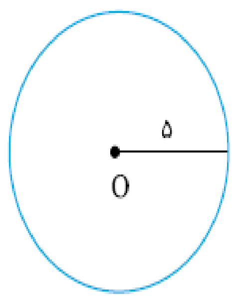
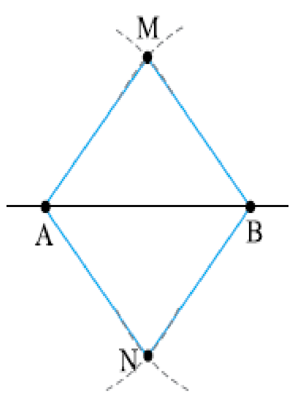
درس اول: ترسیم‌های هندسی

با این‌که در هندسه برای اثبات قضیه‌ها و حل کردن مسأله‌ها ترسیم شکل‌ها خیلی مهم است، اما خیلی مواقع ترسیم حدودی و غیر دقیق شکل‌ها هم برای برآوردن منظورمان کافی است. با این حال، مواردی پیش می‌آید که ترسیم دقیق مهم است، مثلاً، هنگام ترسیم نقشه‌ی راه‌ها، نقشه‌ی ساختمان، یا حتی نقشه‌ی ابزار ساده یا پیچیده. در این درس، با ترسیم‌های مهم به کمک خط‌کش و پرگار آشنا می‌شویم.

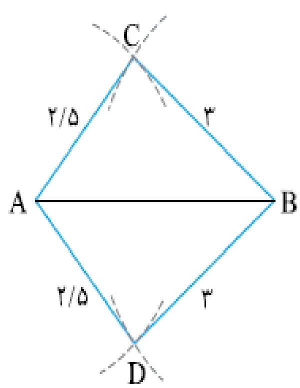
فرض کنید O نقطه‌ای در صفحه باشد. اگر به مرکز O دایره‌ای به شعاع ۵ رسم کنیم، فاصله‌ی همه‌ی نقطه‌های روی این دایره تا نقطه‌ی O برابر با ۵ است. در ضمن، هیچ نقطه‌ی دیگری در صفحه نیست که فاصله‌اش تا نقطه‌ی O برابر با ۵ باشد.



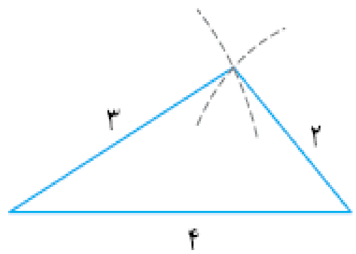
فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه باشند. اگر دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنیم و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمان بزنیم، این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این نقطه‌ها را M و N بنامید. در این صورت فاصله‌ی M و N از A و B یکسان است.



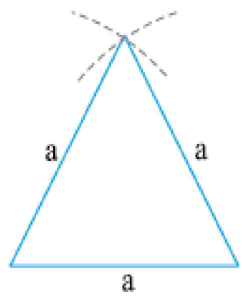
فرض کنید A و B دو نقطه در صفحه به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر باشند. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۲/۵ سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی A کمانی می‌زنیم. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۳ سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه‌ی B کمانی می‌زنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این دو نقطه را C و D بنامید. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی C تا نقطه‌ی A برابر با ۲/۵ سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با ۳ سانتی‌متر است. همین‌طور، فاصله‌ی نقطه‌ی D تا نقطه‌ی A برابر با ۲/۵ سانتی‌متر و تا نقطه‌ی B برابر با ۳ سانتی‌متر است.



مثال: می‌خواهیم مثلثی به طول ضلع‌های ۲، ۳ و ۴ رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی به طول ۴ رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس از یک سر آن کمانی به شعاع ۲ و از سر دیگر آن کمانی به شعاع ۳ رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث است.



مثال: می‌خواهیم مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم کنیم. ابتدا پاره‌خطی دلخواه رسم می‌کنیم. دو سر این پاره‌خط دو رأس مثلث مورد نظرند. سپس به مرکز هر یک از دو سر این پاره‌خط کمانی به شعاع طول پاره‌خط رسم شده می‌زنیم. محل برخورد این دو کمان رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاع مورد نظر است.



فعالیت

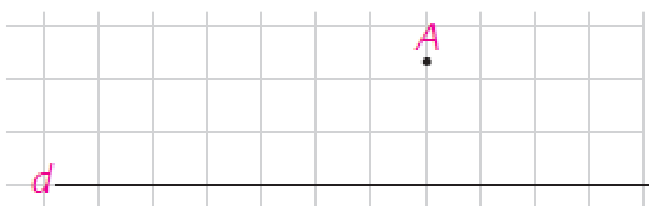
(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

۱ــ نقطه‌ای مانند O را در صفحه درنظر بگیرید و برای رسم کردن از خط کش و پرگار استفاده کنید.

نقاطی را مشخص کنید که فاصلهٔ یکسانی از نقطهٔ O دارند. (مثلاً همهٔ نقاطی که فاصله‌شان از نقطهٔ O برابر ۲ سانتی‌متر است.)

۲ــ نقاط A و B را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنید و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

۳ــ نقطهٔ A، مانند شکل مقابل به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ A باشند.



۴ــ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ A یک کمان بزنید. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازهٔ شعاع آنها و فاصلهٔ نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

کاردرکلاس

۱ــ دو نقطه مانند A و B را به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

۲ــ توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

۳ــ جاهای خالی را به‌گونه‌ای کامل کنید که مسئلهٔ زیر :

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

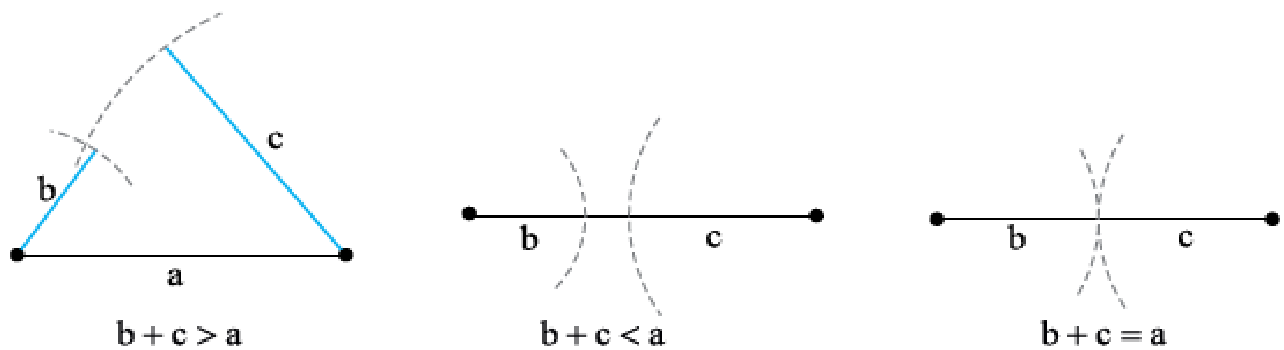
نقاط A و B به فاصلهٔ .... از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر .... و از نقطهٔ B برابر .... باشد.

نتیجه فرض کنید a ، b و c عددهایی حقیقی و مثبت باشند. برای این‌که مثلثی به طول ضلع‌های a ، b و c وجود داشته باشد، باید

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b$$

زیرا

پاره‌خطی به طول a در نظر بگیرید. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً b باز کنید و به مرکز یکی از دو سر پاره‌خطی که رسم کرده‌اید، کمانی بزنید. اکنون دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواه، مثلاً c باز کنید و به مرکز سر دیگر پاره‌خط، کمانی بزنید. در این‌صورت، برای این‌که کمان‌ها یکدیگر را در نقطه‌ای خارج پاره‌خط اولیه قطع کنند باید $b+c>a$.



توجه کنید که اگر ابتدا پاره‌خطی به طول b در نظر بگیریم و بعد کمان‌هایی به شعاع a و c بزنیم، برای این‌که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول b قطع کنند، باید $a+c>b$.
همین‌طور، اگر ابتدا پاره‌خطی به طول c در نظر بگیریم و سپس کمان‌هایی به شعاع a و b بزنیم، برای این‌که کمان‌ها یکدیگر را در خارج پاره‌خط به طول c قطع کنند، باید $a+b>c$.

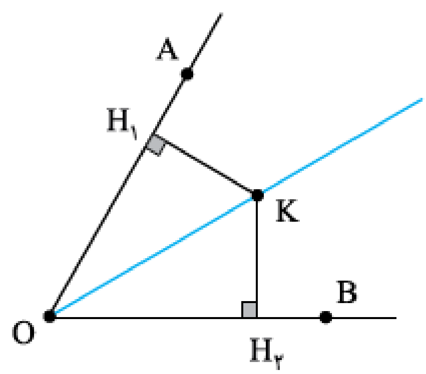
خاصیت اصلی نیمساز و ترسیم نیمساز

مسئله1:

نشان دهید هر نقطه ای که رو نیمساز یک زاویه باشد فاصله اش از دو سر نیمساز یکسان است و برعکس.

حل:

زاویه‌ی AOB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه‌ای روی نیمساز آن باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر OA و OB رسم کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی KH_1O و KH_2O یک ضلع مشترک دارند (KO) و دو زاویه‌ی حاده‌ی برابر هم دارند، زیرا OK نیمساز است، پس $H_1\hat{O}K=H_2\hat{O}K$. بنابراین مثلث‌های KH_1O و KH_2O به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده همنهشت‌اند و در نتیجه $KH_1=KH_2$. یعنی فاصله‌ی K تا ضلع‌های زاویه‌ی AOB برابر است.



اکنون فرض کنید K نقطه‌ای درون زاویه‌ی AOB باشد و فاصله‌ی K از دو ضلع این زاویه برابر باشد. از K عمودهای KH_1 و KH_2 را به ترتیب بر ضلع‌های OA و OB رسم کنید. در این صورت $KH_1=KH_2$. نقطه‌ی O را به نقطه‌ی K وصل کنید. توجه کنید که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی KH_1O و KH_2O وتر مشترک و دو ضلع برابر دارند. در نتیجه این دو مثلث به حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند. به این ترتیب $H_1\hat{O}K=H_2\hat{O}K$، یعنی K روی نیمساز زاویه‌ی AOB قرار دارد.

نتیجه هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز این زاویه قرار دارد.

فعالیت

۱ــ زاویهٔ xOy را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۲ــ دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.

ــ طول پاره‌خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ پاره‌خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ اندازهٔ زوایه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ پاره‌خط OW برای زاویهٔ xOy چه نوع پاره‌خطی است؟

کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

خاصیت اصلی عمودمنصف و ترسیم عمودمنصف

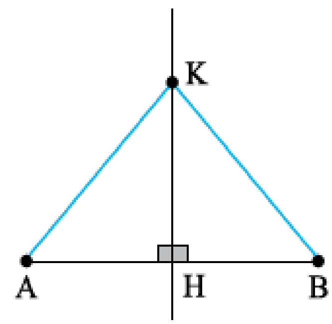
مسئله 2:

نشان دهید اگر نقطه ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و برعکس.

حل:

پاره‌خط AB را در نظر بگیرید و فرض کنید K نقطه‌ای روی عمودمنصف آن باشد. از K به A و B وصل کنید (شکل را ببینید). در این صورت مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AHK و BHK یک ضلع مشترک دارند (KH)، یک زاویه‌ی (قائمه‌ی) برابر دارند $(A\hat{H}K=B\hat{H}K)$ و دو ضلع برابر نیز دارند $(AH=BH)$.

بنابراین مثلث‌های AHK و BHK همنهشت‌اند (ض‌زض) و در نتیجه $KA=KB$. یعنی فاصله‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر است.



اکنون فرض کنید فاصله‌ی نقطه‌ی K تا دو سر پاره‌خط AB برابر باشد. فرض کنید H وسط پاره‌خط AB باشد و از K به A ، B و H وصل کنید. در این صورت مثلث‌های AHK و BHK همنهشت‌اند (ض‌ض‌ض). بنابراین زاویه‌های AHK و BHK برابرند و چون این دو زاویه مکمل‌اند، پس $A\hat{H}K=B\hat{H}K=90^\circ$ ، یعنی K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

نتیجه هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

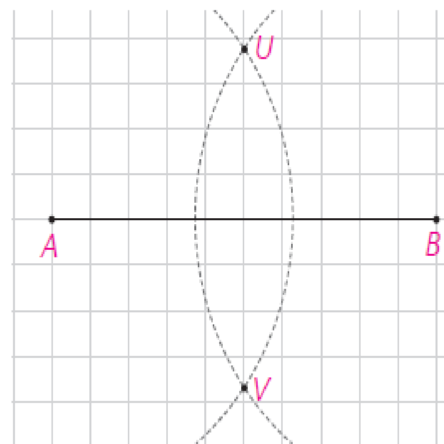
فعالیت

۱ــ یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند.
چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه موردنظر بگذرد؟

۲ــ دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ موردنظر بگذرد؟

۳ــ به نظر شما برای اینکه یک خط به‌طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟

فعالیت



پاره‌خط AB را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطهٔ A و بار دیگر با همان اندازه از نقطهٔ B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.

۲ــ طول پاره‌خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳ــ طول پاره‌خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۴ــ آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند؟ چرا؟

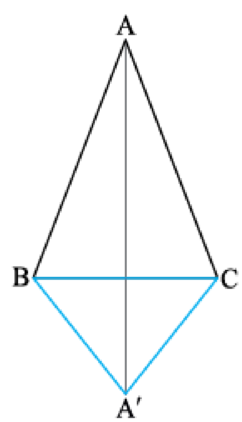
۵ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

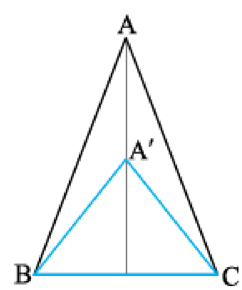
کاردرکلاس

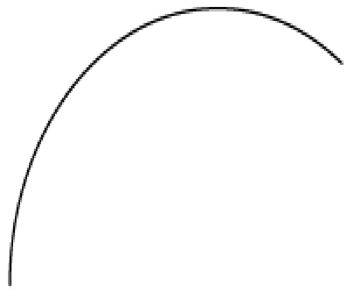
مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

مسئله ۳ دو مثلث متساوی‌الساقین قاعده‌ای مشترک دارند. ثابت کنید خطی که از دو رأس این مثلث‌ها می‌گذرد، بر قاعده‌ی مشترک آن‌ها عمود است.

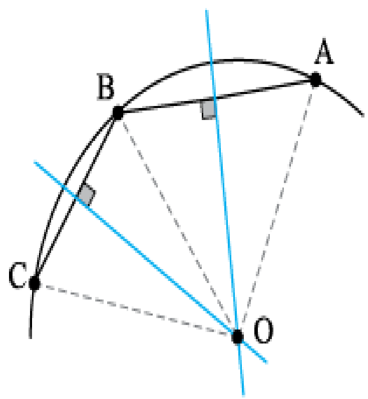
راه‌حل: فرض کنیم دو مثلث ABC و $A'BC$ متساوی‌الساقین باشند و BC قاعده‌ی مشترک هر دوی آن‌ها باشد. چون $AB=AC$ پس A روی عمودمنصف BC قرار دارد و چون $A'B=A'C$ در نتیجه A' روی عمودمنصف BC قرار دارد. بنابراین AA' عمودمنصف ضلع BC است. پس خط AA' بر BC عمود است.







مسئله ۴ در شکل روبه‌رو قسمتی از یک دایره را می‌بینید. چگونه می‌توان این دایره را کامل کرد؟



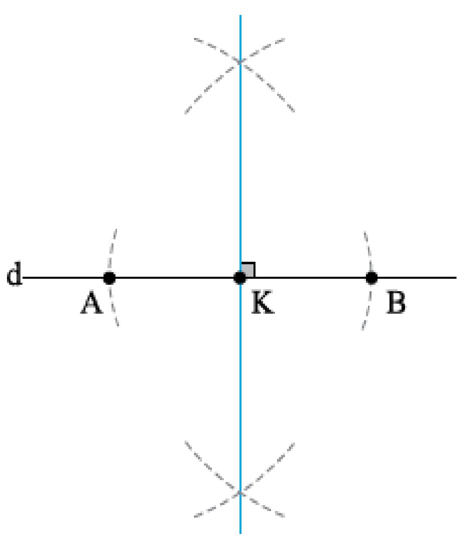
راه‌حل: سه نقطه‌ی A، B و C را روی قسمت داده شده در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). عمودمنصف پاره‌خط‌های AB و BC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند.
نقطه‌ی O از سه نقطه‌ی A، B و C به یک فاصله است، پس مرکز دایره‌ی مورد نظر است.
اکنون اگر به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم کنیم، این دایره، دایره‌ی مورد نظر است.

مسئله 5:

نحوه رسم خط عمود بر یک خط را توضیح دهید.

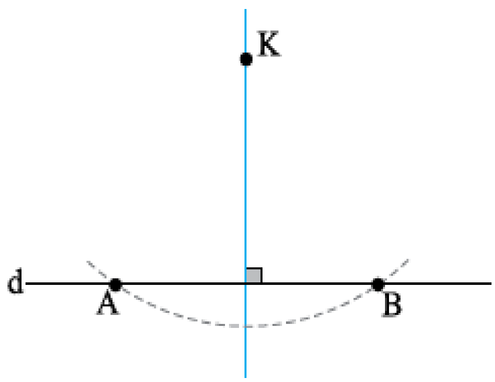
خط d مفروض است. می‌خواهیم از نقطه‌ی K در صفحه، خطی عمود بر خط d رسم کنیم. دو حالت وجود دارد.

الف) نقطه‌ی K روی خط d است



به مرکز نقطه‌ی K و شعاعی دلخواه کمانی بزنید تا خط d را در نقطه‌های A و B قطع کند (شکل را ببینید). در این صورت K وسط پاره‌خط AB است. اکنون اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، حتماً از K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

ب) نقطه‌ی K خارج خط d است

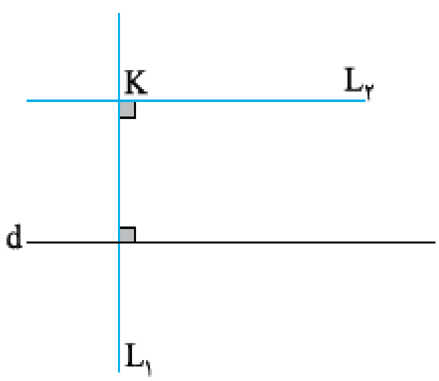


به مرکز نقطه‌ی K کمانی بزنید که خط d را در نقطه‌هایی مانند A و B قطع کند. در این صورت فاصله‌ی K از A و B برابر است، پس K روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. بنابراین اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، از نقطه‌ی K می‌گذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

توجه: دقت کنید که در روش‌های بالا مهم نیست نقطه‌ی K روی خط باشد یا خیر، روش یکی است.

مسئله 6:

مراحل رسم خطی موازی با یک از یک نقطه غیر واقع بر آن را توضیح دهید.



فرض کنید خط d داده شده و K نقطه‌ای خارج آن است. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از K بگذرد و با d موازی باشد. ابتدا L_1 را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر d عمود باشد. سپس خط L_2 را طوری رسم می‌کنیم که از K بگذرد و بر L_1 عمود باشد. در این صورت خط‌های d و L_2 بر خط L_1 عمودند، پس موازی‌اند.

فعالیت

پاره‌خط داده شدهٔ AB در شکل مقابل را با اندازهٔ ۴ واحد درنظر بگیرید.

الف) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطهٔ برخورد این عمودمنصف با پاره‌خط AB، M باشد.

ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم کنید تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند.

پ) چهارضلعی ACBD چگونه چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟

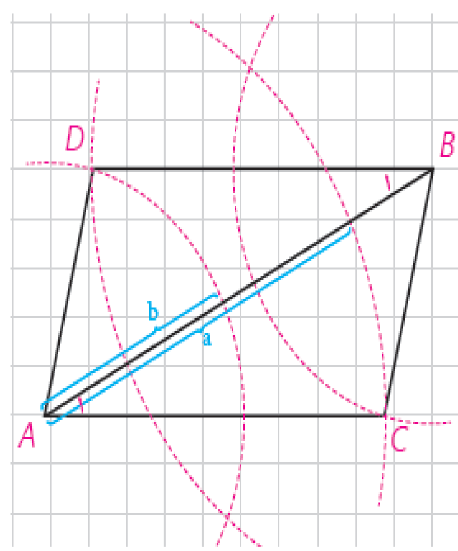
کاردرکلاس

طریقهٔ رسم مربعی را که طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دهید.

تمرین

۱ــ می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۲ــ می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.



۳ــ پاره‌خط AB داده شده است. دهانهٔ پرگار را یک بار به اندازهٔ a و بار دیگر به اندازهٔ b باز می‌کنیم و از نقطهٔ A دو کمان می‌زنیم. (به‌طوری‌که مجموع a و b از اندازهٔ AB بزرگ‌تر باشد) سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این‌بار از نقطهٔ B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چهارضلعی ACBD چه نوع چندضلعی‌ای است؟ چرا؟

(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های ABC و ABD و زوایای A_1 و B_1 نسبت به هم چگونه‌اند.)

۴ــ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.

۵ــ می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

۶ ــ دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۲ واحد باشد.

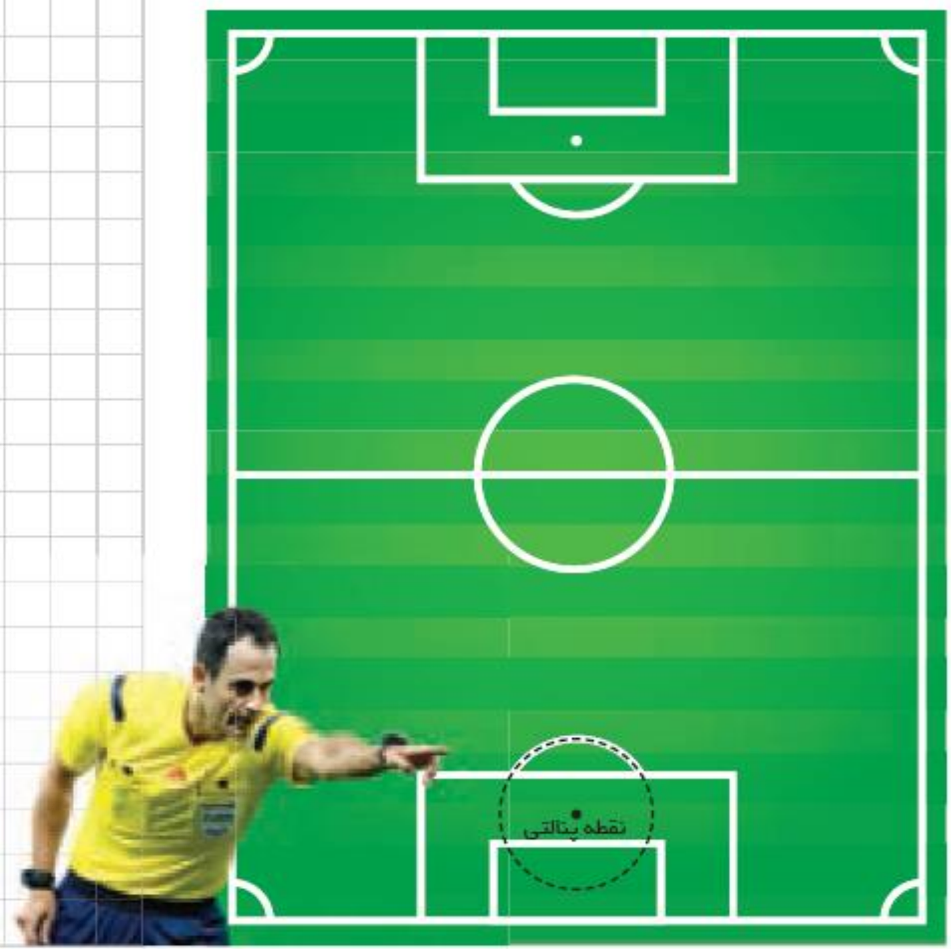
ب) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویهٔ موردنظر را رسم کنید.

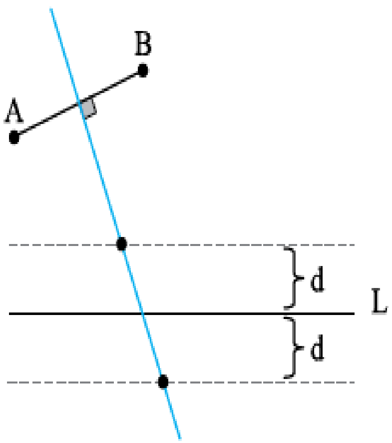
۷ــ وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطهٔ پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطهٔ جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطهٔ پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطهٔ هجده قدم، نقطهٔ پنالتی را مشخص کند.



مسئله ۶ d عددی مثبت است. A و B دو نقطه در صفحه‌اند و L خطی راست است. همه‌ی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از A و B برابر هم و فاصله‌ی آن‌ها از L برابر با d باشد.



راه‌حل: نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف AB هستند و نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از L برابر d است، دو خط راست موازی با L و به فاصله‌ی d از L هستند. پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد عمودمنصف AB و این دو خط موازی با L هستند.

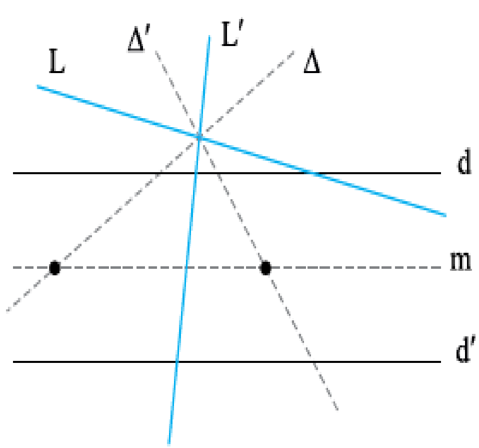
بحث در تعداد جواب:

حالت (۱): اگر عمودمنصف AB با دو خط متقاطع باشد، دو جواب داریم.

حالت (۲): اگر عمودمنصف AB موازی با این دو خط باشد، جواب نداریم.

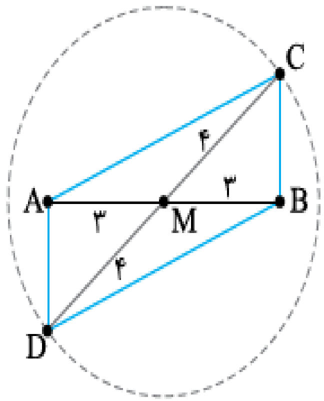
حالت (۳): اگر عمودمنصف AB بر یکی از این دو خط منطبق شود، تعداد نامتناهی جواب داریم.

مسئله ۷ همه‌ی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط موازی مفروض برابر باشد، در ضمن از دو خط متقاطع مفروض به یک فاصله باشد.



راه‌حل: دو خط موازی را d و d' و دو خط متقاطع را L و L' می‌نامیم. نقطه‌هایی که از دو خط d و d' به یک فاصله هستند، روی خط راستی موازی این دو خط هستند که به فاصله‌ی نصف فاصله‌ی دو خط d و d'، در میان آن‌ها قرار دارد (خط m در شکل روبه‌رو). از طرف دیگر نقطه‌هایی که فاصله‌ی آن‌ها از دو خط متقاطع L و L' برابر است، روی نیمسازهای دو زاویه‌ای هستند که با این خط‌ها تشکیل می‌شوند (دو خط Δ و Δ' در شکل روبه‌رو). پس نقطه‌های مورد نظر، محل برخورد خط‌های Δ و Δ' با خط m هستند.

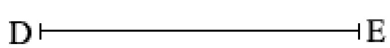
مسئله ۸ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد. در تعداد جواب‌ها بحث کنید.

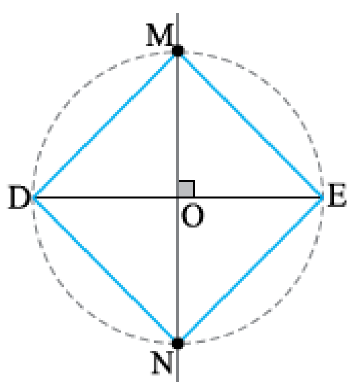


راه‌حل: می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. اکنون مطابق شکل پاره‌خط AB را به طول ۶ رسم می‌کنیم. وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم. به مرکز M و شعاع $\frac{۸}{۲}=۴$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. اکنون، یکی از قطرهای دلخواه از این دایره را رسم می‌کنیم (مانند قطر CD در شکل، فقط دقت کنید که قطر مورد نظر از A و B عبور نکند). چهارضلعی ACBD متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.
واضح است که نامتناهی متوازی‌الاضلاع با این ویژگی‌ها می‌توان رسم کرد.

مسئله 9:

مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض DE قطر آن باشد؟



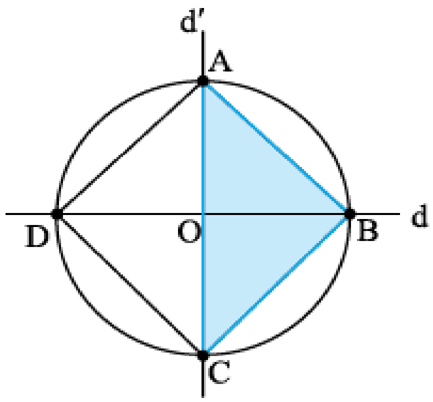


راه‌حل: می‌دانیم در مربع قطرها عمودمنصف یکدیگر هستند و دارای طول برابرند. پس ابتدا عمودمنصف پاره‌خط معلوم DE را رسم می‌کنیم.
سپس به مرکز نقطه‌ی O، وسط پاره‌خط DE و شعاع OE دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف DE را M و N می‌نامیم. چهارضلعی MEND مربع موردنظر است.

مسئله 10:

مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به اندازه‌ی وتر $۴\sqrt{۲}$ رسم کنید.

راه‌حل: می‌دانیم در مربع، دو قطر مساوی و عمودمنصف یکدیگرند. پس دو خط عمود بر هم d و d′ را رسم می‌کنیم. به مرکز O و شعاع $۲\sqrt{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو خط d و d′ را در نقطه‌های A ، B ، C و D قطع کند. در این‌صورت ABCD مربع به قطر $۴\sqrt{۲}$ است. به این‌ترتیب مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC مثلث مورد نظر است.



درس دوم

استدلال:

استدلال دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی است برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

برای استدلال کردن راه‌های متفاوتی وجود دارد که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد.

انواع استدلال ها در ریاضیات

1– **شهودی** 2– **تمثیلی** 3– **استقرائی** 4– **استنتاجی**

استدلال شهودی :

استدلال شهودی مبتنی بردرک شهودی است وبه نوعی درک بدون استدلال است وبه وسیله ی حواس پنج گانه انجام می شود

استدلال تمثیلی :

تایید صحت یک اصل ، موضوع یایک خبری بااستفاده ازمثال به عبارت دیگر یافتن نوعی تشابه بین مفاهیم گوناگون وارائه تناسب موضوعات جهت نشان دادن نتایج.

به طورکلی و با بیان ساده (می توانیم بگوییم) منظورازاستدلال تمثیلی یعنی اثبات یک حکم بااستفاده ازمثال ومشابه سازی موضوع

استدلال استقرائی :

روش نتیجه گیری کلی برمبنای مجموعه ی محدودی ازمشاهدات است ودراستدلال استقرایی ازجزء به کل می رسیم

.به عبارت دیگردراستدلال استقرائی ، بااستفاده ازانجام آزمایش ومشاهده ی تعدادمحدودی ازمشاهدات ، نتیجه گیری کلی می کنیم

نکات :

هراستدلالی که برپایه تجربه باشد استقرائی است.

استقراء ریاضی یک نمونه ازاستدلال استقرائی است نه همه ی آن.

دانشمندان علوم تجربی به روش استقراء نتیجه گیری می نمودند یعنی چندبارآزمایش می نمودندوپس ازبررسی آن رابه عنوان نتیجه کلی عنوان می نمودند

استدلال استقرائی درصورتی عمومیت دارد وقابل استناداست که نمونه ای نادرست برای آن یافت نشود

دراستدلال استقرائی ازیک حکم جزئی یک نتیجه ی کلی میگیریم ودرواقع ازجزء به کل می رسیم

استدلال استنتاجی :

روش نتیجه گیری بااستفاده ازحقایقی است که درستی آن هاراقبلا پذیرفته ایم .

نمونه های از انواع استدلال و توجیه و تحلیل هر کدام

نمونه	استدلال	توجیه یاتحلیل
بیان این نکته که " کوه تاه ترین فاصله بین دونقطه به صورت خط " مستقیم است	شهودی	بااستفاده ازدرک شهودی می توان مشاهده کردخط مستقیم کوتاهترین فاصله است
بدست آوردن فاصله ی سیارات ازخورشیدتوسط گالیله	استقرائی	مبنای اولیه کارآنها آزمایش وحدس وبازهم آزمایش بوده است
خارج قسمت اعدادچهاررقمی ababبر ۱۰۱ برابراست باab	استنتاجی	بااستنادبه دانسته هایمان درموردارزش مکانی .قانون تقسیم وفاکتورگیری و... این نتیجه محقق می شود
تشخیص اوقات شرعی بااستفاده ازسایه اشیاء ورویت ستارگان	شهودی	درک به وسیله ی حواس درآنچه که درپیرامون ما می گذشته است
برگ درختان سبزدرنظرهوشیار هرورقش دفتریست معرفت کردگار	شهودی	برپایه شهوداست – نظرکردن به نشانه های هستی حدس وآزمایش نیازنیست – پیش نیازنمی خواهد.. بدون استدلال است

بهترین ومحکم ترین روش استدلال ، استدلال استنتاجی است

اثبات : به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می گوییم.

فرض مسئله : اطلاعاتی که در مسئله داده شده یا حقایقی که مربوط به آن مسئله باشد. (به طور خلاصه داده ها مسئله)

حکم مسئله : خواسته های مسئله را حکم مسئله می گویند.

مثال : در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید :

الف) زاویه های روبه رو لوزی برابرند. فرض : خواص لوزی حکم : برابر بودن زاویه های رو به رو

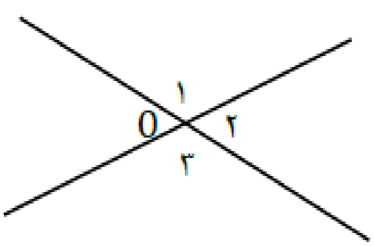
ب) طول دو مماس در دایره همواره برابرند. فرض : دایره و عمود بودن خط مماس بر شعاع حکم : برابر بودن دو مماس

مثال : با توجه به مفروضات داده شده نتیجه حاصل را بنویسید :

الف) $\left\{\begin{array}{l}\text{در لوزی قطر ها عمود منصف یکدیگر ند}\\ \text{لوزی نوعی مربع است}\end{array}\right.$ $\Leftarrow$ در مربع قطر ها عمود منصف یکدیگر ند

ب) $\left\{\begin{array}{l}\text{هر چهار ضلعی که زاویه قائمه داشته باشد مستطیل است}\\ \text{مربع دارای زاویه قائمه است}\end{array}\right.$ $\Leftarrow$ مربع نوعی مستطیل است

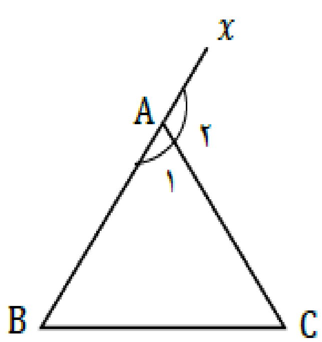
مثال : ثابت کنید زاویه های متقابل به راس با هم برابرند.



فرض : $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ دو زاویه متقابل به راس حکم : $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180 \text{ درجه}\\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180 \text{ درجه}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \cancel{\hat{O}_2} = \cancel{\hat{O}_2} + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

مثال : ثابت کنید زاویه ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن.



فرض : $\hat{A}_2$ زاویه ی خارجی مثلث حکم : $\hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180 \text{ درجه}\\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180 \text{ درجه}\end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\hat{A}_1} + \hat{A}_2 = \cancel{\hat{A}_1} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

هم نهشتی مثلث ها : دو مثلث به سه حالت هم نهشت هستند :

الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین مساوی (ض ز ض) ب) دو زاویه مساوی و ضلع بین مساوی (ز ض ز) ج) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

نکته : سه زاویه مساوی (ز ز ز) از حالت های هم نهشتی نیست.

هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه : دو مثلث قائم الزاویه به دو حالت هم نهشت هستند :

الف) وتر و یک زاویه ی تند (و ز) ب) وتر و یک ضلع (و ض)

نکاتی درباره هم نهشتی دو مثلث :

الف) اگر دو مثلث به هم چسبیده باشند دارای ضلع مشترک هستند.

ب) اگر دو مثلث به صورت ضربدری باشند دارای زاویه متقابل به راس هستند.

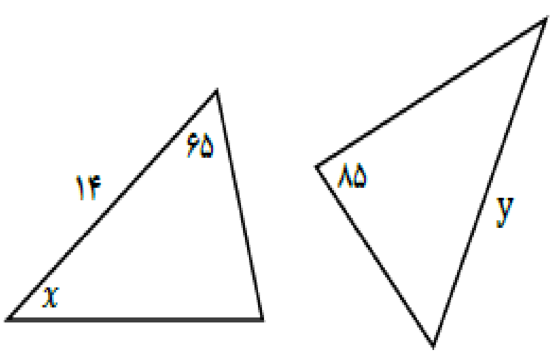
ج) اگر دو مثلث داخل دایره باشند از برابری شعاع دایره استفاده می کنیم.

د) در مثلث متساوی الاضلاع هر سه ضلع و هر سه زاویه برابرند.

ه) در مثلث متساوی الساقین دو ساق و دو زاویه ی مجاور قاعده برابرند.

نکته : در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند.

مثال : دو مثلث زیر هم نهشت هستند. مقادیر مجهول را مشخص کنید؟



(در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند)

(مجوع زاویه های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است) $۱۸۰ - (۸۵ + ۶۵) = ۳۰$

$x = ۳۰ \quad , \quad y = ۱۴$

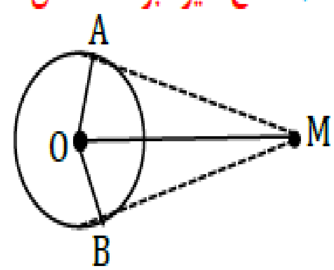
قدم های حل مسئله : برای حل مسئله ۴ گام (قدم) نیاز است :

۱) درک و فهم مسئله ۲) رسم شکل ۳) نوشتن فرض و حکم مسئله ۴) راهبرد حل مسئله

مثال : نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.

گام اول : (درک و فهم مسئله) شعاع دایره برخط مماس عمود و در دایره دو شعاع با هم برابرند.

گام دوم : (رسم شکل)



گام سوم : (نوشتن فرض و حکم)

فرض : $OA = OB \,, \hat{A} = \hat{B} = ۹۰$

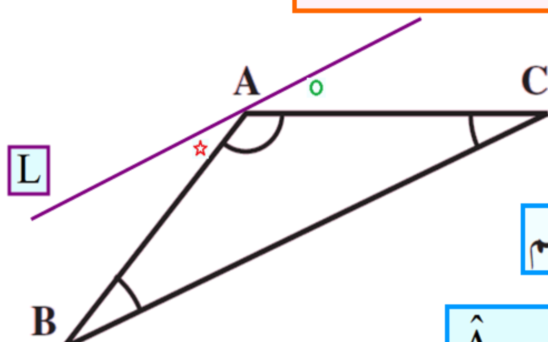
حکم : $MA = MB$

گام چهارم : (راهبرد حل مسئله)

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \text{ شعاع دایره} \\ \hat{A} = \hat{B} = ۹۰ \text{ درجه} \\ OM = OM = \text{ ضلع مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(و ض)}}{\triangle MAO \cong \triangle MBO} \Rightarrow \underset{\text{(اجزای متناظر)}}{MA = MB}$$

قضیه: مجموع زاویه‌های داخلی مثلث

در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی، ۱۸۰° است.



از A خطی به موازات BC رسم می کنیم

$BC \parallel L$ و خط AB مورب: $\hat{A}_* = \hat{B}$

$BC \parallel L$ و خط AC مورب: $\hat{A}_{o} = \hat{C}$

ولی می دانیم که: $\hat{A}_{*} + \hat{A}_{o} + \hat{A} = ۱۸۰^{o}$

پس داریم: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^{o}$

مسئله 1:

ثابت کنید سه عمود منصف اضلاع هر مثلث همرس اند.

مسئله 2:

نشان دهید سه ارتفاع هر مثلث همرس اند

مسئله 3:

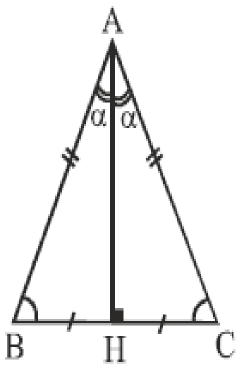
نشان دهید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس اند.

قضیه 1:

نشان دهید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر از زاویه رو به رو به ضلع کوچکتر است.

مثلث متساوی‌الساقین: مثلثی که دو ضلع برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین نامیده می‌شود، هر کدام از دو ضلع مساوی با هم را ساق و ضلع دیگر را قاعده می‌نامیم.

1. در مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبرو به اضلاع مساوی، با یکدیگر مساویند.
2. عکس قضیه‌ی (1) نیز صحیح است، یعنی اگر در مثلثی دو زاویه‌ی مساوی وجود داشته باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است (اضلاع روبرو به زاویه‌های مساوی آن با هم برابرند).
3. در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر قاعده، بر هم منطبقند.



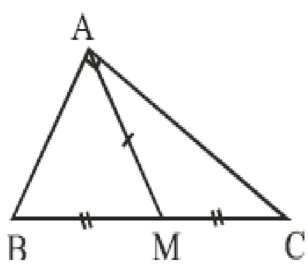
4. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ روابط زیر برقرار است،

زوایای مجاور به ساق $\hat{B}=\hat{C}=\dfrac{180^\circ-\hat{A}}{2}$

زاویه‌ی روبه‌رو به قاعده $\hat{A}=180^\circ-2\hat{B}=180^\circ-2\hat{C}$

با رسم میانه‌ی وارد بر وتر در هر مثلث قائم‌الزاویه، دو مثلث متساوی‌الساقین ایجاد می‌شود.

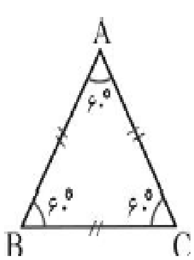
$$\begin{cases}\hat{A}=90\\ BM=CM\end{cases}\Rightarrow$$ متساوی‌الساقین هستند $\overset{\Delta}{MAC}$ و $\overset{\Delta}{MAB}$



مثلث متساوی‌الاضلاع

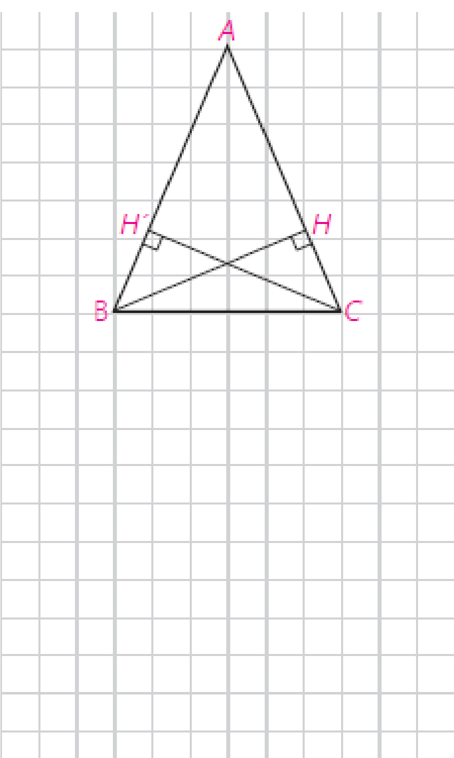
مثلثی که هر سه ضلع آن با هم برابر باشند، متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شود. زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع، هر سه با هم برابرند و اندازه‌ی آن‌ها 60 درجه است.

همچنین اگر هر سه زاویه‌ی مثلثی با هم برابر بودند، می‌توان نتیجه گرفت که آن مثلث متساوی‌الاضلاع است، یعنی هر سه ضلع آن مثلث با هم برابرند.



اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.



مثال :

قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث‌بودن ABC و ارتفاع‌بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

تعاریف:

گزاره یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزارهٔ ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزارهٔ ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزارهٔ مرکب است.

توجه:

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند، بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً درب کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

نقیض یک گزاره : همان‌طورکه گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

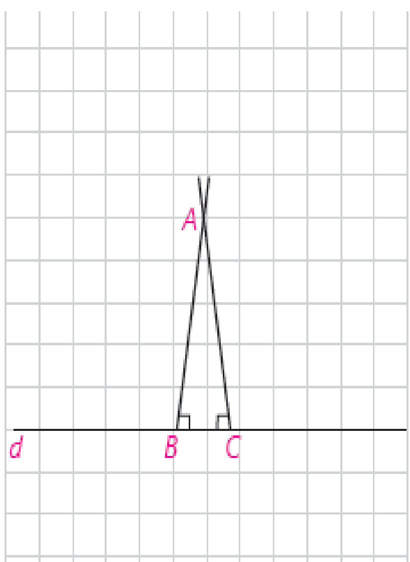
الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»
نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»
پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.»
نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی‌اش 360° است.»

برهان خلف:

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین‌صورت که به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.



مثال : از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض : نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم : از نقطهٔ A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال : با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطهٔ A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

عکس قضیهٔ ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

اثبات:

قضیه دوشرطی:

به عبارت $P \Rightarrow q$ یک قضیه شرطی می گویند. P را فرض قضیه و q را حکم آن می نامند. در صورتی که عکس یک قضیه شرطی نیز درست باشد آن قضیه را قضیه دو شرطی می نامند.

مثال: الف) قضیه فیثاغورس یک قضیه دو شرطی است.
ب) قضیه تالس در صفحه یک قضیه دو شرطی است.
ج) قضیه تالس در فضا یک قضیه شرطی است و عکس آن درست نیست.

قضیه‌های دو شرطی را می‌توان با نماد ⇔ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛

مثال نقض:

مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی غلط است.

مثال: اگر a و b دوعدد اول باشند آنگاه جمع آنها هیچگاه اول نیست. جواب: نادرست. مثال نقض: $\left.\begin{matrix} a=2 \\ b=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b=5$

مثال:

مثال های زیر نمونه های از حکم های کلی هستند ، برای رد این احکام مثال نقض بیاورید.

الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

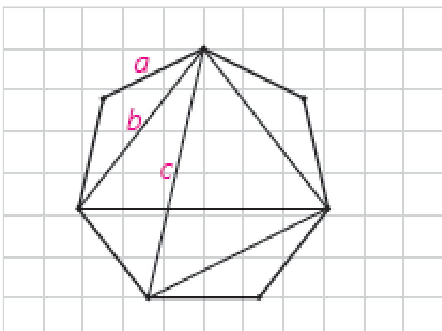
پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌های محدب)

ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت n^2+n+41 عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

توجه:

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

کار در کلاس



۱ــ در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به‌دست می‌آید».

۲ــ آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعهٔ A و B، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

تمرین

۱ــ می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲ــ با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳ــ گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴ــ با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $۱۸۰ \times (n-۲)$.

۵ــ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر ۳۶۰° است.

۶ــ عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

سوالات امتحانی فصل اول:

۱	عکس هر یک از قضیه های زیر را بنویسید. سپس اگر عکس آنها درست باشد آن را به صورت قضیه دو شرطی بنویسید و اگر عکس آن درست نباشد یک مثال نقض بیاورید. الف)هر دو مثلث همنهشت دارای مساحت های برابرند. ب) مثلثی که دو زاویه برابر دارد ،دارای دو ضلع برابر است. ج)اگر سه ضلع مثلث برابر باشند ، هر زاویه آن ۶۰° است . د) هر کس در خواف زندگی می کند در استان خراسان است
۲	ثابت کنید: مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر ارتفاع مثلث است .
۳	قضیه: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند ، آنگاه زاویه مقابل به ضلع بزرگتر ، بزرگتر است از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر.
٤	قضیه(نامساوی مثلث) : در هر مثلث، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.
٥	سه ضلع مثلثی ۸و۱۲و۱۵ سانتی متر ند. اندازه پاره خط هایی که نیمساز زاویه بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید.
٦	قضیه: عمود منصف های ضلع های هر مثلث همرسند.
۷	از مثلث $AB^{\Delta}C$ ،اندازه ضلعهای AB=c و AC=b و طول ارتفاع $AH=h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید .
۸	مکان هندسی مرکز دایره ای که روی یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد را تعیین کنید.
۹	هریک از مفاهیم زیر را تعریف کنید . الف) مکان هندسی ب) عکس قضیه شرطی ج) زاویه محاطی د) چند ضلعی محیطی
۱۰	قضیه: در هر دایره ، قطر عمود بر هر وتر ،آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف میکند.
۱۱	دایره ی محاطی مثلث را تعریف کرده، اگر r شعاع دایره ی محاطی و p نصف محیط مثلث و s مساحت مثلث باشد.ثابت کنید $s = pr$
۱۲	قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برای نصف کمان مقابل آن است
۱۳	کمان در خور زاویه 30^o روبروی پاره خط AB=۴cm را رسم کنید. و مراحل رسم را توضیح دهید.
	موفق باشید. ولی زاده

برای غلط بودن عبارات مثال نقض بزنید .

الف) هر چهار ضلعی که قطر هایش منصف باشند، مستطیل هست.

ب) نقطه همرسی عمود منصفها ی سه ضلع مثلث همواره داخل مثلث است .

صحیح وغلط بودن عبارات را تعیین کنید .

الف) جمله ((درس بخوان؟)) یک گزاره نیست .

ب) مثلثی با اضلاع ۴و۸و۲۰ قابل رسم است.

ج) از دو نقطه فقط یک خط میتوان رسم کرد.

د) استدلال استنتاجی بر اساس واقعیتی که درستی آنراپذیرفته ایم است.

ه) مجموع زاویه های داخلی هرچهار ضلعی محدب ۱۸۰ درجه است.

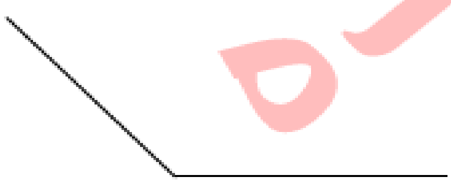
متوازی الاضلاعی با قطرهای ۴و۳ رسم کنید .چند متوازی الاضلاع میتوان رسم کرد ؟چرا؟

یک لوزی به طول ضلع ۳وقطر۴ سانتی مترسم کنید .

با استفاده از خط کش و پرگار خطی موازی خط دلخواه L از یک نقطه خارج خط رسم کنید.

الف)بااستفاده ازپرگار نیمساززاویه ی زیررارسم را کنید.

ب) نقاط روی نیمساز چه خاصیتی دارد ؟



به روش غیر مستقیم ثابت کنید :

اگردر مثلثی دو زاویه نابرابر باشند آنگاه ضلع مقابل به زاویه بزرگتر بزرگتر است ازضلع مقابل به زاویه کوچکتر .

ثابت کنید سه نیمساز زاویه های داخلی هر مثلث همرسند .

الف) قضیه ((در هر مثلث اگر سه ضلع برابر باشند، آن گاه سه زاویه نیز با هم برابرند))

را بصورت دو شرطی بنویسید.

ب) نقیض گزاره ی ((هیچ عدد صحیحی بین ۳ و ۴ وجود ندارد.)) را بنویسید.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱-اگر نقطه ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد،آن نقطه روی ------- قرار دارد.

۲-یک جمله خبری که دقیقا درست یا نادرست باشد ، --------- نام دارد .

۳-اگر نقطه ای از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد ، آن نقطه روی ---------- پاره خط قرار دارد .

۴-اگر در یک قضیه ، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می شود ---------- گفته می شود .

گزینه درست را انتخاب کنید.

۱-نقیض گزاره ی " هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد " کدام است ؟

الف) هر مثلثی بیش از یک زاویه قائمه دارد ○
ب) هر مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد ○
ج) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه قائمه ندارد ○
د) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه قائمه دارد ○

۲-کدام جمله ی زیر گزاره است ؟

الف) کتابت را مطالعه کن ○
ب) چه هوای خوبی ! ○
ج) مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰درجه است . ○
د) آیا فردا هوا بارانی است؟ ○

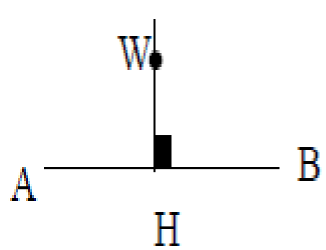
۳-برای کدام حکم کلی زیر مثال نقض وجود دارد ؟

الف) مجموع زاویه های داخلی هر چهار ضلعی محدب ۳۶۰درجه است ○
ب) هر دو مثلث هم نهشت هم مساحت هستند. ○
ج) به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار $n^{2}+n+41$ عددی اول است . ○
د) عمودمنصف های هر مثلث هم راس اند. ○

عکس قضیه ی زیر را بنویسید.

" در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند ، دو زاویه روبرو به آنها نیز برابرند."

در شکل مقابل نشان دهید نقطه ی W از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است .



تعریف کنید. الف) استدلال استقرایی: ب) مثال نقض: ج) قضیه:
یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۴ سانتی متر باشند و مراحل کار را رسم کنید.
ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف پاره خط AB از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.
به کمک استدلال استنتاجی نشان دهید هر سه نیمساز زاویه های داخلی مثلث همرس اند.
قضیه: ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند. زاویه روبرو به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه روبرو به ضلع کوچکتر.
عکس قضیه های زیر را بنویسید. اگر عکس آن نیز درست بود، آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید در غیر این صورت برای آن مثال نقض بیاورید. الف)اگر دو مثلث هم نهشت باشند آنگاه دارای مساحت های برابر هستند. ب)اگر دو مثلث متشابه باشند آنگاه اظلاع متناظر شان متناسب هستند.
با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $B \neq C$.

مفاهیم زیر را تعریف نمایید:
الف) استدلال استنتاجی:
ب)گزاره :
ج)مثال نقض :
د)قضیه اساسی تشابه :

رسم خطی موازی یک خط داده شده از یک نقطه ی خارج آن را با رسم شکل و کلیه مراحل توضیح دهید.

متوازی الاضلاعی رسم نمایید که طول ضلع هایش ۵ و ۶ و طول قطر آن ۸ باشد.(مراحل رسم را توضیح دهید)

ثابت کنید ارتفاع های هر مثلث هم راسند.(شکل رسم نمایید)

الف)قضیه نامساوی ها در مثلث را بیان نمایید.
ب) قضیه فوق را اثبات نمایید.(رسم شکل فراموش نشود)

اندازه اضلاع سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ می باشد. اندازه پاره خط هایی که نیمساز زاویه بزرگتر مثلث مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد تعیین کنید.

قضیه زیر را به صورت شرطی نوشته و سپس فرض و حکم آن را تعیین کنید.
در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

سوالات تستی

ردیف	سوالات
1	در کدام‌یک از اشکال زیر، همواره نقطه‌ی تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع و نقطه‌ی تقاطع نیم‌سازهای زاویه‌ها، برهم منطبق است؟ ۱) مستطیل ۲) لوزی ۳) مثلث ۴) شش‌ضلعی منتظم
2	-نیم‌سازهای دو زاویه‌ی مجاور، با یکدیگر زاویه‌ی ۷۰ درجه ساخته‌اند. اگر نسبت اندازه‌ی دو زاویه $\frac{۳}{۴}$ باشد، زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟ ۱) ۳۰° ۲) ۴۰° ۳) ۶۰° ۴) ۸۰°
3	-نقطه‌ی M درون مثلث ABC به‌گونه‌ای قرار دارد که از اضلاع AB و AC به یک فاصله است. نقطه‌ی M لزوماً روی ... قرار دارد. ۱) محل تقاطع عمودمنصف‌های AB و AC ۲) نیم‌ساز رأس A ۳) محل تقاطع نیم‌ساز رأس‌های B و C ۴) نیم‌ساز رأس B
4	-عمودمنصف پاره‌خطی که از نقاط تقاطع عمودمنصف وتر AB با دایره به‌وجود می‌آید برابر است با ... ۱)قطری عمود بر AB ۲) وتری موازی و هم‌اندازه با AB ۳) خود وتر AB ۴) قطری موازی با وتر AB

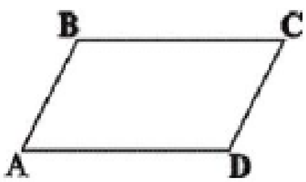
5	-مثلث ABC با داشتن مقادیر $b=۱۰$، $c=۱۷$ و $h_a=۸$ رسم شده است. مساحت این مثلث کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟ ۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۶۰ ۴) ۴۸
6	-نیم‌سازهای دو زاویه‌ی مجاور، با یکدیگر زاویه‌ی ۷۰ درجه ساخته‌اند. اگر نسبت اندازه‌ی دو زاویه $\frac{۳}{۴}$ باشد، زاویه‌ی کوچک‌تر کدام است؟ ۱) ۳۰° ۲) ۴۰° ۳) ۶۰° ۴) ۸۰°
7	-نقطه‌ی M درون مثلث ABC به‌گونه‌ای قرار دارد که از اضلاع AB و AC به یک فاصله است. نقطـه‌ی M لزوماً روی ... قرار دارد. ۱) محل تقاطع عمودمنصف‌های AB و AC ۲) نیم‌ساز رأس A ۳) محل تقاطع نیم‌ساز رأس‌های B و C ۴) نیم‌ساز رأس B
8	-عمودمنصف پاره‌خطی که از نقاط تقاطع عمودمنصف وتر AB با دایره به‌وجود می‌آید برابر است با ... ۱)قطری عمود بر AB ۲) وتری موازی و هم‌اندازه با AB ۳) خود وتر AB ۴) قطری موازی با وتر AB

9 -نقاط A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از هم هستند. دو نقطه‌ی متمایز U و V فاصله‌شان از A برابر ۳ سانتی‌متر و از B برابر x سانتی‌متر است. x در کدام محدوده است؟

۱) $1 < x$ ۲) $x < 1$

۳) $1 < x < 7$ ۴) $1 < x < 11$

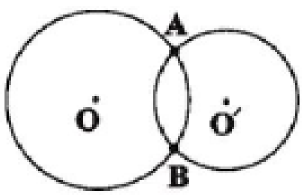
10 -از تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع زیر، لزوماً کدام شکل ایجاد می‌شود؟



۱) مستطیل ۲) مربع

۳) لوزی ۴) متوازی‌الاضلاع

11 -مطابق شکل، دو دایره به مراکز O و O' در نقاط A و B متقاطع می‌باشند. در این صورت لزوماً



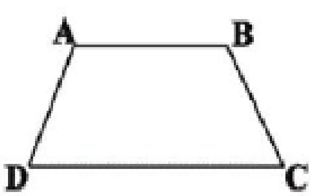
۱) OO' از وسط AB می‌گذرد.

۲) OO' بر AB عمود است.

۳) $O\hat{A}O' = O\hat{B}O'$

۴) هر سه گزینه صحیح است.

12 -در یک ذوزنقه، نقطه‌ای از دو سر قاعده‌ی CD به یک فاصله و همچنین از قاعده‌ی CD و ساق AD به یک فاصله است. این نقطه حاصل برخورد کدام است؟



۱) نیمسازهای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ ۲) عمودمنصف‌های دو ساق

۳) عمودمنصف CD و نیمساز زاویه‌ی D ۴) دو دایره با شعاع یکسان و به مرکز اوساط قاعده‌ها

13

-در مثلث ABC، دو رأس A و B ثابت هستند. با داشتن طول ارتفاع وارد بر AB، رأس C همواره روی کدام گزینه قرار دارد؟

۱) نیم‌دایره‌ای به قطر AB
۲) دایره‌ای به قطر AB
۳) یک خط موازی AB
۴) دو خط موازی AB