

۱- اگر  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1-x}{2x^2+bx+a-1} = -\infty$  باشد،  $a$  و  $b$  را حساب کنید.

« پاسخ »

چون حاصل حد برای راست و چپ یکسان شده است. بنابراین باید مخرج مربع کامل باشد در نتیجه داریم:

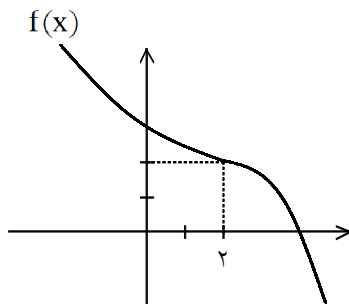
$$x=5 \Rightarrow x-5=0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x^2 - 10x + 25 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 20x + 50 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -20 \\ a-1 = 50 \Rightarrow a = 51 \end{cases}$$

۲- اگر  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x+1}{x^2+ax+b} = +\infty$  باشد،  $a$  و  $b$  را حساب کنید.

« پاسخ »

چون حاصل حد برای راست و چپ یکسان شده است بنابراین باید مخرج مربع کامل باشد در نتیجه داریم:

$$x=3 \Rightarrow x-3=0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases}$$



۳- با توجه به نمودار تابع  $f$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+10}{2-f(x)}$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+10}{2-f(x)} = \frac{12}{0^+} = -\infty$$

۴- اگر  $x^3 + mx + 1$  بر  $x-2$  بخش پذیر باشد  $m$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow R = 2^3 + m(2) + 1 = 0 \Rightarrow 9 + 2m = 0 \Rightarrow m = -\frac{9}{2}$$

۵- حاصل حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2^x - \log_2^2}{\log\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$x \rightarrow 2$

« پاسخ »

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2^x - \log_2^2}{\log\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2^x - \frac{1}{\log_2^x}}{\log_2^x - \log_2^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\log_2^x)^2 - 1}{\log_2^x (\log_2^x - 1)}$$

$x \rightarrow 2$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\log_2^x - 1)(\log_2^x + 1)}{\log_2^x (\log_2^x - 1)} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$x \rightarrow 2$

روش دوم (هویتال):

$$\log_2^x = t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t}}{t(t-1)} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t} = \frac{2}{2} = 1$$

۶- حد زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 16}{\sqrt[3]{x+2}}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x} \times \frac{x + \sqrt{2x-1}}{x + \sqrt{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x(x-1)(x + \sqrt{2x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{x\cancel{(x-1)}(x + \sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{x(x + \sqrt{2x-1})} = \frac{1-1}{1(1+1)} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2 + \sqrt{x+1})}{(2 - \sqrt{x+1})(2 + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)(2 + \sqrt{x+1})}{\underbrace{4 - x - 1}_{-(x-3)}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(2 + \sqrt{x+1})}{-1} = \frac{6 \times 4}{-1} = -24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 16}{\sqrt[3]{x+2}} &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2(x+8)(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x+4})}{(\sqrt[3]{x+2})(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x+4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\cancel{2(x+8)}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x+4})}{\cancel{(x+8)}} = \lim_{x \rightarrow -8} 2(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x+4}) \\ &= 2(4 + 2 \times 2 + 4) = 24 \end{aligned}$$

۷- حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$$

$$x \rightarrow 5$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$$

$$x \rightarrow -4$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cancel{x} \left( x - \frac{1}{2} \right)}{\cancel{x} \left( x - \frac{1}{2} \right) (2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x}{(2x + 1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\cancel{(x-5)} (x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-5)} (x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x + 1}{x + 5}$$

$$\frac{25 + 5 + 1}{10} = \frac{31}{10}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\cancel{(x+4)} (x-1)}{\cancel{(x+4)} (x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-1}{x^2 + 1} = \frac{-5}{17}$$

۸- حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} =$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{+1}{\underbrace{6}_{0/25}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{0/25} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{0/25}$

۹- حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} =$$

« پاسخ »

$$\frac{-1}{\underbrace{0^-}_{0/5}} = +\infty$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{0/25}$

۱۰- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-3}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|9-x^2|}{x-3}$

« پاسخ »

الف)  $D : x \geq 3 \leftarrow$  در همسایگی چپ ۳ تعریف نشده  $\leftarrow$  حد ندارد.

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \cos x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \cos x = 0$

۱۱- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

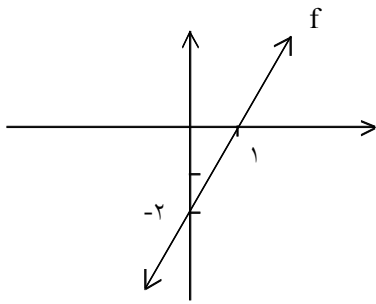
A)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 13x - 10}{x^2 - 6x + 5}$

B)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

« پاسخ »

A)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 13x - 10}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(3x+2)(x-5)}{(x-1)(x-5)} = \frac{3(5)+2}{5-1} = \frac{17}{4}$

B)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{2}$



۱۲- شکل زیر نمودار  $f(x)$  است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$  را حساب کنید.

« پاسخ »

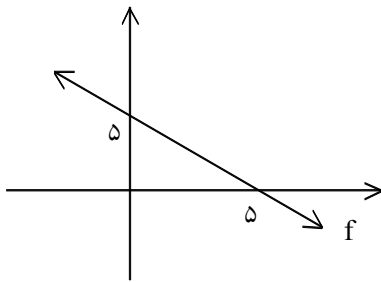
$f$  یک تابع خطی گذرنده از  $A(0, -2)$  و  $B(1, 0)$  است.

$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, -2) \Rightarrow a(0) + b = -2 \Rightarrow b = -2$$

$$B(1, 0) \Rightarrow a(1) + b = 0 \xrightarrow{b = -2} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{2} = 1$$



۱۳- شکل زیر نمودار  $f(x)$  است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{f(x)}$  را حساب کنید.

« پاسخ »

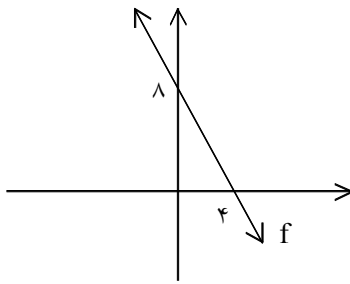
$f$  یک تابع خطی گذرنده از  $A(0, 5)$  و  $B(5, 0)$  است.

$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, 5) \Rightarrow a(0) + b = 5 \Rightarrow b = 5$$

$$B(5, 0) \Rightarrow a(5) + b = 0 \xrightarrow{b = 5} 5a + 5 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = -x + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x-5)}{-(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{-1} = -5$$



۱۴- شکل زیر نمودار  $f(x)$  است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x^2 - 5x + 4}$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$f$  یک تابع خطی گذرنده از  $A(0, 8)$  و  $B(4, 0)$  است.

$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, 8) \Rightarrow a(0) + b = 8 \Rightarrow b = 8$$

$$B(4, 0) \Rightarrow a(4) + b = 0 \xrightarrow{b=8} 4a = -8 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = -2x + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2}{x-1} = \frac{-2}{3}$$



۱۵- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} 2 - [-x] \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} \quad (\text{د})$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 2}{\sqrt{3x + 4}} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} \quad (\text{ج})$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \lim \frac{x - 2}{\sqrt{3x + 4}} = \frac{7 - 2}{\sqrt{21 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3^-} (2 - [-x]) = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x+3} = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x + \sin^2 x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

۱۶- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 3^-} (2 + [x]) \quad \text{ب)}$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \sin^3 x}{\cos^2 x} \quad \text{د)}$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 8} \frac{x + 7}{\sqrt{x + 1}} \quad \text{الف)}$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} \quad \text{ج)}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) Lim}_{x \rightarrow 8} \frac{x + 7}{\sqrt{x + 1}} = \frac{8 + 7}{\sqrt{8 + 1}} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\text{ب) Lim}_{x \rightarrow 3^-} (2 + [x]) = 2 + 2 = 4$$

$$\text{ج) Lim}_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \text{Lim}_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{(x-4)}(x-1)} = \text{Lim}_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x-1} = \frac{8}{3}$$

$$\text{د) Lim}_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 + \sin^3 x}{\cos^2 x} = \text{Lim}_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\cancel{(1 + \sin x)}(1 - \sin x + \sin^2 x)}{\cancel{(1 + \sin x)}(1 - \sin x)} = \text{Lim}_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \sin^2 x}{1 - \sin x}$$

$$= \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

۱۷- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x^2 - 4x} \quad (\text{ب})$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4x-4}}{\sqrt{x^2-1}} \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\text{الف) Lim}_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4(x-1)}}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Lim}_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{ب) Lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x^2 - 4x} \times \frac{\sqrt[3]{(x+8)^2} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4}{\sqrt[3]{(x+8)^2} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4}$$

$$= \text{Lim}_{x \rightarrow 0} \frac{x+8-8}{x(x-4)(\sqrt[3]{(x+8)^2} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4)} = \frac{1}{-4 \times 12} = -\frac{1}{48}$$

۱۸- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x - \sqrt{x+6}} \quad (\text{ب})$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+8} - 3} \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{الف) Lim}_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+8} - 3} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+8} + 3}{\sqrt{x+8} + 3} &= \text{Lim}_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+8}) + 3}{(\cancel{x+8-9})(\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x - \sqrt{x+6}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4}{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4} \times \frac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{x+6}} \\ &= \text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{(x+5-1)(x + \sqrt{x+6})}{(x^2 - x - 6)(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4)} \\ &= \text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x + \sqrt{x+6})}{\cancel{x-3}(x+2)(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4)} = \frac{6}{5 \times 12} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

۱۹- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x^2 - 9} \quad (\text{ب})$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} \quad (\text{الف})$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{الف) Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} &= \text{Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 - 4)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \text{Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \text{Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{3}{4 \times 4} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x^2 - 9} \times \frac{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4}{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4} \\ &= \text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x+3) \left( \sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4 \right)} \\ &= \text{Lim}_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3) \left( \sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4 \right)} = \frac{1}{6 \times 12} = \frac{1}{72} \end{aligned}$$

۲۰- اگر  $\text{Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 10$  باشد  $a, b$  را حساب کنید.

« پاسخ »

از آنجا که مخرج صفر می شود باید حد  $\div$  باشد بنابراین باید به ازای  $x = 2$  صورت کسر نیز صفر شود.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{x=2} 8 + 2a + b = 0 &\Rightarrow 2a + b = -8 \\ \text{Lim}_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \left( 2x - \frac{b}{2} \right)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{4 - \frac{b}{2}}{4} = 10 &\Rightarrow 4 - \frac{b}{2} = 40 \Rightarrow -\frac{b}{2} = 36 \Rightarrow b = -72 \\ 2a - 72 = -8 &\Rightarrow 2a = 64 \Rightarrow a = 32 \end{aligned}$$

۲۱- حد تابع روبه‌رو را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)}{(x^3 - 1)}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{3}$$

۲۲- در چند جمله‌ای  $p(x) = x^3 + ax^2 + x + b$  مقدار  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر  $x - 1$  برابر ۴ بوده و بر  $x + 2$  بخش‌پذیر باشد.

« پاسخ »

مسائل صفحه ۱۰

$$\begin{aligned} p(1) = a + b = 2 & \quad (0/25) \\ p(-2) = 4a + b = 10 & \quad (0/25) \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad (0/25) \quad b = -\frac{2}{3} \quad (0/25) \end{aligned}$$

۲۳- جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

باقی‌مانده‌ی تقسیم  $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 4$  بر  $x + 1$  برابر با ..... است.

« پاسخ »

$$2 \quad (0/25)$$

۲۴- حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{4}$$

۲۵- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{4}{(x-6)^2}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{4}{(x-6)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad (0/25)$$

(0/25)

۲۶- حاصل حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{x+6}}{x-3}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{x+6}}{x-3} \times \frac{x + \sqrt{x+6}}{x + \sqrt{x+6}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{(x-3)(x + \sqrt{x+6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x + \sqrt{x+6})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+2)}{(x + \sqrt{x+6})} = \frac{5}{6} \quad (0/25)$$

۲۷- اگر باقی مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای  $P(x) = 2x^4 + mx + 2$  بر  $x+1$  برابر ۲ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم آن بر  $x-1$  را بیابید.

« پاسخ »

$$P(-1) = 2 - m + 2 = 2 \quad (0/25) \Rightarrow m = 2 \quad (0/25) \Rightarrow P(1) = 6 \quad (0/25)$$

۲۸- حدود تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{-(\cos x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{-(\cos x - \sin x)} = -\sqrt{2}$$

۲۹- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$  را بدون استفاده از هم‌ارزی و هویتال محاسبه کنید.

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} \times \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} = 6$$

۳۰- حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(x+1)} = \frac{7}{2}$$



۳۱- بدون استفاده از هم‌ارزی و قاعده‌ی هوییتال، حد زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{3 - x}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1 \cdot \left(\frac{0}{25}\right)}{+ \left(\frac{0}{25}\right)} = -\infty \quad \left(\frac{0}{25}\right)$$

۳۲- بدون استفاده از هم‌ارزی و قاعده‌ی هوییتال، حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2 - 1}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2 - 1} \times \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x+1}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x+1}\right)^2} = \frac{1}{6} \quad \left(\frac{0}{25}\right)$$

۳۳- حد تابع زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x-3}}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\left(\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+3}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)}{\left(\sqrt{x+3}\right)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)\left(\sqrt{x+3}\right)}{(x-9)} = 6$$

۳۴- حد تابع زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$$

$x \rightarrow 1$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{0}{0}$$

$x \rightarrow 1$

$$\frac{0}{25} \quad \frac{0}{25}$$

۳۵- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{5-x}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{5x + 1}$

« پاسخ »

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 - 4)(x + \sqrt{x+2})}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{x-2}{4 \times 4} = \frac{3}{16}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{5-x} = \frac{8}{3} = +\infty$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{5x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + |x|}{5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x}{5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$

۳۶- حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 9 + \frac{7}{x^3}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x-3}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x+1}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$$

$$\text{خ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 6 \right)$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3}$$

$$\text{ح) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{4}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 9 + \frac{7}{x^3} \right) = 9 + 0 = 9$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{2}x^3 \right) = -\infty$$

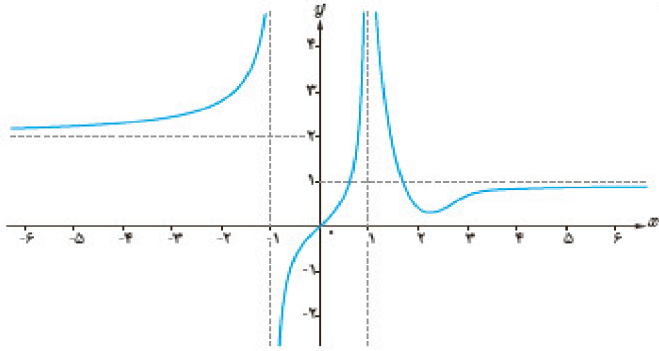
$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2x} \right) = 0$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{x} - 5 \right)} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)} = 2$$

۳۷- نمودار تابع  $f$  به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید:



الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

پ)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ث)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ج)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

« پاسخ »

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

ب)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$

پ)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

ث)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

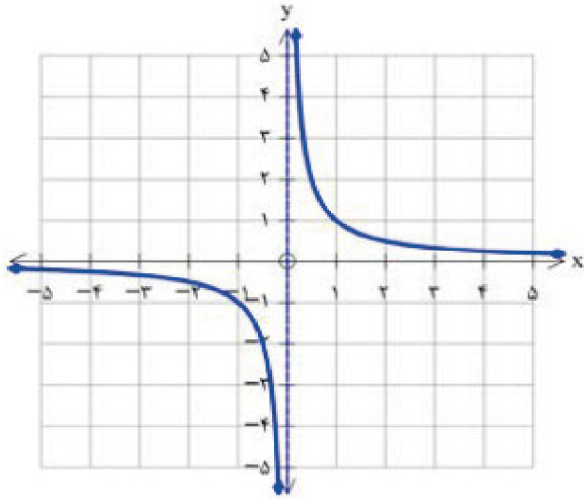
ج)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

۳۸- نمودار هریک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف)  $f(x) = \frac{1}{x}$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

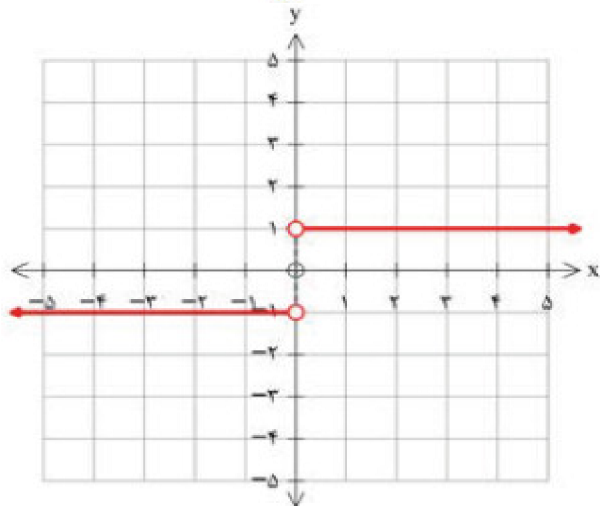
ب)  $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

« پاسخ »



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

۳۹- در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف) تابع  $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^2$  به صورت ترکیب دو تابع  $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$  و  $g(x) = \dots$  است.

ب) حد تابع  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} & x \leq 0 \end{cases}$  وقتی  $x \rightarrow -\infty$  برابر ..... است.

پ) اگر  $f'(2) = 3$  و  $g'(2) = 5$  باشد، آن‌گاه حاصل عبارت  $(2g - f)'(2)$  برابر ..... است.  
 ت) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن برابر ..... است.

« پاسخ »

الف)  $g(x) = x^2$  (۰/۲۵)  
 ب)  $-5$  (۰/۲۵)  
 پ)  $7$  (۰/۲۵)  
 ت) کره توخالی (۰/۲۵)

۴۰- حد تابع روبه‌رو را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)}{\sqrt{4x^2 + 9x - 1}}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\left(2x \sqrt{1 + \frac{9}{4x} - \frac{1}{4x^2}}\right)} = \frac{0/5}{2} \cdot \frac{1}{0/25}$$

۴۱- حد مقابل را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3 - 4x^2 + 5}{-2x^4 + 3x - 1}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3}{-2x^4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4}{x} = 0$$

(۰/۲۵)      (۰/۲۵)      (۰/۲۵)

۴۲- حد روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{4x^3 + 5}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left( 4 + \frac{5}{x^3} \right)} = \frac{2}{4} \quad \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$

۴۳- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 7x^2}{3x^2 + x - 4}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 7x^2}{3x^2 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2}{3x^2} = \frac{7}{3} \quad \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$

۴۴- حد تابع زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - \sqrt{x-3}}{5x^2 - \sqrt{x^4+1}}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - \sqrt{x-3}}{5x^2 - \sqrt{x^4+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2}{5x^2 - x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = \frac{6x^2}{4x^2} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

۴۵-  $a, b$  را طوری بیابید که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + x^2 + 1}{6x^b - x} = -\frac{2}{3}$  باشد.

« پاسخ »

$b = 3$  و  $\frac{a}{6} = \frac{-2}{3} \rightarrow a = -4$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{2x + 3}$$

۴۶- حد زیر را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{رفع ابهام} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = \frac{-1}{2}$$

۴۷- حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right) \times \left( \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x} \right)}{\left( \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x} \right)}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$



۴۸- حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x-2}}{5x^2 - 6x + 1}$$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x-2}}{5x^2 - 6x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{5x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{5x} = 0 \quad (0/25)$$

۴۹- اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-2)x^3 + 2x^2 + 3}{bx^2 + 1} = 2$  باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  را بدست آورید.

« پاسخ »

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \quad (0/25), \quad \frac{2}{b} = 2 \Rightarrow b = 1 \quad (0/5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$$

۵۰- حد مقابل را در صورت وجود محاسبه کنید.

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

۵۱- حد زیر را در صورت وجود تعیین کنید. ( [ ] نماد جزء صحیح است. )

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 5x}}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x}}$$

$x \rightarrow +\infty$

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 5x}}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x}{x} = 3$$

$x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right)$$

$x \rightarrow \infty$

۵۲- حد مقابل را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( x - \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right) \left( x + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right)}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x - 5}{x + x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}}$$

$x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{2x} = -1$$

$x \rightarrow +\infty$