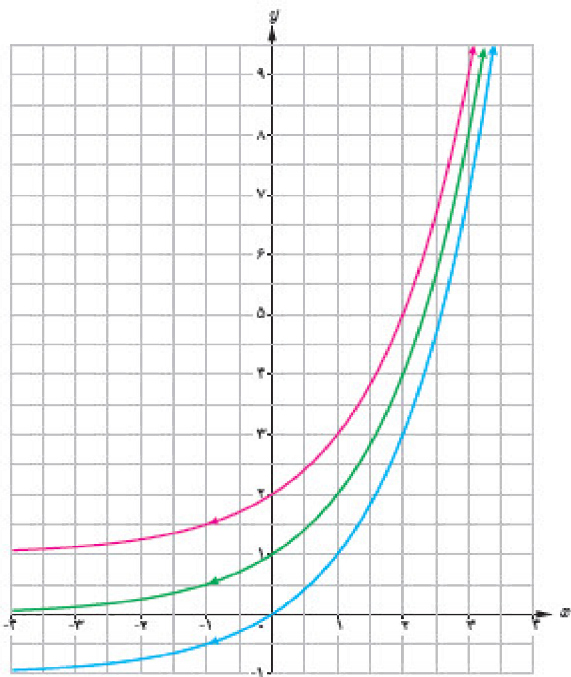
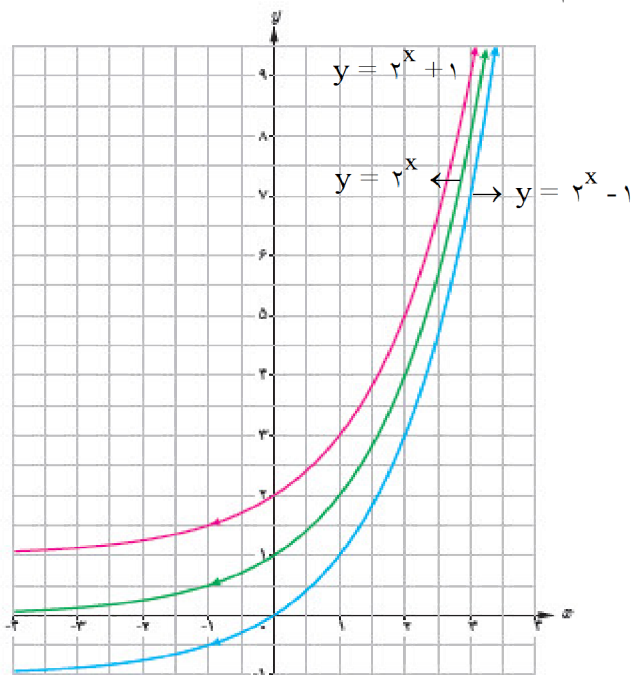


۱- نمودار توابع  $y = 2^x$ ،  $y = 2^x + 1$  و  $y = 2^x - 1$  در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع  $y = a^x$ ،  $y = a^x + 2$  و  $y = a^x - 2$  با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ( $a > 1$ )



« پاسخ »

ابتدا نمودار  $y = a^x$  را رسم و سپس ۲ واحد روی محور  $y$  ها بالا می‌رویم و آنرا  $y = a^x + 2$  می‌نامیم و اگر ۲ واحد نسبت به نمودار  $y = a^x$  پایین رویم آنرا  $y = a^x - 2$  می‌نامیم.



۲- الف) معادله  $\left(\frac{1}{25}\right)^{3-x} = 625^{3x-1}$  را حل کنید.

ب) نامعادله  $\frac{1}{256} \leq 8^{4p-2}$  را حل کنید.

« پاسخ »

الف)  $5^{-6+2x} = 5^{12x-4} \Rightarrow -6 + 2x = 12x - 4 \Rightarrow x = \frac{-1}{5}$

ب)  $2^{-8} \leq 2^{12p-6} \Rightarrow -8 \leq 12p - 6 \Rightarrow p \geq \frac{-1}{6}$

۳- دامنه تابع  $y = (\sqrt{3})^x$  برابر ..... و برد آن برابر ..... است.

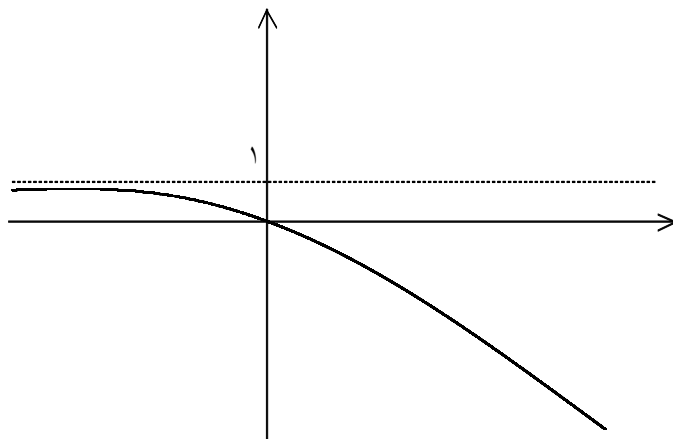
« پاسخ »

دامنه  $D = \mathbb{R}$

برد  $R = (0, +\infty)$

۴- نمودار تابع  $f(x) = -(3)^x + 1$  را رسم کنید.

« پاسخ »



۵- از تساوی‌های  $2^{x+2y} = \frac{1}{32}$  و  $2^{x-2y} = 8$  نتیجه می‌شود که  $x + y$  برابر با ..... می‌باشد.

« پاسخ »

$$\begin{cases} 2^{x+2y} = 2^{-5} \\ 2^{x-2y} = 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x + y = -3$$

۶- الف) نامعادله توانی  $4^{2x-1} > \frac{1}{1.24}$  را حل کنید.

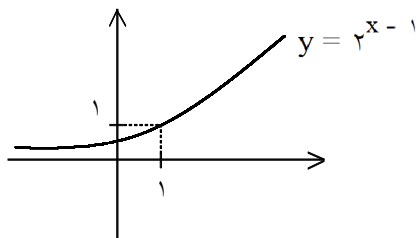
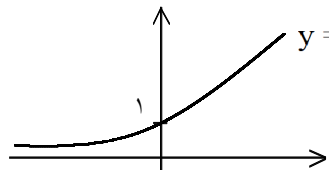
ب) نمودار تابع  $y = 2^x - 1$  و  $y = 2^{x-1}$  را به کمک نمودار  $y = 2^x$  رسم کنید.

« پاسخ »

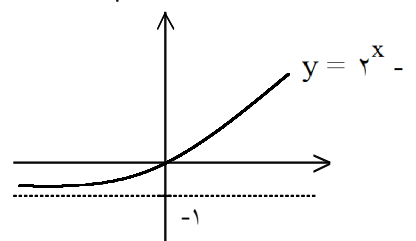
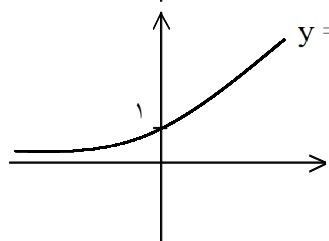
$$2^{4x-2} > \frac{1}{2^{1.0}} \Rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-1.0} \Rightarrow 4x - 2 > -1.0$$

(الف)

$$4x > -1 \Rightarrow x > -0.25$$



(ب)



۷- هریک از نامعادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف)  $2^{x^2-5x+4} \leq 256^{x-4}$

ب)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{x+4} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+5}$

« پاسخ »

الف)  $2^{x^2-5x+4} \leq (2^8)^{x-4} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 8x - 32 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 \leq 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-9) \leq 0 \Rightarrow 4 \leq x \leq 9$

ب)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{x+4} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+12} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+5} \Rightarrow 3x+12 \leq 2x+5 \Rightarrow x \leq -7$

۸- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف)  $16^{4n+1} = 2^{38-n}$

ب)  $625(\sqrt{5})^{4x+1} = (\sqrt{5})^{15-2x}$

« پاسخ »

الف)  $16^{4n+1} = 2^{38-n} \Rightarrow (2^4)^{4n+1} = 2^{38-n} \Rightarrow 2^{16n+4} = 2^{38-n}$   
 $\Rightarrow 16n + 4 = 38 - n \Rightarrow 17n = 34 \Rightarrow n = 2$

ب)  $625(\sqrt{5})^{4x+1} = (\sqrt{5})^{15-2x} \Rightarrow 5^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{4x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{15-2x}$   
 $\Rightarrow 5^4 \times 5^{2x+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{15}{2}-x}$   
 $\Rightarrow 4 + 2x + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} - x \Rightarrow 3x = \frac{15}{2} - \frac{1}{2} - 4 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

۹- فرض کنید تابع  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 243$  محورهای  $x$  و  $y$  را به ترتیب در نقاط  $A(a, 0)$  و  $B(0, b)$  قطع می‌کند. مقادیر  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

« پاسخ »

محور  $x$  ها را قطع کند  
 $y = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 243 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 243 \Rightarrow 3^{-2x+1} = 3^5$

$\Rightarrow -2x + 1 = 5 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0) \Rightarrow a = -2$

محور  $y$  ها را قطع کند  
 $x = 0 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 243 \Rightarrow y = 3 - 243 = -240 \Rightarrow B(0, -240) \Rightarrow b = -240$

۱۰- اگر  $f(x) = 8^x + 1$  باشد،  $f\left(\frac{2}{3}\right)$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 8^{\frac{2}{3}} + 1 = (2^3)^{\frac{2}{3}} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

۱۱- اگر  $f(x) = 16^x + 1$  باشد،  $f\left(-\frac{3}{4}\right)$  را حساب کنید.

« پاسخ »

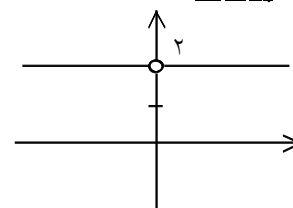
$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = 16^{-\frac{3}{4}} + 1 = (2^4)^{-\frac{3}{4}} + 1 = \frac{1}{2^3} + 1 = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$$

۱۲- نمودار تابع  $y = \frac{2^{x+1} - 2}{2^x - 1}$  را رسم کنید.

« پاسخ »

$$2^x - 1 \neq 0 \Rightarrow 2^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y = \frac{2^{x+1} - 2}{2^x - 1} = \frac{2 \times 2^x - 2}{2^x - 1} = \frac{2(2^x - 1)}{2^x - 1} = 2 \Rightarrow y = 2$$



۱۳- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف)  $2^{x-1} + 2^{x+1} = 40$

ب)  $(0.25)^{x-7} = 16^{2x}$

« پاسخ »

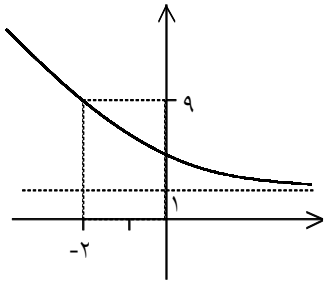
الف)  $2^{x-1} + 2^{x+1} = \frac{2^x}{2} + 2 \times 2^x = 40 \Rightarrow 2^x \left(\frac{1}{2} + 2\right) = 40 \Rightarrow \frac{5}{2} \times 2^x = 40 \Rightarrow 2^x = 16$

$\Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

ب)  $(0.25)^{x-7} = 16^{2x} \Rightarrow (2^{-2})^{x-7} = (2^4)^{2x} \Rightarrow 2^{-2x+14} = 2^{8x}$

$\Rightarrow -2x + 14 = 8x \Rightarrow 10x = 14 \Rightarrow x = 1/4$

۱۴- در دستگاه محور مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = a + 2^{(b-x)}$  رسم شده است.  $a$  و  $b$  را به دست آورید.



« پاسخ »

$$2^{(b-x)} > 0 \xrightarrow{+a} a + 2^{(b-x)} > a \Rightarrow a = 1$$

با توجه به نمودار

$$y = a + 2^{(b-x)} > 1$$

$$y = 1 + 2^{(b-x)} \xrightarrow{x = -2} 9 = 1 + 2^{(b+2)} \Rightarrow 8 = 2^{(b+2)} \Rightarrow 2^3 = 2^{(b+2)} \Rightarrow b + 2 = 3$$

$$\Rightarrow b = 1$$

۱۵- عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

- لگاریتم اعداد مثبت کم‌تر از ۱ همواره عددی منفی است.
- لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.
- تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است.
- تابع لگاریتم محور  $y$ ها را قطع می‌کند.
- اگر نقطه  $(b, d)$  روی نمودار  $y = a^x$  قرار داشته باشد، آن‌گاه  $(d, b)$  روی نمودار  $y = \text{Log}_a x$  قرار دارد.
- اگر  $a > b > 0$ ، آن‌گاه  $\text{Log}_a a < \text{Log}_a b$ .

« پاسخ »

- لگاریتم اعداد مثبت کم‌تر از ۱ همواره عددی منفی است. ×
- لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. ✓
- تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است. ✓
- تابع لگاریتم محور  $y$ ها را قطع می‌کند. ×
- اگر نقطه  $(b, d)$  روی نمودار  $y = a^x$  قرار داشته باشد، آن‌گاه  $(d, b)$  روی نمودار  $y = \text{Log}_a x$  قرار دارد. ✓
- اگر  $a > b > 0$ ، آن‌گاه  $\text{Log}_a a < \text{Log}_a b$ . × در مبنای بیش از ۱ تا؟؟ لگاریتم صعودی است.

$$a \times b \Rightarrow \text{Log}_{10}^a > \text{Log}_{10}^b$$

۱۶- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف)  $y = 1 + \text{Log}_3 x$

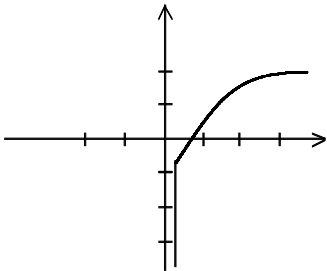
ب)  $y = -3^x - 2$

پ)  $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

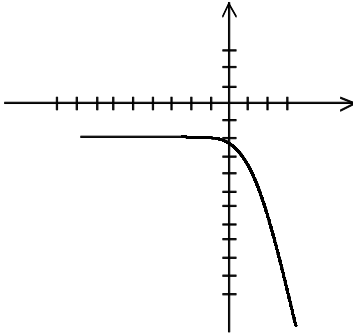
« پاسخ »

الف)  $x > 0$

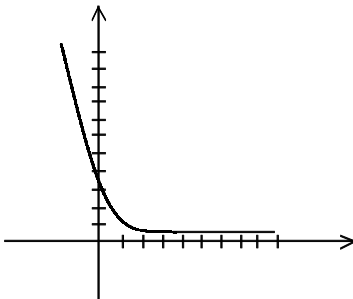
x	۱	۳	۹
y	۱	۲	۳



ب)  $y = -2^x - 2$



ج)  $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$



۱۷- با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارتهای زیر را بیابید:

$$\text{Log}_{10} 0.01, \text{Log}_{\frac{1}{e}} \frac{1}{e}, \text{Log}_2 \sqrt{2}, \text{Log}_V \sqrt[3]{V^2}$$

« پاسخ »

$$\text{Log}_{10} 0.01 = x \Rightarrow 10^x = 0.01 \Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$$

$$\text{Log}_{\frac{1}{e}} \frac{1}{e} = y \Rightarrow 10^y = \frac{1}{e} \Rightarrow e^y = e^{-1} \Rightarrow y = -1$$

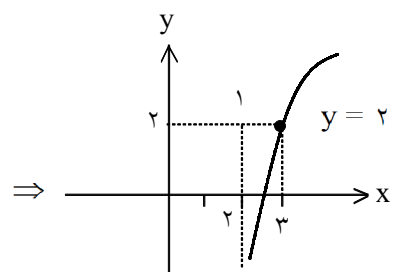
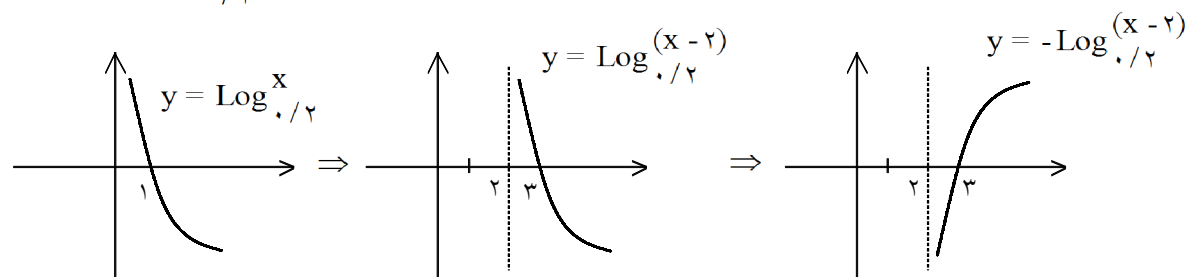
$$\text{Log}_2 \sqrt{2} = z \Rightarrow 2^z = \sqrt{2} \Rightarrow 2^z = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$\text{Log}_V \sqrt[3]{V^2} = t \Rightarrow V^t = \sqrt[3]{V^2} \Rightarrow V^t = V^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

۱۸- نمودار تابع  $y = 2 + \text{Log}_{\frac{1}{2}} x - 2$  را رسم کنید و سپس دامنه و برد آنرا حساب کنید.

« پاسخ »

$$y = 2 + \text{Log}_{\frac{1}{2}} (x - 2)^{-1} \Rightarrow y = 2 - \text{Log}_{\frac{1}{2}} (x - 2)$$



$$D = (2, +\infty)$$

$$R = \mathbb{R}$$



۱۹- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

$$f(x) = \text{Log}_{(x+3)}(9-x^2) \quad (\text{الف})$$

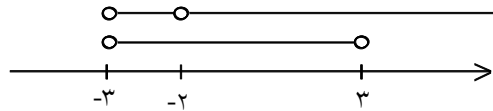
« پاسخ »

$$g(x) = \sqrt{5 - \text{Log}_2(2x-4)} \quad (\text{ب})$$

$$9 - x^2 > 0 \Rightarrow -3 < x < 3$$

$$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow D_f = (-3, 3) - \{-2\} \quad (\text{الف})$$

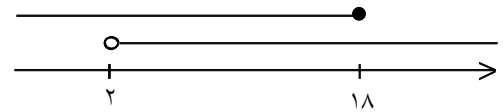
$$x + 3 \neq 1 \Rightarrow x \neq -2$$



$$2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2 \quad (1) \quad (\text{ب})$$

$$5 - \text{Log}_2(2x-4) \geq 0 \Rightarrow \text{Log}_2(2x-4) \leq 5 \Rightarrow 2x-4 \leq 2^5 \Rightarrow 2x \leq 32+4 \Rightarrow x \leq 18 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_g = (2, 18]$$



۲۰- وارون تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \text{Log}_5(x-1) + 7$  را حساب کنید.

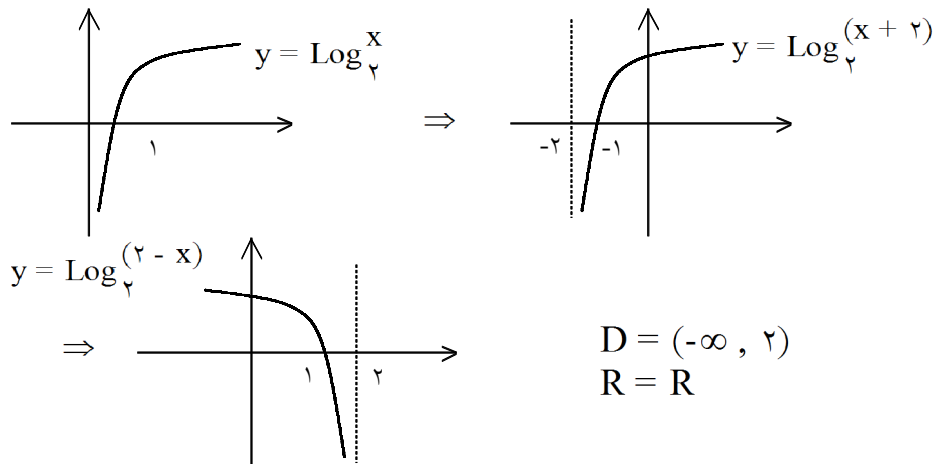
« پاسخ »

$$y = \text{Log}_5(x-1) + 7 \Rightarrow y - 7 = \text{Log}_5(x-1) \Rightarrow x-1 = 5^{y-7} \Rightarrow x = 5^{y-7} + 1$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = 5^{x-7} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 5^{x-7} + 1$$

۲۱- نمودار تابع  $y = \text{Log}_2(2-x)$  را رسم کنید و سپس دامنه و برد آنرا حساب کنید.

« پاسخ »



۲۲- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف)  $f(x) = \text{Log}(4x^2 + 4x + 1)$

ب)  $g(x) = \text{Log} \frac{|x-3|}{x}$

« پاسخ »

الف)  $(4x^2 + 4x + 1) > 0 \Rightarrow (2x + 1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

ب)  $|x - 3| > 0 \Rightarrow x \neq 3$  (۱)

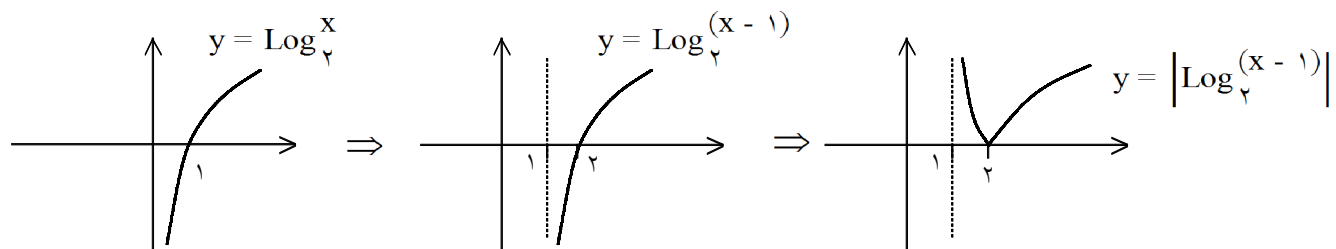
$x > 0$  (۲)

$x \neq 1$  (۳)

$\xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} D_g = (0, +\infty) - \{1, 3\}$

۲۳- نمودار  $f(x) = \left| \text{Log}_2(x-1) \right|$  را به کمک انتقال رسم کنید و سپس دامنه و برد آنرا مشخص کنید.

« پاسخ »



$D = (1, +\infty)$

$R = [0, +\infty)$

۲۴- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف)  $f(x) = \text{Log} \frac{(x^2 - 4)}{(x + 1)}$

ب)  $g(x) = \text{Log} \frac{(x - 5)^2}{|x|}$

« پاسخ »

$$D_f: \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (2, +\infty)$$

$$D_g: \begin{cases} (x - 5)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 5 \\ |x| > 0 \Rightarrow x \neq 0 \\ |x| \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_g = \mathbb{R} - \{5, 0, \pm 1\}$$

۲۵- دامنه تابع زیر را حساب کنید.

$$f(x) = \sqrt{5 + \text{Log} \frac{1}{\frac{1}{2}} (x + 4)}$$

« پاسخ »

$$x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4 \quad (1)$$

$$5 + \text{Log} \frac{1}{\frac{1}{2}} \geq 0 \Rightarrow \text{Log} \frac{1}{\frac{1}{2}} \geq -5 \Rightarrow x + 4 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$$

$$\Rightarrow x + 4 \leq (2^{-1})^{-5} \Rightarrow x + 4 \leq 2^5 \Rightarrow x + 4 \leq 32 \Rightarrow x \leq 28 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_f = (-4, 28]$$

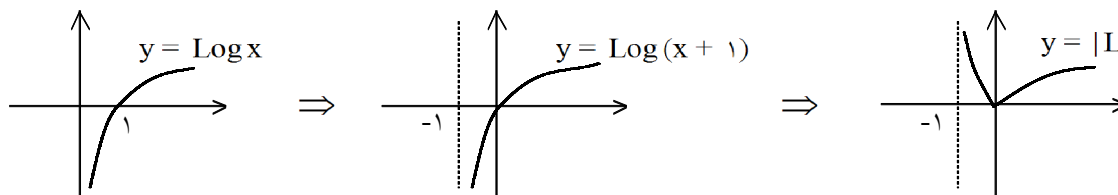
۲۶- اگر  $f(x) = 3 - 2 \text{Log}_3 \left(\frac{x}{4} + 2\right)$  مقدار  $f(28)$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f(28) = 3 - 2 \text{Log}_3 (7 + 2) = 3 - 2 \text{Log}_3 3^2 = 3 - 4 = -1$$

۲۷- نمودار تابع  $y = |\text{Log}(x + 1)|$  را رسم کنید.

« پاسخ »



$$y = \text{Log}(\text{Log}(x - 1))$$

۲۸- دامنه‌ی تابع مقابل را بدست آورید.

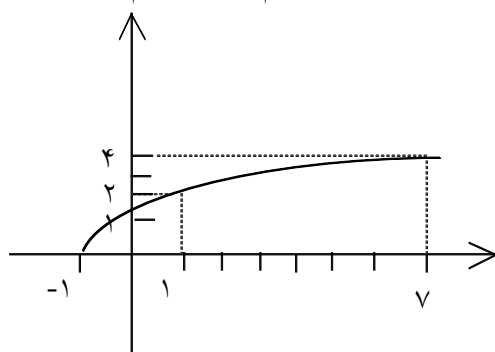
« پاسخ »

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Log}(x - 1) > 0 \Rightarrow \text{Log}(x - 1) > \text{Log} 1 \Rightarrow x > 2 \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{array} \right\} \cap \Rightarrow x > 2 \Rightarrow D_f = (2, +\infty)$$

۲۹- منحنی  $2 \text{Log} y = \text{Log} 2 + \text{Log}(x + 1)$  را رسم کنید.

« پاسخ »

$$\text{Log} y - \frac{1}{2} \text{Log} 2 + \frac{1}{2} \text{Log}(x + 1) - \text{Log} \sqrt{2} + \text{Log} \sqrt{x + 1} - \text{Log} \sqrt{2x + 2} \rightarrow y - \sqrt{2x + 2}$$



x	y
-1	0
1	2
7	4

۳۰- اگر  $\text{Log}_6^3 = a$  باشد،  $\text{Log}_6^2$  را برحسب  $a$  به دست آورید.

« پاسخ »

$$\text{Log}_6^2 = \text{Log}_6^{\frac{6}{3}} = \text{Log}_6^6 - \text{Log}_6^3 = 1 - a$$

۳۱- اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \text{Log}_a x$  از نقطه‌ی  $(\frac{1}{2}, -4)$  عبور کند، مقدار  $a$  چند است؟

« پاسخ »

۳۲- عبارات زیر را ساده کنید.  $(\text{Log} 3 \simeq 0/4771, \text{Log} 2 \simeq 0/301)$ .

الف)  $\text{Log}(18 \times 375)$       ب)  $\text{Log} \sqrt{0/75}$       پ)  $\text{Log} \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[4]{2}}$

« پاسخ »

الف)  $\text{Log} 2 \times 3^3 \times 5^3 = \text{Log} 2 + 3\text{Log} 3 + 3\text{Log} 5$   
 $0/301 + 3(0/477) + 3(1 - 6301)$

ب)  $\text{Log} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2}(\text{Log} 3 - \text{Log} 2^2) = \frac{1}{2}(0/4771 - 2(0/301))$

پ)  $\text{Log} 8^{\frac{1}{2}} - \text{Log} 2^{\frac{1}{4}} = \text{Log} 2^{\frac{3}{2}} - \text{Log} 2^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \times 1 - \frac{1}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$

۳۳- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را بررسی کنید:

الف)  $\text{Log}_b a = a$  ( $b \neq 1, a, b > 0$ )  
 ب)  $\text{Log}_a abc = \text{Log}_d a + \text{Log}_d b + \text{Log}_d c$  ( $d \neq 1, a, b, c, d > 0$ )  
 پ)  $\text{Log} x \text{Log} y = \text{Log} x + \text{Log} y$   
 ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

« پاسخ »

الف) نادرست      ب) درست      پ) نادرست      ت) نادرست

۳۴- از معادله  $\text{Log}(x - 3) = 2 - \frac{1}{5}\text{Log} 25$  مقدار  $x$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$\text{Log}(x - 3) + \frac{1}{5}\text{Log} 25 = 2$

$\text{Log}(x - 3) + 1 = 2 \Rightarrow 5x - 15 = 100 \Rightarrow 5x = 115 \Rightarrow x = 23$

۳۵- اگر  $\text{Log}_c a = \frac{3}{4}$  و  $\text{Log}_c b = \frac{7}{9}$  باشد، مقدار  $\text{Log} \frac{a^2 \sqrt{b}}{b^3}$  را بیابید.

« پاسخ »

با استفاده از ویژگی تغییر مبنا  $\text{Log}_b a = \frac{\text{Log}_c a}{\text{Log}_c b}$  داریم:

$$\begin{aligned} \text{Log} \frac{a^2 \sqrt{b}}{b^3} &= \frac{\text{Log}_c a^2 \sqrt{b}}{\text{Log}_c b^3} = \frac{\text{Log}_c a^2 + \text{Log}_c \sqrt{b}}{3 \text{Log}_c b} = \frac{2 \text{Log}_c a + \frac{1}{2} \text{Log}_c b}{3 \text{Log}_c b} \\ &= \frac{2 \left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{7}{9}\right)}{3 \left(\frac{7}{9}\right)} = \frac{17}{21} \end{aligned}$$

۳۶- ابتدا معادله‌ی لگاریتمی  $\text{Log}(x - 2) = 3 \text{Log} 2 - \text{Log}(x - 4)$  را حل کرده و سپس حاصل  $\text{Log}_{27} \sqrt{x - 3}$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\text{Log}(x - 2) = \text{Log} \frac{8}{x - 4} \Rightarrow x - 2 = \frac{8}{x - 4} \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 8$$

(۰/۲۵)                      (۰/۲۵)

$$x(x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ غ.ق.ب.} \\ x = 6 \end{cases} \text{Log} \sqrt[27]{3} = \text{Log} 3^{\frac{1}{27}} = \frac{1}{27} \text{Log} 3 = \frac{1}{6} \text{Log} 3$$

(۰/۲۵)

۳۷- از ۲۰ گرم یک عنصر پس از یک ساعت ۵ گرم باقی مانده است. نیم‌عمر این عنصر چند دقیقه است؟

« پاسخ »

$$Q(t) = A \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \xrightarrow{A=20, t=60, Q(60)=5} Q(60) = 20 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{T}} = 5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{T}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{60}{T} = 2 \Rightarrow T = 30$$

۳۸- اگر  $\text{Log} 2 = 0/3$ ,  $\text{Log} 3 = 0/47$  باشد، حاصل  $\text{Log} 1500$  ..... است.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{Log} 1500 &= \text{Log}(3 \times 5 \times 100) = \text{Log} 3 + \text{Log} 5 + \text{Log} 10^2 = \text{Log} 3 + \text{Log} \left(\frac{10}{2}\right) + 2\text{Log} 10 \\ &= \text{Log} 3 + \text{Log} 10 - \text{Log} 2 + 2\text{Log} 10 = 0.47 + 1 - 0.3 + 2 = 3.17 \end{aligned}$$

۳۹- اگر  $\text{Log} 2 = a$  و  $\text{Log} 3 = b$  باشد، حاصل عبارت مقابل را بیابید.

$$\text{Log} \sqrt{0/75}$$

« پاسخ »

$$\text{Log} 2 = a, \text{Log} 3 = b$$

$$\begin{aligned} \text{Log} \sqrt{0/75} &= \text{Log} \left(\frac{75}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{3}{4} = \frac{1}{2} (\text{Log} 3 - \text{Log} 2^2) = \frac{1}{2} (\text{Log} 3 - 2\text{Log} 2) \\ &= \frac{1}{2} (b - 2a) \end{aligned}$$

۴۰- اگر  $f\left(2 + 2\text{Log}_2^x\right) = 8x + 1$  مقدار  $f(6)$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} 2 + 2\text{Log}_2^x = 6 &\Rightarrow 2\text{Log}_2^x = 4 \Rightarrow \text{Log}_2^x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4 \xrightarrow{x=4} f\left(2 + 2\text{Log}_2^4\right) \\ &= 8(4) + 1 \Rightarrow f(6) = 33 \end{aligned}$$

۴۱- در هر قسمت ضابطه یک تابع داده شده است. مقدار تابع را برای X های داده شده حساب کنید.

الف)  $f(x) = 2 - \text{Log}_5(3x + 1)$ ,  $x = 8$

ب)  $f(x) = 3 + \text{Log}_{32} \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x = \sqrt{15}$

« پاسخ »

الف)  $f(8) = 2 - \text{Log}_5(24 + 1) = 2 - \text{Log}_5^{25} = 2 - \text{Log}_5^{5^2} = 2 - 2\text{Log}_5^5 = 2 - 2 = 0$

ب)  $f(\sqrt{15}) = 3 + \text{Log}_{32} \sqrt{15 + 1} = 3 + \text{Log}_{32}^4 = 3 + \text{Log}_{2^5}^2 = 3 + \frac{2}{5} \text{Log}_2^2$   
 $= 3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$

۴۲- اگر انرژی آزاد شده یک زلزله  $10^{20} \text{ Erg}$   $6/4 \times 10^{20}$  باشد، شدت زلزله برحسب ریشتر را حساب کنید.  
 ( $\text{Log} 2 = 0.3$ )

« پاسخ »

$$E = 6/4 \times 10^{20} = 64 \times 10^{19} = 2^6 \times 10^{19} \xrightarrow{\text{Log} 2 = 0.3 \Rightarrow 2 = 10^{0.3}} E = (10^{0.3})^6 \times 10^{19} = 10^{20/8}$$

$$\text{Log} E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \text{Log} 10^{20/8} = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 20/8 = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 1/5 M = 9 \Rightarrow M = 6$$

۴۳- زلزله‌ای به شدت  $7/6$  ریشتر در ۲۰ سپتامبر ۱۹۹۹ در شهر نانتو تایوان اتفاق افتاد. انرژی آزاد شده در این زلزله چه قدر بوده است؟ ( $\text{Log} 2 = 0.3$ )

« پاسخ »

$$\text{Log} E = 11/8 + 1/5 M$$

$$M = 7/6 \xrightarrow{\text{Log} E = 11/8 + 1/5(7/6) \Rightarrow \text{Log} E = 11/8 + 11/4 \Rightarrow \text{Log} E = 23/2}$$

$$\Rightarrow E = (2)^4 \times 10^{22} \text{ Erg} = 16 \times 10^{22} \text{ Erg} = 1/6 \times 10^{23} \text{ Erg}$$

۴۴- زلزله‌ای به بزرگی  $7/8$  ریشتر در ۱۸ آوریل ۱۹۰۶ (۲۹ فروردین ۱۲۸۵) در ساعت ۱۲:۵ صبح سواحل شمال ایالت کالیفرنیا در ایالات متحده را لرزاند. انرژی آزاد شده در این زلزله چه قدر بوده است؟ ( $\text{Log} 2 = 0.3$ )

« پاسخ »

$$\text{Log} E = 11/8 + 1/5 M$$

$$M = 7/8 \Rightarrow \text{Log} E = 11/8 + 1/5(7/8) = 11/8 + 11/7 = 23/5 \Rightarrow E = 10^{23/5} \text{ Erg}$$

$$\xrightarrow{\text{Log} 2 = 0.3} E = 10^{1/5} \times 10^{22} = (10^{0.3})^5 \times 10^{22} \text{ Erg} \Rightarrow E = 2^5 \times 10^{22} = 32 \times 10^{22}$$

$$\begin{aligned} 2 &= 10^{0.3} \\ &= 3/2 \times 10^{23} \text{ Erg} \end{aligned}$$



۴۵- جواب نامعادله  $\text{Log}_{\frac{1}{2}}(4x-1) > \text{Log}_{\frac{1}{2}}(x+7)$  را به دست آورید.

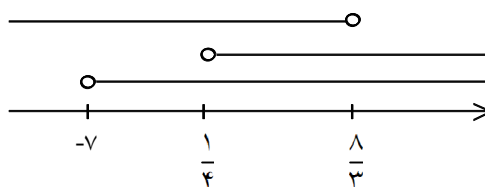
« پاسخ »

$$4x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7 \quad (2)$$

$$\text{Log}_{\frac{1}{2}}(4x-1) > \text{Log}_{\frac{1}{2}}(x+7) \Rightarrow 4x-1 < x+7 \Rightarrow 3x < 8 \Rightarrow x < \frac{8}{3} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} \text{جواب} = \left(\frac{1}{4}, \frac{8}{3}\right)$$



۴۶- در معادله  $x^{-6} + \text{Log}_2^x = \frac{1}{256}$  ریشه‌ها را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x^{-6} + \text{Log}_2^x = \frac{1}{256} \Rightarrow \text{Log}_2^x - 6 + \text{Log}_2^x = \text{Log}_2^{\frac{1}{256}} \Rightarrow (-6 + \text{Log}_2^x) \text{Log}_2^x = \text{Log}_2^{\frac{1}{256}}$$

$$\text{Log}_2^x = t \xrightarrow{\quad} (-6 + t)t = -8 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-4) = 0$$

$$\begin{cases} t = 2 \Rightarrow \text{Log}_2^x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4 \\ t = 4 \Rightarrow \text{Log}_2^x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{cases}$$

۴۷- مقدار A را حساب کنید.

$$A = \frac{3}{3 + \text{Log}_2^3} + \frac{1}{1 + 3\text{Log}_3^2}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{3 + \text{Log}_2^3} + \frac{1}{\text{Log}_3^3 + 3\text{Log}_3^2} = \frac{3}{3\text{Log}_2^2 + \text{Log}_2^3} + \frac{1}{\text{Log}_3^3 + \text{Log}_3^4} \\ &= \frac{3}{\text{Log}_2^4 + \text{Log}_2^3} + \frac{1}{\text{Log}_3^3 + \text{Log}_3^4} = \frac{3}{\text{Log}_2^{24}} + \frac{1}{\text{Log}_3^{24}} = 3\text{Log}_{24}^2 + \text{Log}_{24}^3 \\ &= \text{Log}_{24}^4 + \text{Log}_{24}^3 = \text{Log}_{24}^{24} = 1 \end{aligned}$$

۴۸- نیمه عمر عنصری ۱۰ روز و جرم اولیه آن ۲۰ گرم است.  
الف) جرم  $m(t)$  را که پس از  $t$  روز باقی می ماند بیابید.  
ب) طی چند روز این جرم به  $1/25$  گرم کاهش می یابد؟

« پاسخ »

(الف)

$$\begin{aligned} \text{مقدار اولیه} &= 20 \text{ gr} \\ \text{روز} &= 10 = \text{نیمه عمر} \\ \Rightarrow m(t) &= 20 \times \frac{1}{2^{t/10}} \end{aligned}$$

(ب)

$$m(t) = 1/25 \text{ gr} \Rightarrow 20 \times \frac{1}{2^{t/10}} = \frac{5}{4} \xrightarrow{\div 20} \frac{1}{2^{t/10}} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{t/10} = 16 \Rightarrow 2^{t/10} = 2^4 \Rightarrow \frac{t}{10} = 4$$

$$\Rightarrow t = 40 \text{ روز}$$

۴۹- نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای ۱۰۰ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده ۴۰ میلی‌گرم باشد، پس از ۲۰۰ سال چه جرمی از این ماده باقی می ماند.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} m(t) &= 40 \times 2^{-\frac{t}{100}} \\ m(200) &= 40 \times 2^{-\frac{200}{100}} = \frac{40}{4} = 10 \end{aligned}$$

۵۰- مقدار A را حساب کنید.

$$A = \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + 1} + \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + 1}$$

« پاسخ »

$$A = \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}} + \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}} + \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}} = \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 1$$

۵۱- در معادله  $\log_{\sqrt{2}}^x - \log_x^{\sqrt{2}} = 3$  مقدار x را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\log_{\sqrt{2}}^x - \log_x^{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}^x - \log_x^{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow 2 \log_{\sqrt{2}}^x - 2 \log_x^{\sqrt{2}} - 3 = 0$$

$$\log_{\sqrt{2}}^x = t \xrightarrow{\times t} 2t - \frac{2}{t} - 3 = 0 \xrightarrow{\times t} 2t^2 - 2 - 3t = 0 \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 2)(2t + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}^x = 2 \Rightarrow x = 4 \\ t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}^x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

۵۲- اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  باشد، لگاریتم‌های زیر را بر حسب a, b بنویسید.

الف)  $\log 6$  (الف)      ب)  $\log 5$  (ب)      پ)  $\log 0.25$  (پ)      ت)  $\log 90$  (ت)

« پاسخ »

الف)  $\log 6 = \log 2 \times 3 = \log 2 + \log 3 = a + b$

ب)  $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$

پ)  $\log 0.25 = \log \frac{1}{4} = \log 1 - \log 2^2 = 0 - 2a = -2a$

ت)  $\log 90 = \log 3^2 \times 10 = 2 \log 3 + \log 10 = 2b + 1$

۵۳- مقادیر زیر را حساب کنید:

$$\text{الف) } \text{Log}_{9+4\sqrt{5}}^{\sqrt{5}+2}$$

$$\text{ب) } \text{Log}_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \text{Log}_{9+4\sqrt{5}}^{\sqrt{5}+2} = \text{Log}_t^t = \frac{1}{2} \text{Log}_t^t = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{5}+2=t \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} 5+4+4\sqrt{5}=t^2 \Rightarrow 9+4\sqrt{5}=t^2$$

$$\text{ب) } \text{Log}_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} = \text{Log}_{\frac{1}{t}}^t = \text{Log}_{t^{-1}}^t = -1$$

$$\sqrt{2}-1=t \Rightarrow (\sqrt{2}-1) \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2-1}{\sqrt{2}+1} = t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+1} = t$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}+1 = \frac{1}{t}$$

۵۴- در معادله  $(\text{Log}_5^x + 3) = 625$  مقدار  $x$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$(\text{Log}_5^x + 3) = 625 \Rightarrow \text{Log}_x (\text{Log}_5^x + 3) = \text{Log}_5^{625} \Rightarrow (\text{Log}_5^x + 3) \text{Log}_5^x = 4$$

$$\text{Log}_5^x = t \xrightarrow{\text{}} (t+3)t = 4 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-4 \end{cases}$$

$$t=1 \Rightarrow \text{Log}_5^x = 1 \Rightarrow x=5$$

$$t=-4 \Rightarrow \text{Log}_5^x = -4 \Rightarrow x = 5^{-4} = \frac{1}{625}$$

۵۵- معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\text{Log}_{\frac{1}{5}}(x^2 - 11) = -2 \quad \text{ب)}$$

$$3\text{Log}_V a - \text{Log}_V 6 = \text{Log}_V^{36} \quad \text{الف)}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \text{Log}_V a^3 - \text{Log}_V 6 = \text{Log}_V^{36} \Rightarrow \text{Log}_V \frac{a^3}{6} = \text{Log}_V^{36} \Rightarrow \frac{a^3}{6} = 36 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6 \quad \text{ق ق}$$

$$\text{ب) } \text{Log}_{\frac{1}{5}}(x^2 - 11) = -2 \Rightarrow x^2 - 11 = (5^{-1})^{-2} \Rightarrow x^2 - 11 = 25 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 & \text{ق ق} \\ x = -6 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$