leftrightarrow O'(1,0),r'=\sqrt{5}$

$d=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2}=1\ ,r+r'=2+\sqrt{5}\ ,|r-r'|=\sqrt{5}-2\Rightarrow |r-r'|<d<r+r'\Rightarrow$ دو دایره متقاطع اند.

ب:

$x^2+(y-1)^2=1\Rightarrow O(0,1)\ ,r=1\ ,\ (x-1)^2+y^2=1\Rightarrow O'(0,1)\ ,r'=1$

$d=OO'=\sqrt{(1-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2},r+r'=2,|r-r'|=0\Rightarrow |r-r'|<d<r+r'\Rightarrow$ دو دایره متقاطع اند.

ج :

$x^2+y^2=1\Leftrightarrow O(0,0),r=1\ \ ,\ x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0\Leftrightarrow O'\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),r'=\frac{\sqrt{18+18-4(5)}}{2}=2$

$d=OO'=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0\right)^2}=3\Rightarrow r+r'=3,|r-r'|=1\Rightarrow d=r+r'\Rightarrow$ دو دایره مماس برون هستند.

د :

$x^2+y^2=1\Rightarrow O(0,0)\ ,r=1\ ,\ x^2+y^2-6x-2y+9=0\Rightarrow O'(3,1)\ ,r'=1$

$d=OO'=\sqrt{(3-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10},r+r'=2,|r-r'|=0\Rightarrow d>r+r'\Rightarrow$ دو دایره متخارج اند.

## پاسخ تمرین ۵

$B(1,1),A(-1,-1)\Rightarrow N\left(\frac{1+(-1)}{2},\frac{1+(-1)}{2}\right)\Rightarrow N(0,0),m_{AB}=\frac{1-(-1)}{1-(-1)}=1\xrightarrow{d\perp AB} m_d=\frac{-1}{m_{AB}}=\frac{-1}{1}=-1$

$\Rightarrow y-0=-1(x-0)\Rightarrow \boxed{y=-x}$

$C(1,-3),A(-1,-1)\Rightarrow M\left(\frac{1+(-1)}{2},\frac{-3+(-1)}{2}\right)\Rightarrow N(0\ ,-2),m_{AB}=\frac{-3-(-1)}{1-(-1)}=-1\xrightarrow{d\perp AB} m_d=\frac{-1}{m_{AB}}=\frac{-1}{-1}=+1$

$\Rightarrow y-(-2)=1(x-0)\Rightarrow \boxed{y=x-2}$

$\begin{cases}y=-x\\ y=x-2\end{cases}\Rightarrow x=1\ ,y=-1\Rightarrow O(1\ ,-1)\Rightarrow r=OA=\sqrt{(1+1)^2+(1-1)^2}=2\Rightarrow (x-1)^2+(x+1)^2=4$

پاسخ تمرین ۶

الف :

$$x^{۲}+y^{۲}-۴x-۴y+۷=۰\Rightarrow O(۲,۲),r=\frac{\sqrt{۱۶+۱۶-۲۸}}{۲}=\frac{\sqrt{۸}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

$$۳x+۴y=۰\Rightarrow OH=\frac{|۳(۲)+۴(۲)|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۴}{۵}\Rightarrow OH>r\Rightarrow$$ خط ، دایره را قطع نمی کند

ب :

$$x^{۲}+y^{۲}=۲\Rightarrow O(۰,۰),r=\sqrt{۲}$$

$$x+y=۲\Rightarrow OH=\frac{|۰+۰-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}\Rightarrow OH=r\Rightarrow$$ خط بر دایره مماس است

ج :

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y=۲\Rightarrow O(۱,۱),r=\frac{\sqrt{۴+۴+۸}}{۲}=۲$$

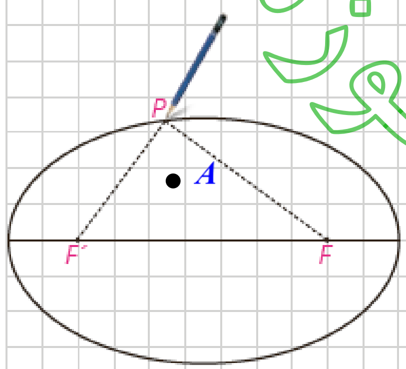
$$x+y=۱\Rightarrow OH=\frac{|۰+۰-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow OH<r\Rightarrow$$ خط، دایره را در دو نقطه قطع می کند

درس سوم

# بیضی و سهمی

## بیضی

**فعالیت ۱**




یک تکه نخ درنظر گرفته و دوسر آن را مطابق شکل در دو نقطهٔ $F$ و $F'$ ثابت کنید. فرض کنید طول نخ $l$ باشد و $l > FF'$ یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی‌ای به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دوطرف نخ به‌صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که **بیضی** نام دارد.

۱ــ یک نقطهٔ دلخواه روی شکل رسم شده درنظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از دو نقطهٔ ثابت $F$ و $F'$ برابر چیست؟ $PF + PF' = l$

۲ــ یک نقطهٔ دلخواه مانند $A$ در درونِ بیضیِ رسم شده درنظر بگیرید و آن را به دو نقطهٔ ثابت $F$ و $F'$ وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطهٔ موردنظر از $F$ و $F'$ کوچکتر از $l$ است.

(**راهنمایی:** پاره‌خط $FA$ را از سمت $A$ امتداد دهید تا بیضی را قطع کند. سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید)

پاسخ در صفحه بعد

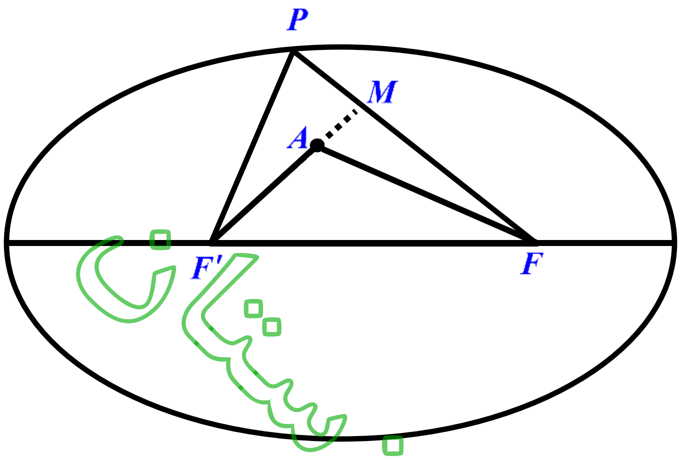
۳ــ یک نقطهٔ دلخواه مانند $B$ بیرونِ بیضیِ رسم شده درنظر بگیرید و آن را به دو نقطهٔ $F$ و $F'$ وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطهٔ موردنظر از $F$ و $F'$ بزرگتر از $l$ است.

(**راهنمایی:** اگر نقطهٔ $D$ محل برخورد $FB$ با بیضی باشد، $F'D$ را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

پاسخ در صفحه بعد

۴ــ از مراحل (۱) تا (۳) متوجه وجود چه ویژگی مشترکی در همهٔ نقاط بیضی شدید که هیچ نقطهٔ دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

ویژگی تمام نقاط بیضی این است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت مقداری ثابت است




**پاسخ مرحله ۲ فعالیت**

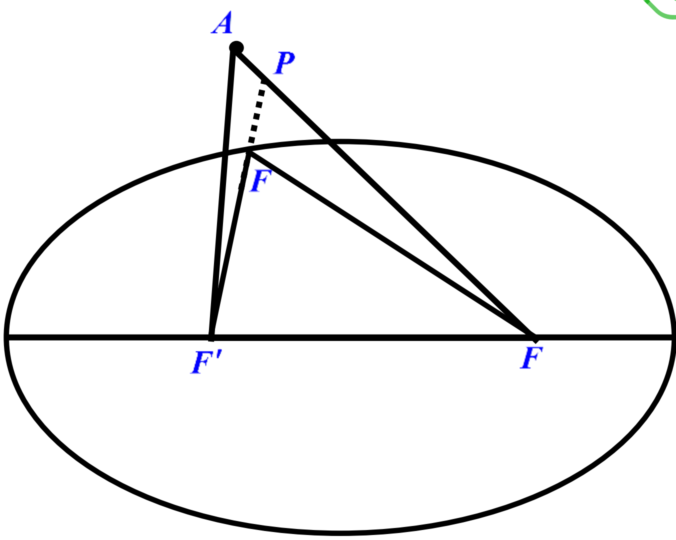
فرض کنیم $A$ نقطه ای درون بیضی باشد که روی خط $FF'$ قرار نداشته باشد.

نقطه $P$ را روی بیضی چنان اختیار می کنیم که $A$ درون مثلث $PFF'$ باشد. اگر

امتداد $AF'$ ، ضلع $PF$ را در نقطه ی $M$ قطع کند.

در این صورت بنا به قضیه نامساوی مثلث داریم :

$$\Delta PF'M : F'M < PF' + PM$$
$$\Delta AFM : AF < AM + MF$$
$$\Rightarrow AF + F'M < PF' + PM + AM + MF \Rightarrow AF + F'A + \cancel{AM} < PF' + PM + \cancel{AM} + MF$$
$$\Rightarrow AF + AF' < PF' + PF \Rightarrow AF + AF' < l$$




**پاسخ مرحله ۳ فعالیت**

فرض کنیم $A$ نقطه ای بیرون بیضی باشد که روی خط $A$ قرار نداشته باشد.

نقطه $F$ را روی بیضی چنان اختیار می کنیم که $P$ درون مثلث $AFF'$ باشد. اگر

امتداد $PF'$ ، ضلع $AF$ را در نقطه ی $PF$ قطع کند.

در این صورت بنا به قضیه نامساوی مثلث داریم :

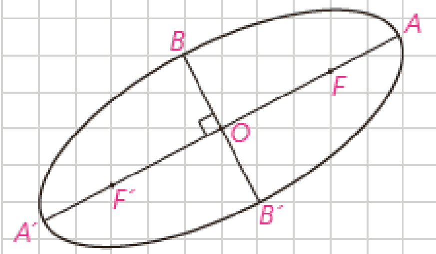
$$\Delta AF'M : F'M < AF' + AM$$
$$\Delta PFM : PF < PM + MF$$
$$\Rightarrow PF + F'M < AF' + AM + PM + MF \Rightarrow PF + F'P + \cancel{PM} < AF' + AM + \cancel{PM} + MF$$
$$\Rightarrow PF + PF' < AF' + AF \Rightarrow l < AF + AF'$$

۵ــ با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

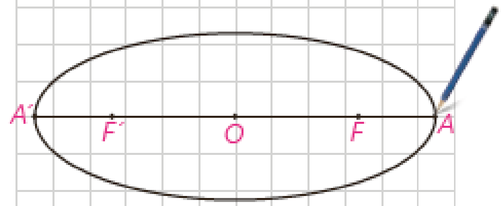
بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو ...ثابت... یک مقدار ...ثابت... است.

دو نقطهٔ ثابتی که با توجه به آنها، بیضی را به‌دست آوردیم و آنها را $F$ و $F'$ نامیدیم کانون‌های بیضی نام دارند.

## فعالیت ۲



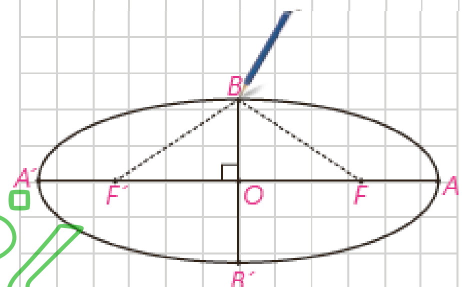

بیضی مقابل را درنظر بگیرید. $AA'$ قطر بزرگ (قطر کانونی) و $BB'$ قطر کوچک بیضی نامیده می‌شود. $F$ و $F'$ کانون‌های بیضی هستند و نقطهٔ $O$، وسط پاره خط $FF'$، مرکز بیضی است. فرض کنید اندازهٔ پاره‌خط‌های $OA$، $OB$ و $OF$ را به ترتیب با $a$، $b$ و $c$ نمایش دهیم. بنابراین فاصلهٔ دو کانون بیضی برابر $2c$ است.




۱ــ در ترسیم بیضی با نخ و مداد دو وضعیتی را که مداد در نقاط $A$ و $A'$ قرار می‌گیرد درنظر بگیرید.

الف) نشان دهید که $FA = F'A'$ و از آن نتیجه بگیرید $OA' = OA = a$ و لذا اندازهٔ قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.

ب) نشان دهید طول نخ موردنظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

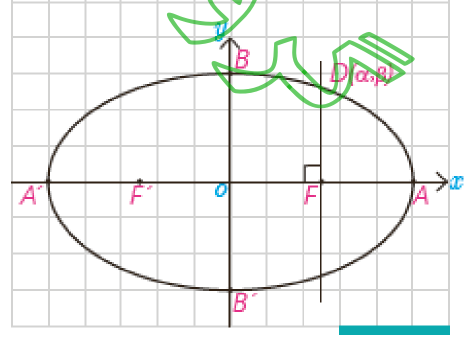



۲ــ الف) در رسم بیضی وضعیتی را که مداد در نقطهٔ $B$ قرار دارد درنظر بگیرید و نشان دهید $b^2 + c^2 = a^2$

ب) با انجام همین کار برای نقطهٔ $B'$ نتیجه بگیرید $OB'^2 + c^2 = a^2$

و با توجه به آن نتیجه بگیرید $OB' = OB = b$ و لذا اندازهٔ قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است.

## کار در کلاس




۱ــ مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای $x$ و $y$ منطبق هستند و فاصله $F$ از هر دو نقطهٔ $O$ و $A$ برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطهٔ $F$ بر $AA'$ عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطهٔ $D$ قطع کرده باشد، مختصات $D$ را به‌دست آورید.

پاسخ سوال ۱ فعالیت

الف : $A$ نقطه ای روی بیضی است لذا با توجه قسمت اول فعالیت قبل می توان نوشت:

$$FA+F'A=l \Rightarrow FA+FA+FF'=l \Rightarrow FA+FA=l-FF' \Rightarrow ۲FA=l-FF'$$

به طریق مشابه با در نظر گرفتن نقطه $A'$ می توان نوشت : $۲FA'=l-FF'$ پس :

$$FA'=F'A=\frac{۱}{۲}l \Rightarrow \cancel{FF'}+F'A'=\cancel{FF'}+FA \Rightarrow FA=F'A'$$
$$OF=OF' \Rightarrow OF+FA=OF'+F'A' \Rightarrow OA=OA'=a$$

ب :

$$AF+AF'=l \xrightarrow{AF=A'F'} A'F'+AF'=l \Rightarrow AA'=l \Rightarrow l=۲a$$

پاسخ سوال ۲ فعالیت

الف :

$$\Delta OBF \cong \Delta OBF' \Rightarrow BF=BF'$$
$$BF+BF'=AA'=۲a \Rightarrow BF+BF=۲a \Rightarrow ۲BF=۲a \Rightarrow BF=a$$
$$\Delta OBF; \angle O=۹۰^\circ \Rightarrow OB^۲+OF^۲=BF^۲ \Rightarrow OB^۲+c^۲=a^۲ \quad \boxed{۱}$$

ب :

$$\Delta OB'F \cong \Delta OB'F' \Rightarrow B'F=B'F'$$
$$B'F+B'F'=AA'=۲a \Rightarrow ۲BF=۲a \Rightarrow BF=a$$
$$\Delta OBF; \angle O=۹۰^\circ \Rightarrow OB'^۲+OF^۲=B'F^۲ \Rightarrow OB'^۲+c^۲=a^۲ \quad \boxed{۲}$$
$$\boxed{۱}, \boxed{۲} \Rightarrow OB^۲=OB'^۲ \Rightarrow OB=OB'=b$$

$$\Rightarrow \boxed{a^۲=b^۲+c^۲}$$

## فعالیت ۳

در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای $a$ و $c$ بیضی موردنظر را رسم می‌کنیم.
می‌دانیم که $a \leq c \leq ۰$ و لذا $۱ \leq \frac{c}{a} \leq ۰$ دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر $\frac{c}{a}$ دارد. در رسم بیضی به‌صورت تقریبی ابتدا دو کانون $F$ و $F'$ را به فاصلهٔ $c$۲ از هم درنظر بگیرید، سپس نقاط $A$ و $A'$ را بر خط $FF'$ به‌گونه‌ای انتخاب کنید که فاصلهٔ $A$ تا $F$ و فاصلهٔ $A'$ تا $F'$ برابر $a$-$c$ و اندازهٔ $AA'$ برابر ۲ $a$ باشد، سپس با استفاده از رابطهٔ $b^۲ = a^۲ - c^۲$ نقاط $B$ و $B'$ را مشخص کنید و بیضی را به‌طور تقریبی رسم کنید:

پاسخ در صفحه بعد

۱ـ $c = ۱$ و $a = ۴$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۱}{۴}$

۲ـ $c = ۲$ و $a = ۸$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۱}{۴}$

۳ـ $c = ۱$ و $a = ۲$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$

۴ـ $c = ۲$ و $a = ۴$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$

۵ـ $c = ۳$ و $a = ۴$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۳}{۴}$

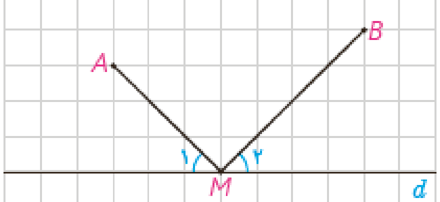
۶ـ $c = ۶$ و $a = ۸$ ؛ $\frac{c}{a} = \frac{۳}{۴}$

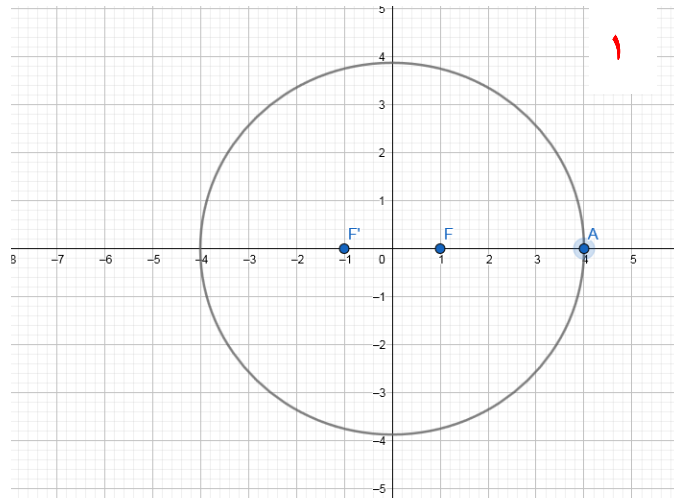
با توجه به آنچه دیدید هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به یک نزدیک شود شکل بیضی کشیده‌تر شده و شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود و هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به صفر نزدیک شود کشیدگی شکل بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیکتر می‌شود. به این سبب مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم.

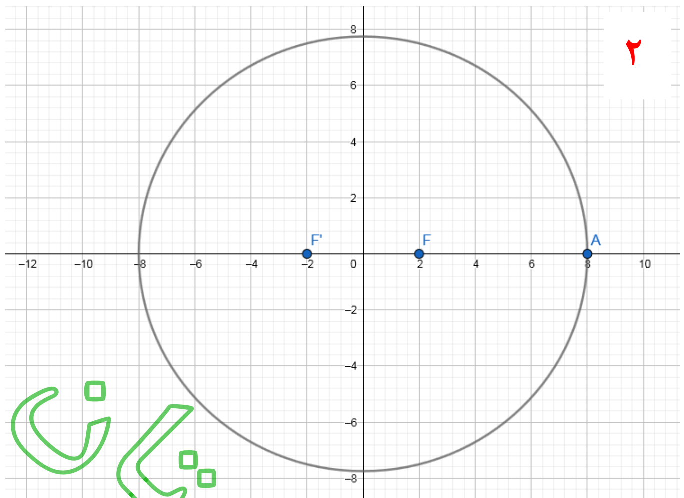
ــ در حالتی که $\frac{c}{a} = ۱$ بیضی تبدیل به یک پاره‌خط و در حالتی که $\frac{c}{a} = ۰$ بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود. چرا؟

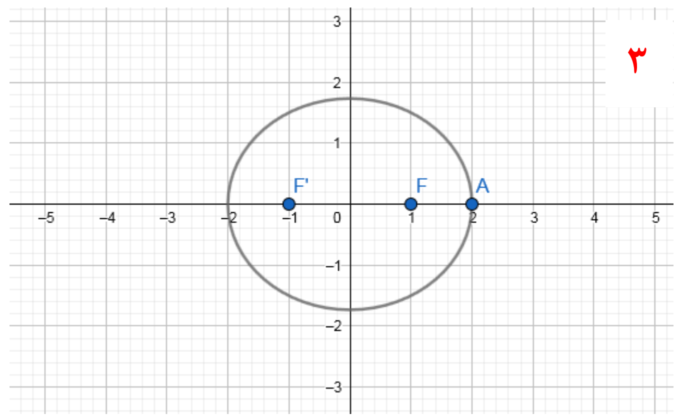
### یادآوری

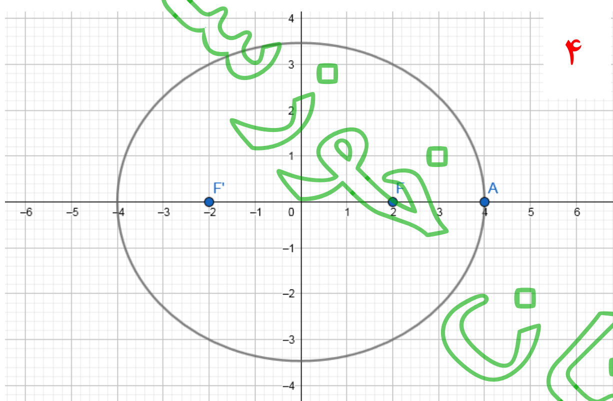
در پایهٔ یازدهم دیدیم که کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ $A$ به نقطهٔ $B$ و با عبور از نقطه‌ای از خطِ $d$، از نقطه‌ای مانند $M$ روی خط $d$ می‌گذرد، به گونه‌ای که دو زاویهٔ ایجاد شده $M_۱$ و $M_۲$ باهم برابرند.

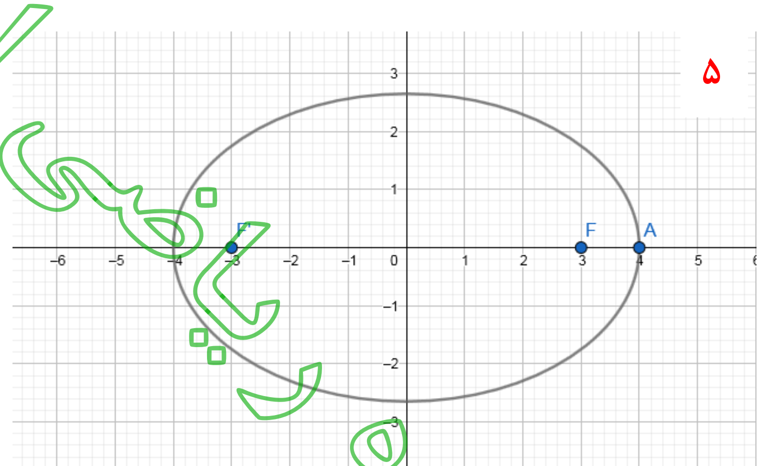


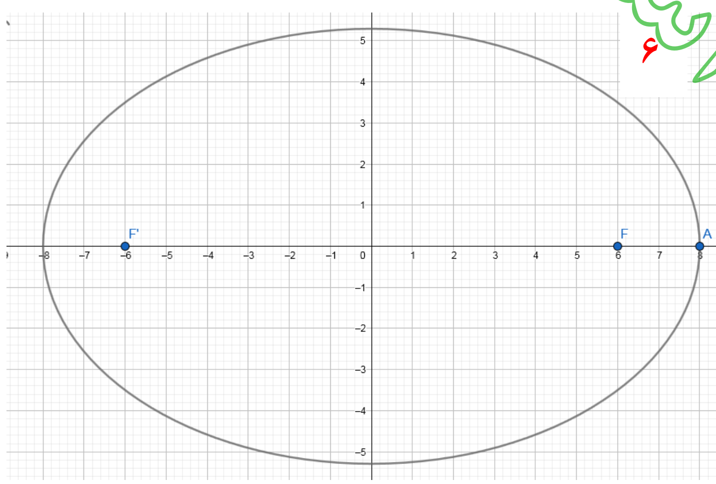


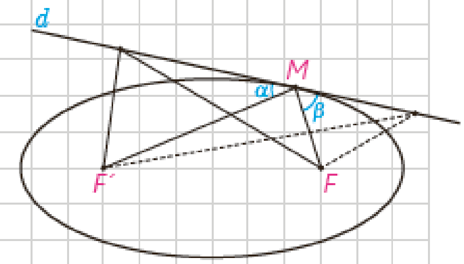






$$\frac{c}{a}=1 \Rightarrow a=c \Rightarrow a^2=c^2 \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} b^2+c^2=c^2 \Rightarrow b=0$$

$$\frac{c}{a}=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow c^2=0 \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} b^2+0=a^2 \Rightarrow a=b$$

## فعالیت ۴




فرض کنیم خط $d$ مانند شکل مقابل در نقطهٔ $M$ بر بیضی مماس باشد.

۱ــ مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون $F$ و $F'$ کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

پاسخ در صفحه بعد

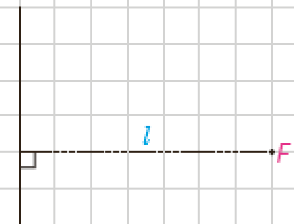
۲ــ دو زاویهٔ α و β نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳ــ با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنهٔ داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعهٔ نوری بر بدنهٔ داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

### سهمی

با سهمی در سال‌های گذشته تا حدی آشنا شده‌ایم. اکنون قصد داریم آن را به‌عنوان یک شکل هندسی مورد بررسی قرار دهیم.

## فعالیت ۵

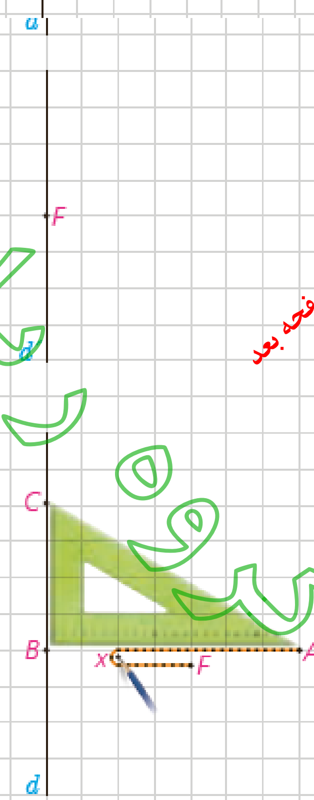



یک خط ثابت مانند $d$ و یک نقطهٔ ثابت مانند $f$ خارج آن درنظر بگیرید و فرض کنید فاصلهٔ $F$ از خط $d$ برابر $l$ باشد.

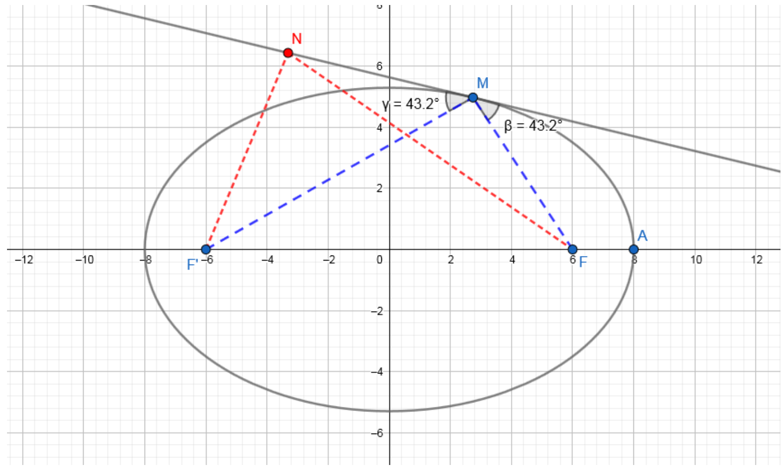
ــ آیا می‌توانید نقطهٔ دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از نقطهٔ $F$ خطی موازی خط $d$ رسم کنید و آن را $d'$ بنامید. تمام نقاط واقع بر خط $d'$ فاصله‌شان از خط $d$ برابر $l$ است. حال توضیح دهید چگونه می‌توانید نقاطی بر خط $d'$ بیابید که از نقطهٔ $F$ و خط $d$ به یک فاصله باشند.

ــ اگر مسئله پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه باشد که به فاصلهٔ یکسانی از خط $d$ و نقطهٔ $F$ قرار دارند، آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط موردنظر ارائه می‌گردد.

پاسخ در صفحه بعد




فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا مانند شکل به نام‌های $A$، $B$ و $C$ باشند. یک سر یک تکه نخ به طول $AB$ را در رأس $A$ از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطهٔ $F$ ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع $BC$ بر خط $d$ واقع باشد و نقطهٔ $F$ بر ضلع $AB$ قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به‌گونه‌ای به نخ گیردهید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشد. در این حالت فاصلهٔ نقطه‌ای که نوک قلم در آن قرار دارد از خط $d$ و از نقطهٔ $F$ نسبت به هم چگونه است؟




**پاسخ فعالیت ۴**

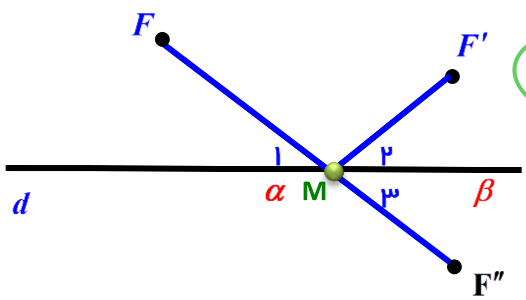
۱- نقطه $M$ - زیرا نقطه $M$ تنها نقطه از خط $d$ می باشد که روی بیضی قرار دارد و سایر نقاط این خط بیرون بیضی واقع اند پس بنا به فعالیت ۱ $FM + F'M$ کمترین مقدار ممکن را دارد.

۲- مساوی اند زیرا

بنا به آنچه در هندسه ۲ گفته شد اگر $F , F'$ دو نقطه در یک طرف خط $d$ باشند برای یافتن نقطه $M$ روی خط $d$ به طوری که $FM + F'M$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد کافی است قرینه $F'$ را نسبت به خط $d$ یافته و آنرا به $F$ وصل کنیم....

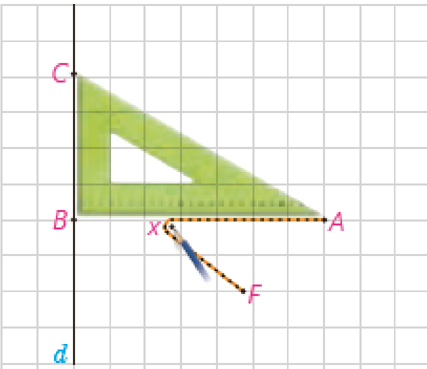
پس با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\angle M_۱ = \angle M_۳ \\ \angle M_۲ = \angle M_۳\end{array}\right\} \Rightarrow \angle M_۱ = \angle M_۲ \Rightarrow \alpha = \beta$$




۳- اشعه ای که از یکی از کانون های بیضی به بدنه آن تابیده می شود بعد از بازتاب از کانون دیگر می گذرد زیرا در هر بازتاب ، زاویه ی تابش و بازتاب مساوی اند.

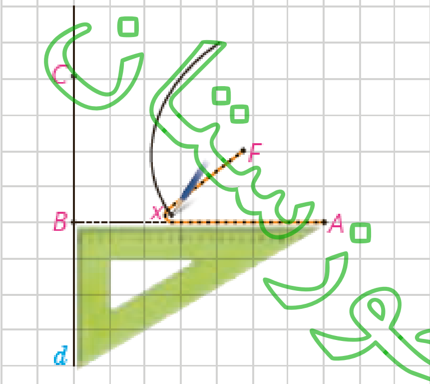
حال در حالتی که ضلع $BC$ کماکان بر خط $d$ واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع $AB$ چسبیده باشد و هر دو تکهٔ نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطهٔ درحال حرکت نوک مداد را در هر حالت با $X$ نمایش دهیم.




پاره‌خط‌های $BX$ و $FX$ هرکدام نمایانگر چه خصوصیتی از نقطهٔ $X$ هستند و بین آنها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟ نقطه $X$ از نقطه $F$ و خط $d$ به یک فاصله است یعنی

$BX = FX$

توضیح دهید که با ادامه این کار نقاطی که توسط مداد رسم می‌شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟ (دقت کنید که گونیا را با منطبق کردن ضلع $BC$ بر خط $d$ در هر دوطرف نقطهٔ $F$ می‌توان حرکت داد.) همه نقطه ها از نقطه $F$ و خط $d$ به یک فاصله اند

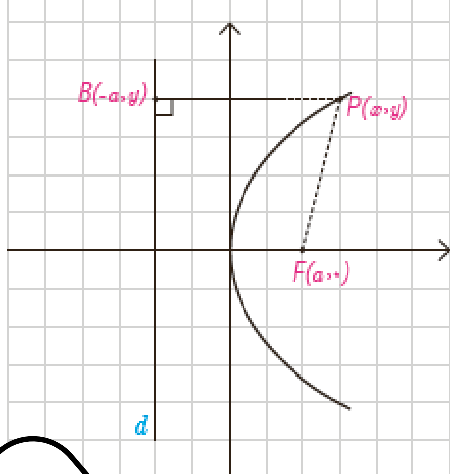



شکل حاصل از فعالیت قبل سهمی نام دارد. در این حالت نقطهٔ $F$ را کانون سهمی و خط $d$ را خط هادی سهمی می‌نامیم و اگر از $F$ بر $d$ خطی عمود رسم کنیم سهمی را در نقطه‌ای قطع می‌کند که به آن رأس سهمی می‌گوییم. حال با توجه به آنچه دیدیم می‌توان گفت :

**سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطهٔ ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.**

## معادلهٔ سهمی

با توجه به آنچه گفته شد با سهمی به‌صورت هندسی آشنا شدیم. حال به‌دنبال این هستیم که برای یک سهمی داده شده معادله آن را به‌دست آوریم؛ یعنی معادله‌ای به‌دست آوریم که مختصات هر نقطه از سهمی در آن معادله صدق کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در معادله صدق کند روی سهمی موردنظر باشد. دقت کنید که این کار را فقط برای سهمی‌هایی انجام می‌دهیم که خط هادی آنها موازی با یکی از محورهای مختصات باشد.




**فعالیت ۶**

۱ــ فرض کنید نقطهٔ $F(a,0)$ ، که در آن $a$ مثبت است، کانون سهمی و خط هادی $d$ موازی محور $y$ها به معادلهٔ $x=-a$ باشد و نقطهٔ $P(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه واقع بر سهمی باشد. داریم : $|PF|=|PB|$ . چرا؟

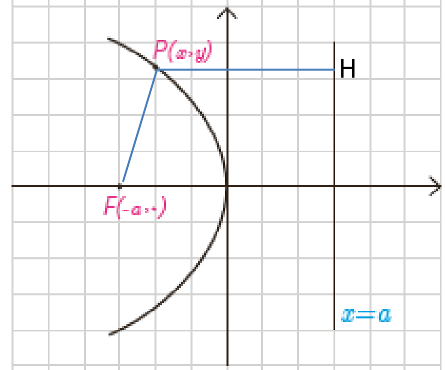
بنابراین

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+a)^2+(y-y)^2}$$

با به توان ۲ رساندن دو طرف و ساده کردن عبارات خواهیم داشت : $y^2 = 4ax$

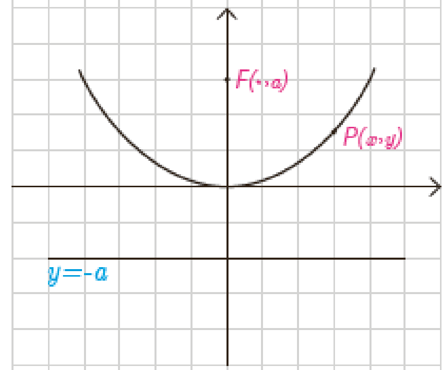
دقت کنید که $a$ برابر با فاصلهٔ کانون تا رأس سهمی و همچنین فاصلهٔ رأس سهمی تا خط هادی است و فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر $2a$ است. در این حالت عدد مثبت $a$ را **فاصلهٔ کانونی سهمی** می‌نامند و چنان که دیده می شود خطی که از کانون به خط هادی سهمی عمود می‌شود که در اینجا محور $x$هاست **محور تقارن سهمی** است که به آن **محور کانونی سهمی** یا **محور سهمی** هم می گوییم.

$$PF = PH \Rightarrow \sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2+(y-y)^2} \Rightarrow y^2 = -4ax$$

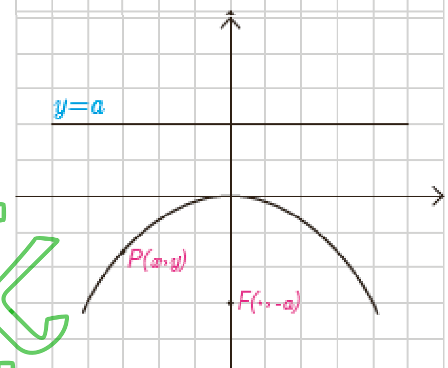



۲ــ در حالتی که خط هادی $d$ موازی محور $y$ها به معادلهٔ $x = a$ باشد ولی کانون $F(-a,0)$ در سمت چپ آن قرار داشته باشد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادلهٔ سهمی به‌صورت $y^2 = -4ax$ است. در این حالت محور $x$ها محور سهمی است.

$$PF = PH \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+a)^2} \Rightarrow x^2 = 4ay$$




۳ــ در حالتی که خط هادی $d$ موازی محور $x$ها به معادلهٔ $y = -a$ و کانون $F(0,a)$ در بالای آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادلهٔ سهمی به‌صورت $x^2 = 4ay$ است. در این حالت محور $y$ها محور سهمی است.
(در واقع این معادله همان $y = \frac{1}{4a}x^2$ است که در پایهٔ دهم به عنوان معادلهٔ سهمی با آن آشنا شدید)



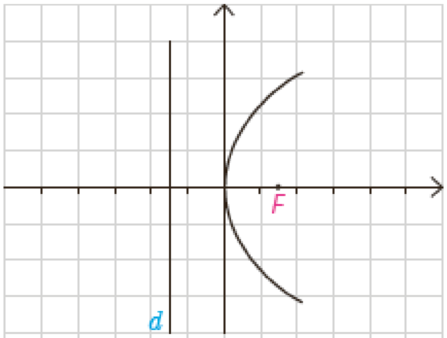

۴ــ در حالتی که خط هادی $d$ موازی محور $x$ها به معادلهٔ $y = a$ و کانون $F(0,-a)$ در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادلهٔ سهمی به‌صورت $x^2 = -4ay$ است. در این حالت محور $y$ها محور سهمی است.

$$PF = PH \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y+a)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-a)^2} \Rightarrow x^2 = -4ay$$

مطالب فوق دربارهٔ سهمی با رأس واقع در مبدأ مختصات را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد.

| دهانهٔ سهمی | محور سهمی | خط هادی | کانون | معادلهٔ سهمی (a>0) |
|---|---|---|---|---|
| رو به راست | محور $x$ | $x=-a$ | $(a,0)$ | $y^2=4ax$ |
| رو به چپ | محور $x$ | $x=a$ | $(-a,0)$ | $y^2=-4ax$ |
| رو به بالا | محور $y$ | $y=-a$ | $(0,a)$ | $x^2=4ay$ |
| رو به پایین | محور $y$ | $y=a$ | $(0,-a)$ | $x^2=-4ay$ |

**مثال :** معادلهٔ $y^۲ = ۶x$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نمایید.



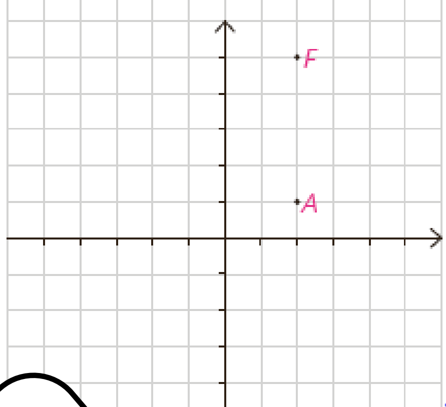

**حل :** این معادلهٔ یک سهمی است که دهانهٔ آن روبه راست است و محور آن محور $x$هاست. با قرار دادن $۴a = ۶$ داریم $a = \frac{۳}{۲}$ . لذا کانون آن $F(\frac{۳}{۲}, ۰)$ و خط هادی آن موازی محور yها و به معادلهٔ $x = \frac{-۳}{۲}$ است و رأس آن مبدأ مختصات است. شکل تقریبی آن به‌صورت مقابل است.

## انتقال (محورها)

دیدیم که $y^۲ = ۴ax$ معادلهٔ یک سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات، کانون آن $F(a, ۰)$، خط هادی آن موازی محور $y$ها به معادلهٔ $x = -a$، محور آن محور $x$ها (خط $y = ۰$) و دهانهٔ آن رو به راست است. حال با توجه به آنچه دربارهٔ انتقال می‌دانیم می‌توان گفت معادله $(y-k)^۲ = ۴a(x-h)$ معادلهٔ همان سهمی است که به اندازهٔ $h$ به‌سمت راست (درصورت منفی بودن $h$ به سمت چپ) و به‌اندازهٔ $k$ به سمت بالا (درصورت منفی بودن $k$ بـه‌سمت پایین) انتقال یافته است. لذا رأس آن به مـختصات $(h, k)$، کانون آن $F(a+h, k)$، خط هادی آن موازی محور $y$ها به معادله $x = -a + h$، محور آن خط $y = k$ و دهانهٔ آن کماکان روبه راست است.

| دهانهٔ سهمی | محور سهمی | خط هادی | کانون | معادلهٔ سهمی |
|---|---|---|---|---|
| رو به راست | خط $y=k$ | $x=-a+h$ | $(a+h, k)$ | $(y-k)^۲ = ۴a(x-h)$ |
| رو به چپ | خط $y=k$ | $x=a+h$ | $(-a+h, k)$ | $(y-k)^۲ = -۴a(x-h)$ |
| رو به بالا | خط $x=h$ | $y=-a+k$ | $(h, a+k)$ | $(x-h)^۲ = ۴a(y-k)$ |
| رو به پایین | خط $x=h$ | $y=a+k$ | $(h, -a+k)$ | $(x-h)^۲ = -۴a(y-k)$ |

همان‌طور که گفته شد رأس این سهمی‌ها نقطه‌ای به مختصات $(h, k)$ است. لذا این حالت‌ها، حالت‌های کلی معادلات است که با قراردادن $(h,k) = (۰,۰)$ به حالت‌های خاص، که در جدول قبل مطرح شد، خواهیم رسید. معادلات سهمی را در جدول فوق، معادلات استاندارد یا متعارف می‌گوییم.




**مثال :** معادلهٔ سهمی به رأس $A(۲,۱)$ و کانون $F(۲,۵)$ را بیابید و معادلهٔ خط هادی آن را بنویسید.

**حل :** با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت :

۱) $a = ۴$ (چرا؟) $F(h, a+k) \Rightarrow F(۲, a+۱) = (۲,۵) \Rightarrow a+۱ = ۵ \Rightarrow \boxed{a = ۴}$

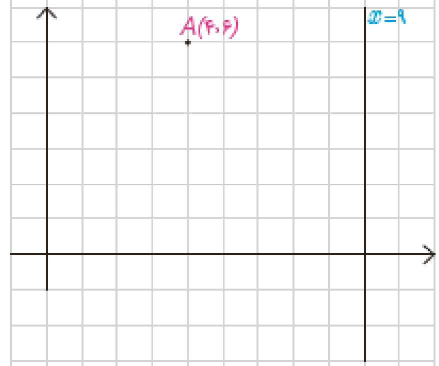
۲) معادله خط هادی آن $y = -۳$ است. چرا؟ $y = -a + k \Rightarrow y = -۴ + ۱ \Rightarrow \boxed{y = -۳}$

۳) دهانه سهمی روبه بالاست. چرا؟ زیرا در صفحه مختصات کانون سهمی بالاتر از راس سهمی است

لذا معادله آن به صورت $(x-h)^۲=۴a(y-k)$ است و خواهیم داشت :

$$(x-۲)^۲=۱۶(y-۱)$$

**مثال :** مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس $A(۴,۶)$ و خط هادی $x=۹$ بنویسید.




**حل :** با توجه به جایگاه رأس و خط هادی سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت :

۱) $a=۵$ چرا؟ $A(۴,۶)\Rightarrow h=۴, k=۶\ ; x=a+h\Rightarrow a+۴=۹\Rightarrow \boxed{a=۵}$

۲) کانون آن به مختصات $F(-۱,۶)$ است، چرا؟ $F(-a+h,k)\Rightarrow F(-۵+۴,۶)\Rightarrow F(-۱,۶)$

۳) دهانه سهمی رو به چپ است. چرا؟ زیرا راس سهمی سمت چپ خط هادی سهمی قرار دارد.

لذا معادله آن به‌صورت $(y-k)^۲=-۴a(x-h)$ است و خواهیم داشت :

$$(y-۶)^۲=-۲۰(x-۴)$$

## تبدیل معادلهٔ یک سهمی به‌صورت متعارف

چهار حالت معادله سهمی را که در جدول دوم مطرح شد، ۴ حالت شناخته شده (متعارف) درنظر می‌گیریم. اما در سال‌های قبل معادلاتی با عنوان معادله سهمی مطرح شدند که برخی از آنها در ظاهر به شکل معادلات مطرح شده در جدول نبودند. به‌طور مثال در پایهٔ دهم معادله‌ای به‌صورت $y=x^۲+۳x+۵$ معادلهٔ یک سهمی نامیده شد. دقت کنید که ویژگی معادله سهمی این است که نسبت به یکی از دو متغیر $x$ و $y$ از درجه ۱ و نسبت به دیگری از درجه ۲ است. در ادامه نشان می‌دهیم معادله مطرح شده قابل تبدیل به یکی از ۴ حالت متعارف خواهد بود.

**مثال :** معادله یک سهمی به‌صورت $y=x^۲+۳x+۵$ داده شده است. آن را به یکی از حالت‌های متعارف تبدیل کنید و کانون و خط هادی و محور سهمی را مشخص نمایید.

**حل :** داریم $x^۲+۳x=y-۵$

$$\Rightarrow x^۲+۳x+\frac{۹}{۴}=y-۵+\frac{۹}{۴}\Rightarrow (x+\frac{۳}{۲})^۲=y-\frac{۱۱}{۴}$$

لذا معادله یک سهمی است که دهانه آن رو به بالا، رأس آن $(-\frac{۳}{۲},\frac{۱۱}{۴})$ و $۴a=۱$ و در نتیجه $a=\frac{۱}{۴}$ است. بنابراین $F=(h,a+k)=(-\frac{۳}{۲},۳)$ کانون آن و خط هادی آن به معادله $y=-a+k=\frac{۵}{۲}$ است. معادله محور سهمی به‌صورت $x=h=-\frac{۳}{۲}$ است.

با روش مشابه آنچه در مثال دیدید معادلات سهمی‌ها را می‌توان به یکی از حالات استاندارد نوشت.

## رسم سهمی

رسم دقیق یک منحنی توسط نرم‌افزارهای ریاضی انجام می‌گیرد. طبیعی است که در رسم منحنی‌ها با کاغذ و قلم، شکل حاصل شکل تقریبی منحنی مورد نظر خواهد بود.

برای رسم یک سهمی ابتدا معادله آن را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم و با توجه به آن، مختصات رأس سهمی، مقدار $a$ (فاصله کانونی)، مختصات $F$ (کانون) و خط هادی آن را به‌دست می‌آوریم و نیز درمی‌یابیم که دهانه سهمی رو به کدام طرف است.

یکی از مهم‌ترین نقاطی که باید در رسم سهمی جایگاه آن را مشخص نماییم، رأس سهمی است. اگر کانون سهمی را نیز مشخص نماییم دراین صورت خطی که از رأس و کانون سهمی عبور می‌کند محور تقارن سهمی است.

حال اگر خطی را که در نقطه $F$ بر محور تقارن سهمی عمود است رسم کنیم و روی آن دو نقطه، مثلاً $B$ و $B'$ را که به فاصله $2a$ از $F$ هستند مشخص نماییم، در این‌صورت نقاط $B$ و $B'$ بر سهمی واقع‌اند. چرا؟

بدون کاستن از کلیت مساله ، سهمی $x^2 = 4ay$ را در نظر می گیریم . کانون این سهمی نقطه $F(0,a)$ و محور تقارن آن محور $y$ ها است. اگر از کانون سهمی خطی عمود بر محور تقارن آن رسم کنیم . معادله آن خط $y = a$ می باشد و برای بدست آوردن نقاط $B, B'$ کافی است محل تقاطع آن را با سهمی بیابیم :

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 4ay \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 4a(a) \Rightarrow x^2 = 4a^2$$

$$\Rightarrow x = \pm 2a \Rightarrow B(2a,a), B'(-2a,a)$$

$BB'$ را وتر کانونی سهمی می نامند و طول آن برابر $4a$ است

حال با داشتن رأس و دو نقطهٔ دیگر از سهمی و دانستن شکل کلی آن می‌توان شکل سهمی را به‌صورت تقریبی رسم کرد. قبل از رسم می‌توان نقاط برخورد منحنی با محورهای مختصات را نیز مشخص نمود.

**مثال :** نمودار معادله $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ را رسم کنید.

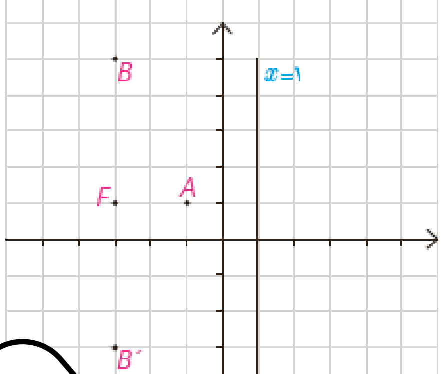
**حل :** ابتدا معادله را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم

$$y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1$$

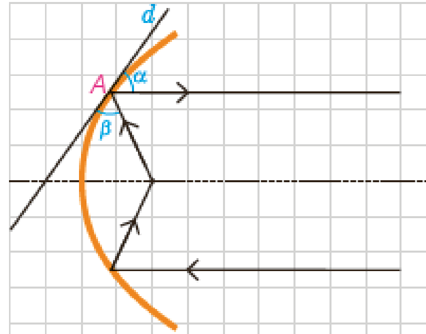
$$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x+1)$$

لذا معادله فوق یک سهمی با رأس $A(h,k) = (-1,1)$ است که دهانه آن رو به چپ است. داریم : $-4a = -8 \Rightarrow a = 2$ و بنابراین $F(-a+h,k) = (-3,1)$ و معادله خط هادی آن به‌صورت $x = a + h = 1$ است.

در این‌صورت نقاط $B$ و $B'$ که هم طول با $F$ و به فاصله $2a = 4$ از $F$ باشند یعنی $B(-3,5)$ و $B'(-3,-3)$ نیز بر سهمی واقع‌اند. فاصله هریک از آنها را از کانون و خط هادی بررسی کنید. حال با وصل کردن نقاط $B$ و $A$ و $B'$ به‌صورت یک منحنی و ادامه آن، شکل تقریبی سهمی موردنظر را به‌دست آورید.



## ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها و کاربردهای آن

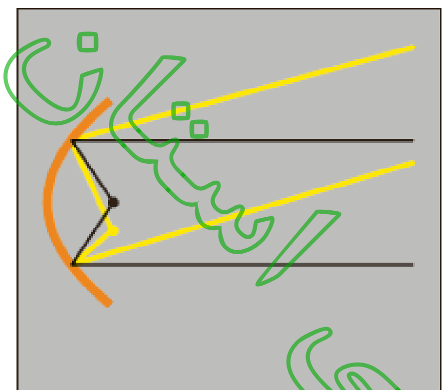


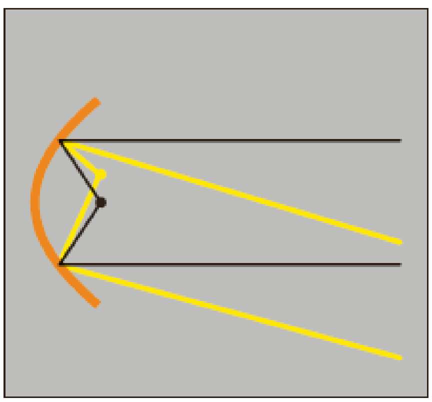

یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

درواقع اگر خط d برسهمی مماس و نقطه A نقطه تماس آن باشد زاویه‌های $\alpha$ و $\beta$ برابرند.

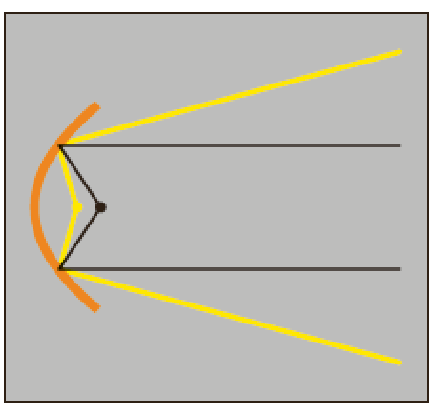
از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به‌طور مثال چراغ جلوی اتومبیل‌ها را معمولاً به‌گونه‌ای می‌سازند که جداره پشت لامپ به‌حالت سهمی باشد و جنس آینه‌ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می‌دهند. در این‌صورت حتی شعاع‌های نوری که به عقب تابیده می‌شوند پس از برخورد به جداره سهموی پشت لامپ به‌صورت شعاع‌هایی موازی با محور سهمی به‌جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری به‌وجود می‌آورند.

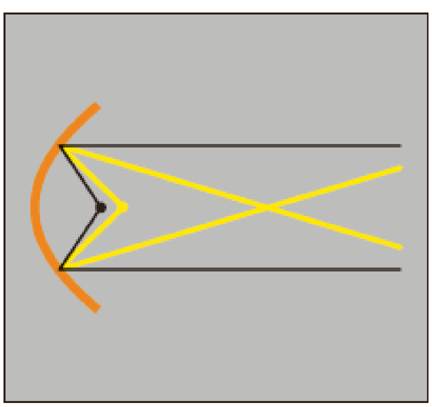
با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین‌تر، شعاع‌های نور کماکان موازی باهم (نه موازی با محور) اما روبه بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می‌کنند.





اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب‌تر قرار گیرد شعاع‌های نور باهم موازی خارج نمی‌شوند.



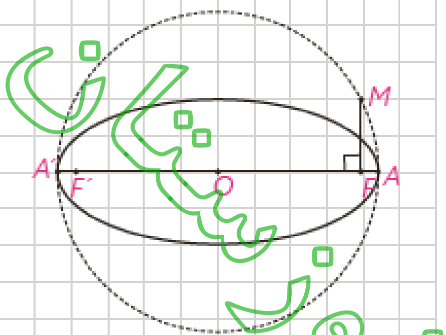


## تمرین

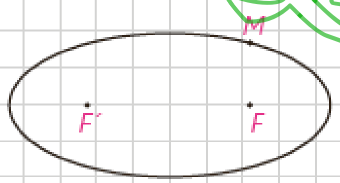
۱ــ دو نقطهٔ $A$ و $B$ روی یک بیضی و $F$ و $F'$ کانون‌های بیضی‌اند. $A$ به کانون $F'$ نزدیک‌تر و $B$ به کانون $F$ نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید :

الف) در حالتی که دو پاره‌خط $AF$ و $BF'$ یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

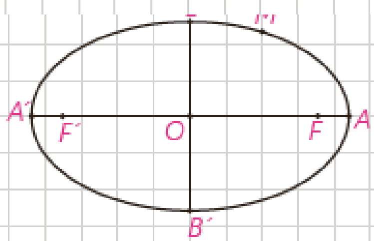
ب) در حالتی که $AF$ و $BF'$ یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند $M$ قطع کنند، مثلث $FMF'$ متساوی‌الساقین است و $M$ روی قطر کوچک بیضی است.




۲ــ قطر دایرهٔ $C$، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی $e$ است و از کانون $F$ عمودی بر $AA'$ رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند $M$ قطع کند. ثابت کنید $MF$ با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.




۳ــ در شکل مقابل نقطهٔ $M$ روی بیضی و کانون‌های $F$ و $F'$ مشخص شده‌اند. خط $d$ را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ $M$ بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ $F'$ خطی موازی با $MF$ رسم کنید تا خط $d$ را در نقطه‌ای مانند $N$ قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$



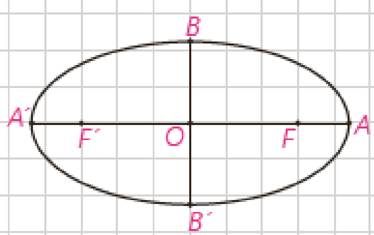

$OA = ۵$ $\quad$ $OB = ۳$ $\quad$ $OF = ۴$

۴ــ نقطهٔ $M$ روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

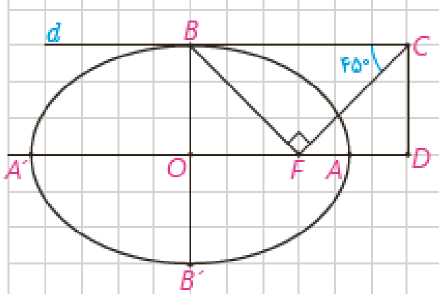
الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

ب) نشان دهید مثلث $MFF'$ قائم‌الزاویه است.

ج) طول‌های $MF$ و $MF'$ را به‌دست آورید.




۵ــ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ $FBF'$ چند درجه است؟



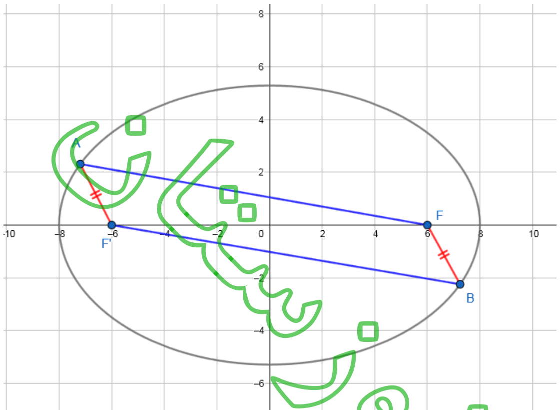

۶ــ در بیضی مقابل $AA'$ و $BB'$ دو قطراند. خط $d$ در نقطهٔ $B$ بر بیضی مماس است. پاره‌خط $BF$ را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ $F$ عمودی بر $BF$ رسم می‌کنیم تا خط $d$ را در نقطهٔ $C$ قطع کند و از $C$ عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آنرا در نقطه‌ای مانند $D$ قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵°$ ، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به‌دست آورید.

**پاسخ تمرین ۱ :**

الف : اگر $AF\ ,BF'$ یکدیگر را درون دایره قطع نکنند . چهار ضلعی $AFBF'$ را در نظر می گیریم .نقاط $A,B$ روی بیضی قرار دارند پس :

$$AF+AF'=BF+BF'=۲a \xrightarrow{BF=AF'} AF+\cancel{BF}=\cancel{BF}+BF' \Rightarrow AF=BF'$$

به عبارت دیگر در چهار ضلعی $AFBF'$ اضلاع مقابل دو به دو مساوی اند لذا چهار ضلعی $AFBF'$ متوازی الاضلاع است پس : $AF \parallel BF'$



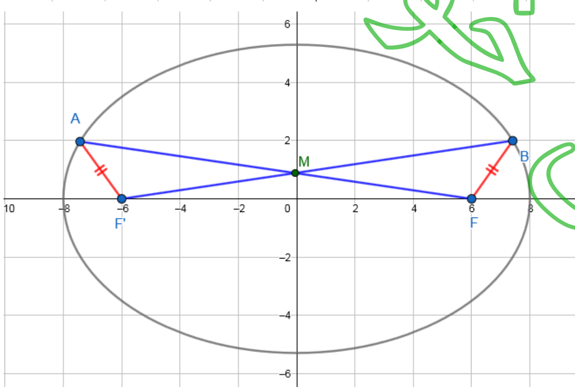
ب : : اگر $AF\ ,BF'$ یکدیگر را درون دایره قطع کنند

.نقاط $A,B$ روی بیضی قرار دارند پس :

$$AF+AF'=BF+BF'=۲a$$
$$\xrightarrow{BF=AF'} AF+\cancel{BF}=\cancel{BF}+BF' \Rightarrow AF=BF'$$

$$\left.\begin{array}{l} AF'=BF \\ AF=BF' \\ FF'=FF' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AFF' \cong \Delta BFF' \Rightarrow \angle A=\angle B$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A=\angle B \\ \angle M_۱=\angle M_۲ \\ AF'=BF \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMF' \cong \Delta BMF \Rightarrow MF'=MF$$



از طرف دیگر قطر کوچک بیضی عمود منصف پاره خط $FF'$ می باشد.

لذا از راس $M$ در مثلث متساوی الساقین $FMF'$ می گذرد.

**پاسخ تمرین ۲**

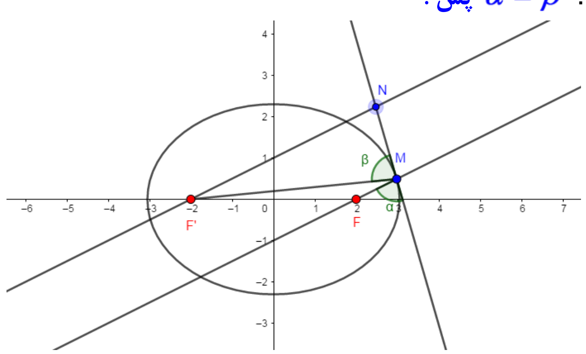
$$\Delta OFM : \angle F=۹۰° \Rightarrow FM^۲=OM^۲-OF^۲ \xrightarrow[OF=c]{FM=OA=a} FM^۲=a^۲-c^۲ \xrightarrow{a^۲-c^۲=b^۲} FM^۲=b^۲ \Rightarrow FM=b$$

**پاسخ تمرین ۳**

$MN\ ,FM \parallel F'N \Rightarrow \angle N_۱=\alpha$ مورب

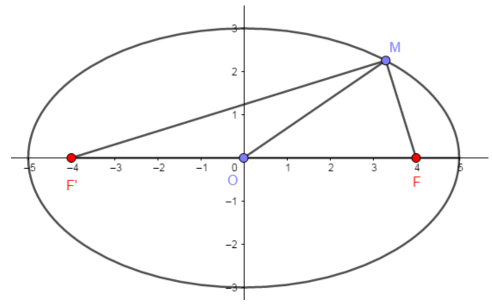
از طرف دیگر بنا به فعالیت ۴ می توان نوشت : $\alpha=\beta$ پس :

$$\angle N_۱=\beta \Rightarrow F'M=F'N$$



**پاسخ تمرین ۴**

الف:




$$AA' = ۱۰ \Rightarrow ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵,\ BB' = ۶ \Rightarrow ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \Rightarrow c^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow c = ۴ \Rightarrow OF = OF' = OM = ۴$$

ب : در مثلث $MFF'$ میانه $OM$ نصف ضلع $FF'$ است پس مثلث در راس $M$ قائمه است:

$$\Delta MFF' : OM = OF = OF' = \frac{۱}{۲}FF' \Rightarrow \angle M = ۹۰^\circ$$

ج :

$$MF + MF' = ۲a = ۱۰ \Rightarrow MF' = ۱۰ - MF$$

$$\Delta MFF' : \angle M = ۹۰^\circ \Rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \Rightarrow MF^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = ۸^۲$$

$$\xrightarrow{MF = x} x^۲ + (۱۰ - x)^۲ = ۶۴ \Rightarrow x^۲ + ۱۰۰ - ۲۰x + x^۲ - ۶۴ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۲۰x + ۳۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۱۰x + ۱۸ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۹) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \Rightarrow MF = ۲, MF' = ۱۰ - ۲ = ۸ \\ or \\ x = ۹ \Rightarrow MF = ۹, MF' = ۱۰ - ۹ = ۱ \end{cases}$$

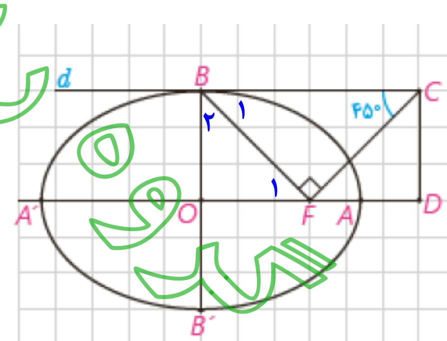
**پاسخ تمرین ۵**

$$AA' = ۲BB' \Rightarrow a = ۲b$$

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \Rightarrow c^۲ = (۲b)^۲ - b^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b \Rightarrow \frac{c}{b} = \sqrt{۳}$$

$$\Delta BOF : \tan(B) = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{b} = \sqrt{۳} \Rightarrow \angle OBF = \angle OBF' = ۶۰^\circ \Rightarrow \angle F'BF = ۱۲۰^\circ$$

**پاسخ تمرین ۵**




$$BB' \perp d, BB' \perp AA' \Rightarrow d \parallel AA'$$

$$\Delta BCF : \angle F = ۹۰^\circ, \angle C = ۴۵^\circ \Rightarrow \angle B_۱ = ۴۵^\circ \Rightarrow \angle B_۲ = \angle F_۱ = ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow OB = OF \Rightarrow b = c \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} a^۲ = c^۲ + c^۲ = ۲c^۲ \Rightarrow a = \sqrt{۲}c$$

$$\frac{OF}{OA} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{OF}{OA - OF} = \frac{c}{a - c} \Rightarrow \frac{OF}{AF} = \frac{c}{\sqrt{۲}c - c} = \frac{c}{(\sqrt{۲}-۱)c} = \frac{۱}{\sqrt{۲}-۱} = \sqrt{۲}+۱$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{OF}{AF} = \sqrt{۲}+۱}$$

$$\Delta OBF \cong \Delta FCD \Rightarrow OF = DF \Rightarrow \frac{DF}{AF} = \sqrt{۲}+۱ \Rightarrow \frac{DF - AF}{AF} = \frac{\sqrt{۲}+۱-۱}{۱} \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \sqrt{۲}$$

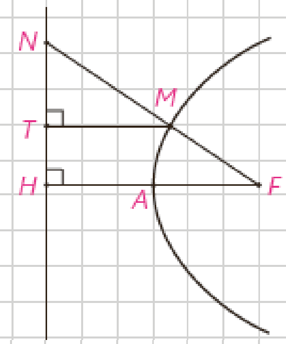
۷ــ سهمی $y^2=2x-4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

۸ــ مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ را به دست آورید.

۹ــ معادله سهمی را بنویسید که $S(1,2)$ رأس و $F(1,-2)$ کانون آن باشد.

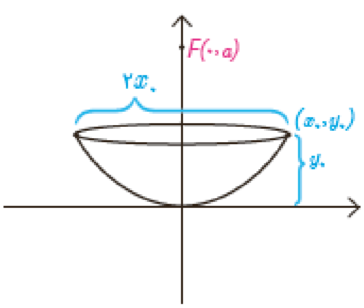
۱۰ــ سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

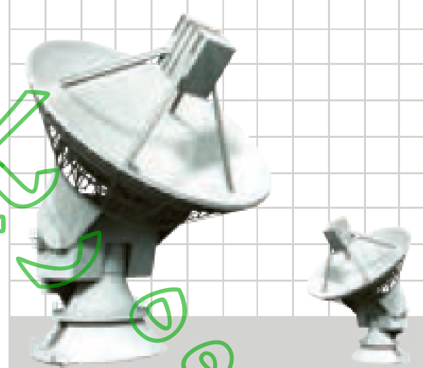
۱۱ــ سهمی $P$ با کانون $F$ و خط هادی $d$ مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از $F$ بگذرد و بر خط $d$ مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از $F$ گذشته و بر $d$ مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.




۱۲ــ در شکل سهمی با رأس $A$ و کانون $F$ و خط هادی $d$ رسم شده است. از $F$ به نقطهٔ دلخواه $M$ روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا $d$ را در $N$ قطع کند و از نقطهٔ $M$، $MT$ را بر $d$ عمود کرده‌ایم. ثابت کنید : $\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$

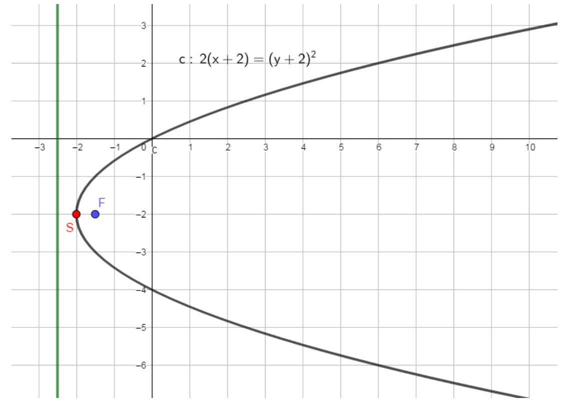
۱۳ــ یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهدهٔ فاصلهٔ کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصلهٔ کانونی آن‌را بدست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبهٔ فاصلهٔ کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت : باید قطر دهانهٔ دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازهٔ گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصلهٔ کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.



۱۴ــ فرض کنید از مثلث $ABC$، اندازه ضلع $BC$ و ارتفاع $AH$ و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوهٔ رسم این مثلث را توضیح دهید.

## پاسخ تمرین ۷




$$y^2 = 2x - 4y \Rightarrow y^2 + 4y = 2x \Rightarrow$$

$$y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2)$$

$$S(-2,-2), 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow F(\alpha + a, \beta) \Rightarrow F\left(-2, -\frac{3}{4}\right)$$

$$x = \alpha - a \Rightarrow x = -2 - \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

## پاسخ تمرین ۸

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y - c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) \Rightarrow y - c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \Rightarrow y - c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow y - c + \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 \Rightarrow 4p = a \Rightarrow p = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow S\left|\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-b}{2a} \\ \beta = \dfrac{4ac - b^2}{4a} \end{array}\right. \quad , \quad F\left|\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-b}{2a} \\ \beta + p = \dfrac{4ac - b^2}{4a} + \dfrac{a}{4} \end{array}\right. \Rightarrow F\left(\frac{-b}{2a}, \frac{a^2 - b^2 + 4ac}{4a}\right)$$

$$y = \beta - p = \frac{4ac - b^2}{4a} - \frac{a}{4} = \frac{4ac - b^2 - a^2}{4a} \Rightarrow y = \frac{4ac - b^2 - a^2}{4a}$$

## پاسخ تمرین ۹

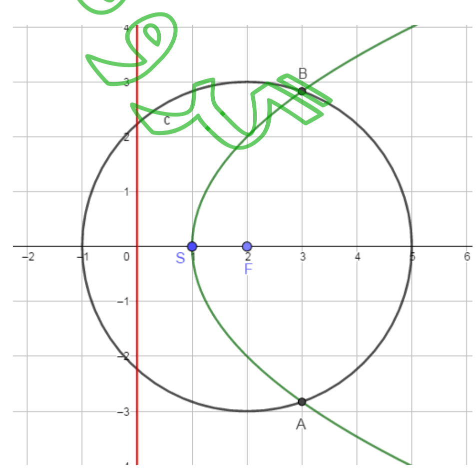
$$S(1,2) \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$$

چون $S , F$ طولهای برابر دارند و نقطه $S$ در صفحه مختصات بالاتر از $F$ قرار دارد. سهمی ، قائم می باشد و تقعر آن رو به پایین است لذا:

$$F(1,-2) \Rightarrow \alpha = 1, \beta - a = -2 \Rightarrow 2 - a = -2 \Rightarrow \boxed{a = +4 > 0}$$

$$(x - \alpha)^2 = -4a(y - \beta) \Rightarrow (x-1)^2 = -16(y-2)$$

## پاسخ تمرین ۱۰




$$y^2 = 4x - 4 \Rightarrow (y - 0)^2 = 4(x - 1) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \end{array}\right. \Rightarrow F(\alpha + a, \beta) \Rightarrow F(2,0)$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 9 \xrightarrow{y^2 = 4x - 4} (x-2)^2 + 4x - 4 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x - 4 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y^2 = 4(3) - 4 = 8 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8} \\ x = -3 \Rightarrow y^2 = 4(-3) - 4 = -16 \quad \otimes \end{cases}$$

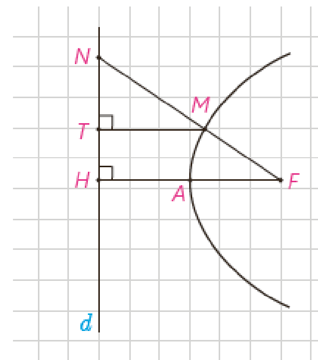
$$\Rightarrow A(3, 2\sqrt{2}) , B(3, -2\sqrt{2})$$

پاسخ تمرین ۱۱ : فرض کنیم $A$ نقطه ی دلخواهی روی سهمی باشد. به مرکز $A$ و شعاع $AF$ دایره ای رسم می کنیم بنا به تعریف سهمی هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی آن به یک فاصله است پس دایره رسم شده باید بر خط $d$ مماس باشد.

بعکس فرض کنیم دایره $C(A,r)$ از $F$ می گذرد و بر $d$ در نقطه $H$ مماس است . بدیهی است که $AF = AH = r$ پس نقطه $A$ از کانون و خط هادی سهمی به یک فاصله است لذا $A$ روی سهمی قرار دارد.

نتیجه : هر سهمی مکان هندسی مرکز دایره ای از صفحه است که از یک نقطه ثابت آن صفحه می گذرد و بریک خط ثابت از آن صفحه مماس است.

پاسخ تمرین ۱۲ : $M, A$ دو نقطه روی سهمی اند پس فاصله آنها از کانون و خط هادی سهمی برابر است یعنی :




$$MT = MF , AH = AF \Rightarrow FH = ۲AF$$

$$\Delta FNH : TM \parallel FH \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{TM}{FH} = \frac{NM}{NF} \xrightarrow[FH=۲FA]{TM=MF} \frac{MF}{۲FA} = \frac{NM}{NF} \Rightarrow \frac{NF}{۲FA} = \frac{NM}{MF} \quad \boxed{۱}$$

$$\Delta FNH : TM \parallel FH \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{TN}{TH} = \frac{NM}{MF} \quad \boxed{۲}$$

$$\boxed{۱},\boxed{۲} \Rightarrow \frac{NF}{۲FA} = \frac{TN}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

پاسخ تمرین ۱۳ : با توجه به شکل ، سهمی داده شده قائم است و راس آن مبدا مختصات می باشد پس معادله آن به صورت مقابل است: $x^۲ = ۴ay$

اگر $(x_\circ , y_\circ)$ نقطه ای روی سهمی باشد به راحتی می توان فاصله کانونی را به شکل مقابل حساب نمود : $x_\circ^۲ = ۴ay_\circ \Rightarrow a = \frac{x_\circ^۲}{۴y_\circ}$

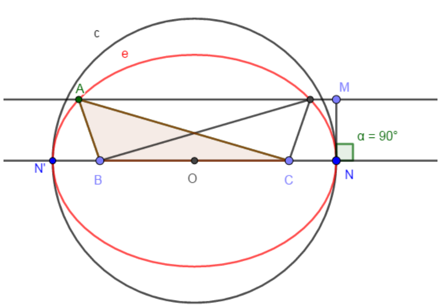
حال به روش ارائه شده بپردازیم : قطر دهانه دیش $۲x_\circ$ و عمق دیش $y_\circ$ است پس بنا به روش مساله داریم : $\frac{\frac{۲x_\circ \times ۲x_\circ}{y_\circ}}{۱۶} = \frac{۴x_\circ^۲}{۱۶y_\circ} = \frac{x_\circ^۲}{۴y_\circ} = a$

پاسخ تمرین ۱۴ : فرض کنیم $AH = h_a , BC = a$ و محیط مثلث $ABC$ برابر $۲p$ باشد.

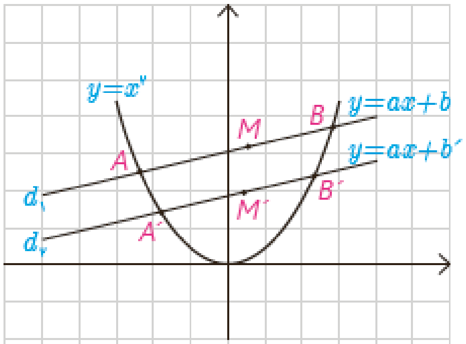
پاره خط $BC = a$ را رسم نموده و وسط آن را $O$ می نامیم . دایره ای به مرکز $O$ و قطر $۲p-a$ رسم می کنیم و $BC$ را امتداد می دهیم تا دایره را در نقاط $N', N$ قطع کند . سپس یک بیضی به کانونهای $B$ , $C$ که از $N$ یا $N'$ بگذرد بدیهی است که $NN'$ قطر بزرگ بیضی است و $NN' = ۲p - a$ .

اگر $A$ نقطه ی دلخواهی از بیضی باشد : $AB + AC = NN' \Rightarrow AB + AC = ۲p - a \Rightarrow AB + AC + BC = ۲p - a + a = ۲p$

از نقطه $N$ عمود $MN = h_a$ را از $NN'$ خارج نموده و از $M$ خطی موازی $NN'$ رسم می کنیم . محل تقاطع خط و بیضی را $A$ می نامیم و مثلث $ABC$ را رسم می کنیم مثلث $ABC$ پاسخ مساله است.



۱۵ــ سهمی $y=x^2$ و دو خطِ موازی $d_1:\ y=ax+b$ و $d_2:\ y=ax+b'$ را که با سهمی متقاطع‌اند، درنظر بگیرید.



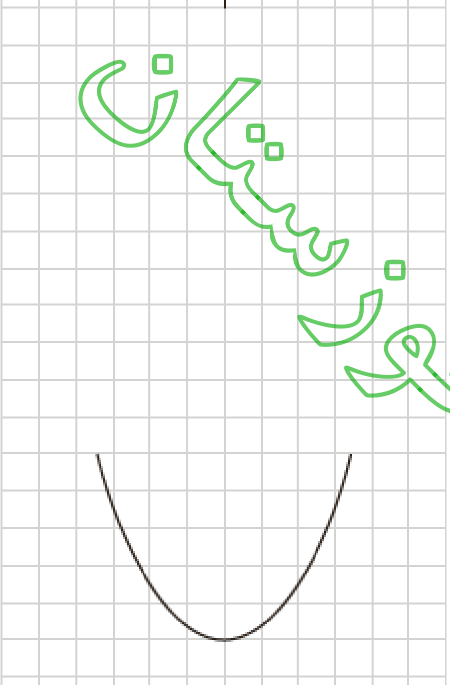

الف) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط $d_1$ و سهمی $y=x^2$ باشد.

ب) فرض کنید $A$ و $B$ نقاط برخورد خط $d_1$ و سهمی باشند و نقطهٔ $M$ وسط پاره‌خط $AB$ باشد، مختصات نقطهٔ $M$ را به‌دست آورید.

پ) مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط $d_2$ به جای $d_1$ انجام دهید و مختصات نقطهٔ $M'$ (نقطهٔ وسط پاره‌خط حاصل از نقاط تقاطع خط $d_2$ و سهمی) به‌دست آورید.

ت) خط $MM'$ نسبت به محور $y$ها چه وضعی دارد؟

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.



**پاسخ تمرین ۱۵ :**

**الف ، ب ، پ:**

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=ax+b \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=ax+b \Rightarrow x^2-ax-b=0 \Rightarrow x_A=\alpha , x_B=\beta \Rightarrow A\left(\alpha,\alpha^2\right), B\left(\beta,\beta^2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=ax+b' \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=ax+b' \Rightarrow x^2-ax-b'=0 \Rightarrow x_{A'}=\alpha' , x_{B'}=\beta' \Rightarrow A'\left(\alpha',\alpha'^2\right), B'\left(\beta',\beta'^2\right)$$

$$x^2-ax-b=0 \Rightarrow S=\alpha+\beta=a , P=\alpha\beta=-b$$

$$M\left|\begin{array}{l} \dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{a}{2} \\ \dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\dfrac{S^2-2P}{2}=\dfrac{a^2+2b}{2} \end{array}\right. \Rightarrow M\left(\frac{a}{2} \;,\; \frac{a^2+2b}{2}\right)$$

$$x^2-ax-b'=0 \Rightarrow S=\alpha'+\beta'=a , P'=\alpha'\beta'=-b'$$

$$M'\left|\begin{array}{l} \dfrac{x_{A'}+x_{B'}}{2}=\dfrac{\alpha'+\beta'}{2}=\dfrac{a}{2} \\ \dfrac{y_{A'}+y_{B'}}{2}=\dfrac{\alpha'^2+\beta'^2}{2}=\dfrac{S'^2-2P'}{2}=\dfrac{a^2+2b'}{2} \end{array}\right. \Rightarrow M'\left(\frac{a}{2} \;,\; \frac{a^2+2b'}{2}\right)$$

**ت : موازی اند ، زیرا $M , M'$ دارای طولهای مساوی اند ومعادله خط $MM'$ بصورت $x=\frac{a}{2}$ است.**

**ث : ابتدا دو خط موازی $d', d$ را چنان رسم می کنیم که سهمی را در نقاط $A', B', A, B$ قطع کند. سپس وسطهای پاره خطهای $A'B', AB$ را به ترتیب $M', M$ می نامیم .**

**از راس سهمی خط $L$ را موازی خط $MM'$ رسم می کنیم . خط $L$ پاسخ مساله است.**