فصل دوم

قضیه تالس،تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب

تالس

تشابه

کاربردهای تالس وتشابه

۱ - میانگین هندسی بین جفت عدد مقابل را پیدا کنید. $۶\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$

اگر x میانگین هندسی بین $۳\sqrt{۲}$ و $۶\sqrt{۲}$ باشد داریم:

$$x^{۲} = ۶\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲}$$

$$x^{۲} = ۳۶$$
$$x = ۶$$

۲ - جالی خالی را پر کنید.

اگر $\frac{x}{y} = \frac{۱}{۲}$، آن‌گاه $\square = \frac{x+۱}{y+۲}$؛

در تناسب می‌توان صورتها را با هم و مخرجها را با هم جمع نمود به طوریکه نسبت تغییر نمی‌کند. پس به جای $\square$ می‌توان $\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{x}{y}$ را قرار داد.

$$\frac{x+۱}{y+۲} = \frac{۱}{۲}$$

۳ - جالی خالی را پر کنید.

اگر $\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۴} = \frac{d}{۵}$، آن گاه $\frac{a}{\square} = \frac{a+b+c+d}{\square}$؛

در تناسب می‌توان صورتها را با هم و مخرجها را با هم جمع کرد به طوریکه نسبت تغییر نمی‌کند. پس داریم:

$$\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۴} = \frac{d}{۵} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{۲+۳+۴+۵} = \frac{a}{۲} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{۱۴} = \frac{a}{۲}$$

۴ - اگر $\frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z}{۶} = \frac{۳}{۵}$ حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

$$\frac{x+y+z}{۲+۳+۶} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x+y+z = \frac{۳۳}{۵}$$

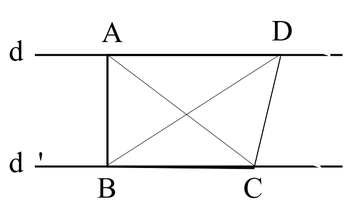
۵ - طول پاره‌خطی را به دست آورید که واسطه‌ی هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

$$x^{۲} = ۱۰ \times ۸ \Rightarrow x^{۲} = ۸۰ \Rightarrow x = ۴\sqrt{۵}$$

۶ - گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.

الف) با توجه به رابطه‌ی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ کدام گزینه درست است؟

۱) $ad = ca$ ۲) $\frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$



ب) با توجه به شکل مقابل نسبت مساحت $A\overset{\triangle}{B}C$ به $B\overset{\triangle}{D}C$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{AD}{BC}$

الف) گزینه‌ی ۲ ب) گزینه‌ی ۱

۷ - با فرض $x - y = 8$ مقدار x و y را با توجه به رابطه‌ی $\frac{x}{y} = \frac{6}{8}$ به دست آورید.

$$\frac{x}{y} = \frac{6}{8} \Rightarrow \frac{x}{y - x} = \frac{6}{8 - 6} \Rightarrow \frac{x}{y - x} = \frac{6}{2} \xrightarrow{x - y = 8 \Rightarrow y - x = -8} \frac{x}{-8} = 3 \Rightarrow x = -24$$

$$x - y = 8 \xrightarrow{x = -24} -24 - y = 8 \Rightarrow -y + 32 \Rightarrow y = -32$$

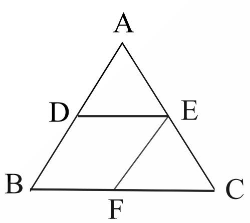
۸ - اگر $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ باشد آن‌گاه حاصل $\frac{3y - 3}{3x - 2}$ را به دست آورید.

حاصل همان $\frac{3}{2}$ است.

$$\Rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{3x}{2} \Rightarrow \frac{3y - 3}{3} = \frac{3x - 2}{2} \Rightarrow \frac{3y - 3}{3x - 2} = \frac{3}{2}$$

۹ - تعمیم قضیه‌ی تالس را بیان و اثبات کنید.

اگر خطی دو ضلع مثلث را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه‌های ضلع‌هایش با مثلث اصلی متناسب است. می‌دانیم طبق فرض $DE \parallel BC$ باید ثابت کنیم.



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

از نقطه‌ی E پاره‌خط EF را موازی DB رسم می‌کنیم چهارضلعی DEFB یک متوازی‌الاضلاع است، چون ضلع‌های روبه‌رو دوبه‌دو موازی‌اند، بنابراین $DE = BF$ و $DB = EF$

در مثلث ABC با درنظر گرفتن $DE \parallel BC$ داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (1)$$

در مثلث ABC و با درنظر گرفتن $EF \parallel AB$ داریم:

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (2)$$

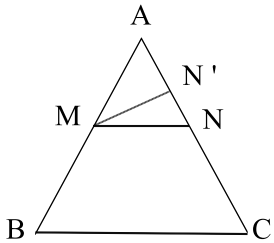
با توجه به ۱ و ۲ و جای‌گذاری DE به جای BF داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

۱۰ - عکس قضیه‌ی تالس را بیان و آن‌را اثبات کنید.

اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظر متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع

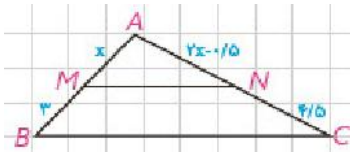
سوم مثلث موازی است اثبات از طریق برهان خلف: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ و فرض کنیم برخلاف حکم $MN \nparallel BC$، پس از نقطه‌ی M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم.



حال با توجه به قضیه‌ی تالس داریم: $\frac{AN'}{AC}=\frac{AM}{AB}$ با توجه به رابطه‌ی فرض مسئله داریم:

$\frac{AN}{AC}=\frac{AN'}{AC}$ که از آن نتیجه می‌شود که $AN = AN'$ و بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.

- در شکل مقابل $MN \parallel BC$؛ به کمک قضیه‌ی تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به دست آورید. ۱

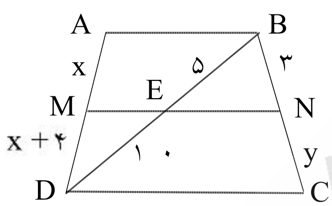


$$\frac{x}{۳}=\frac{۲x-۰/۵}{۴/۵}\Rightarrow ۴/۵x=۶x-۱/۵\Rightarrow ۱/۵=۱/۵x\Rightarrow ۱=x$$

- در ذوزنقه $ABCD$: $MN \parallel AB \parallel CD$ مقدار $x+y$ کدام است؟ ۲

۱) ۱۰   ۲) ۱۲

۳) ۸   ۴) ۱۱



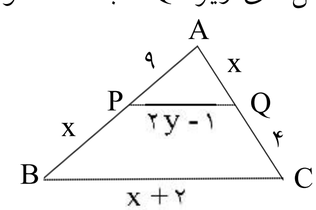
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A\overset{\triangle}{B}D : AB \parallel ME \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MD}{MA}=\frac{ED}{EB}\Rightarrow\frac{x+۴}{x}=\frac{۱۰}{۵}\Rightarrow x=۴$$

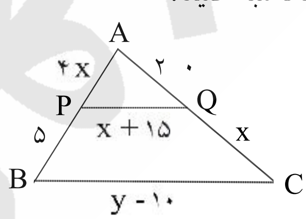
$$B\overset{\triangle}{D}C : DC \parallel EN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BN}{NC}=\frac{BE}{DE}\Rightarrow\frac{۵}{۱۰}=\frac{۳}{y}\Rightarrow ۵y=۳۰\Rightarrow y=۶\Rightarrow x+y=۱۰$$

- در شکل‌های زیر، PQ با BC موازی است، مقادیر x و y را محاسبه کنید. ۳

الف)



ب)



الف) با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC}\Rightarrow\frac{۹}{x}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=۶$$

با توجه به تعمیم قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}\Rightarrow\frac{x}{x+۴}=\frac{۲y-۱}{x+۲}\xrightarrow{x=۶}\frac{۶}{۱۰}=\frac{۲y-۱}{۸}\Rightarrow ۲y-۱=\frac{۴۸}{۱۰}\Rightarrow ۲y-۱=۴/۸$$
$$\Rightarrow ۲y=۵/۸\Rightarrow y=۲/۹$$

ب) با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:

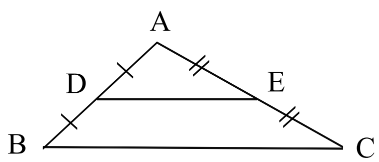
$$\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{CQ}\Rightarrow\frac{۴x}{۵}=\frac{۲۰}{x}\Rightarrow ۴x^{۲}=۱۰۰\Rightarrow x^{۲}=۲۵\Rightarrow x=۵$$

با توجه به تعمیم قضیه‌ی تالس داریم:

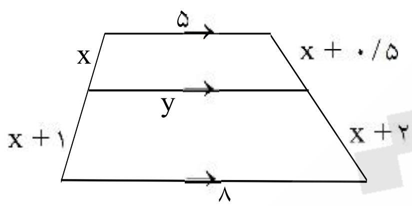
$$\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}\Rightarrow\frac{۲۰}{۲۰+x}=\frac{x+۱۵}{y-۱۰}\xrightarrow{x=۵}\frac{۲۰}{۲۵}=\frac{۲۰}{y-۱۰}\Rightarrow y-۱۰=۲۵\Rightarrow y=۳۵$$

۱۴ - ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط های دو ضلع را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

$$\underset{(۰/۲۵)}{\frac{AD}{AB}}=\frac{AE}{AC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}\underset{(۰/۲۵)}{DE\parallel BC}\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{DE=\frac{۱}{۲}BC}$$

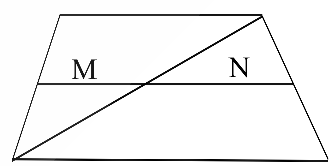


۱۵ - در شکل مقابل، x و y را محاسبه کنید.



$$\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۰/۵}{x+۲}\Rightarrow x^{۲}+۲x=x^{۲}+۱/۵x+۰/۵$$

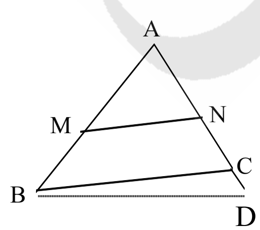
$$۰/۵x=۰/۵\Rightarrow x=۱$$



$$\frac{M}{۵}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow M=\frac{۱۰}{۳}$$

$$\frac{N}{۸}=\frac{۱/۵}{۴/۵}\Rightarrow N=\frac{۸}{۳}$$

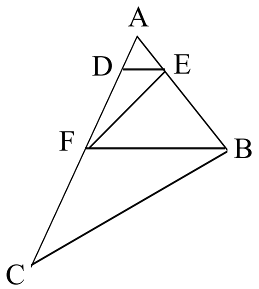
۱۶ - اگر در مثلث ABC شکل زیر، نقطه‌های M و N طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شوند که $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ ، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که پاره خط MN موازی ضلع BC است. برای اثبات این نتیجه از نقطه‌ی B خطی به موازات MN رسم کنید تا AC را در D قطع کند. سپس با استفاده از قضیه‌ی تالس نشان دهید D و C بر هم منطبقند.



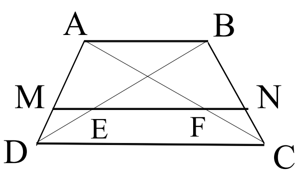
$$\left.\begin{array}{l} BD\parallel MN\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{ND} \\ \Rightarrow_{\text{فرض}}\ \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AN}{ND}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow NC=ND$$

پس نقاط D و C بر هم منطبق هستند.

۱۷ - در مثلث ABC، در شکل مقابل، DE با FB موازی است و EF و BC . با دو بار استفاده از قضیه‌ی تالس ثابت کنید $\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$.



۱۸ - ثابت کنید هر خط که به موازات دو قاعده هر ذوزنقه رسم می شود و قطرها و ساق‌ها را قطع می‌کند پاره‌خط هایی که بین ساق و قطر محدود می‌شوند مساویند.

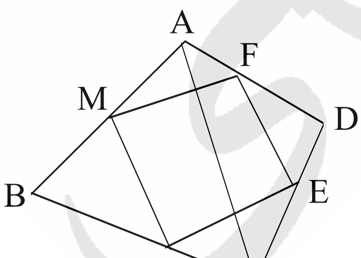


در مثلث‌های ABD و ABC رابطه‌ی تالس را نوشته حکم را اثبات کنید.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{DM}{AD}=\frac{ME}{AB}\\ \frac{CN}{BC}=\frac{FN}{AB}\\ \frac{DM}{AD}=\frac{CN}{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{ME}{AB}=\frac{FN}{AB}\Rightarrow ME=FN$$

۱۹ - اوساط اضلاع یک چهار ضلعی را به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم ثابت کنید چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است.

قطر AC را رسم کرده از عکس قضیه تالس داریم:



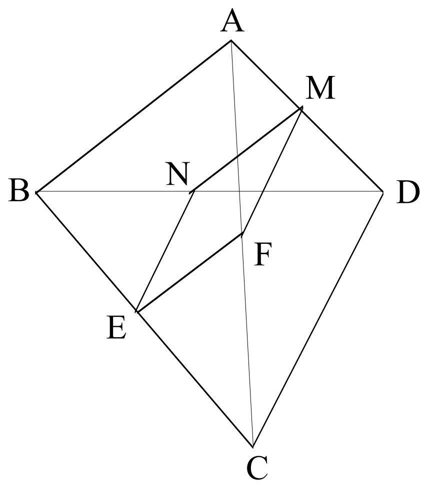
$$\left.\begin{array}{l}\frac{BM}{AM}=\frac{BN}{NC}\Rightarrow MN\parallel AC \text{،} MN=\frac{AC}{۲}\\ \frac{DF}{FA}=\frac{DE}{EC}\Rightarrow FE\parallel AC\text{،}FE=\frac{AC}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow MN\parallel FE \text{ ، } MN=FE$$

پس چهارضلعی $MNEF$ متوازی‌الاضلاع است.

۲۰ - ثابت کنید که وسط های دو ضلع مقابل و وسط های اقطار هر چهارضلعی رئوس یک متوازی‌الاضلاع هستند.

فرض کنید M و E وسط دو ضلع و N و F وسط دو قطر چهارضلعی $ABCD$ باشند. با توجه به عکس قضیه تالس

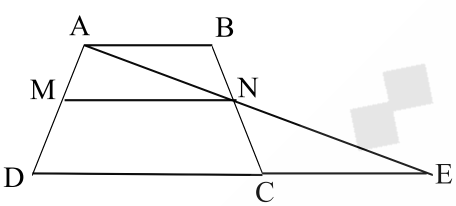
داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\frac{DM}{AD}=\frac{DN}{DB}\Rightarrow MN \parallel AB \text{ ،} MN=\frac{AB}{2}\\ \frac{CF}{CA}=\frac{CE}{CB}\Rightarrow FE \parallel AB \text{ ،} FE=\frac{AB}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow MN \parallel FE,\ MN=FE$$

۲۱ - ثابت کنید در هر ذوزنقه پاره‌خطی که وسط های دوساق را به یکدیگر وصل می‌کند موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع دو قاعده است.

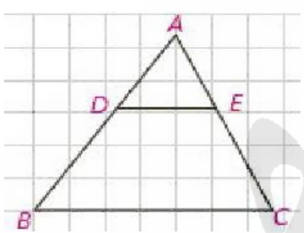
از A به N وصل می‌کنیم امتداد می‌دهیم تا امتداد DC را در E قطع کند دو مثلث ABN و NCE مساویند پس داریم: $AN = NE$, $AB = CE$



$$\frac{AM}{AD}=\frac{AN}{AE}\Rightarrow MN \parallel DE,\ MN=\frac{DE}{2}$$

$$\Rightarrow MN=\frac{DC+CE}{2}\Rightarrow MN=\frac{DC+AB}{2}$$

۲۲ - در شکل مقابل $DE \parallel BC$؛ تناسب قضیه‌ی تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطه‌ی $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ و با تفضیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطه‌ی $\frac{DB}{AB}=\frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

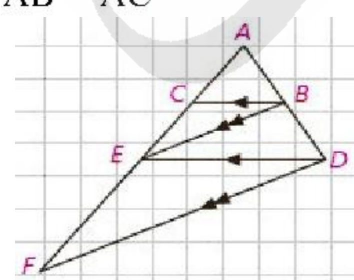


$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

$$\frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC}$$

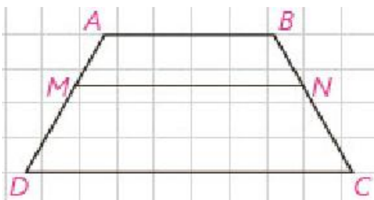
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

۲۳ - در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$، به کمک قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسه‌ی تناسب‌ها با یک‌دیگر، ثابت کنید: $AE^2 = AC . AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



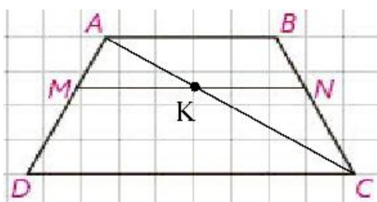
$$\left.\begin{array}{l}\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\\ \frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AF}\end{array}\right\} \Rightarrow AE^2 = AC.AF$$

۴ - در ذوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$، ثابت کنید:



$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



$$\left.\begin{array}{l}\frac{AM}{MD}=\frac{AK}{KE}\\ \frac{BN}{NC}=\frac{AK}{KC}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$

۵ - ثابت کنید در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها با توان دوم نسبت تشابه برابر است.

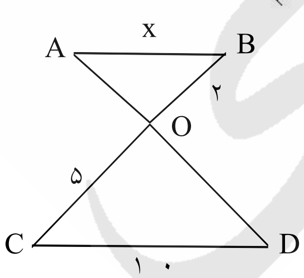
فرض کنیم ABC و $A'B'C'$ دو مثلث متشابه که نسبت تشابه آن‌ها k است. هم‌چنین AH و $A'H'$ ارتفاع‌های وارد بر BC و $B'C'$ هستند. می‌دانیم نسبت بین ارتفاع‌ها در دو مثلث متشابه همان k می‌شود.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}AH.BC}{\cancel{\frac{1}{2}}A'H'.B'C'}=\left(\frac{AH}{A'H'}\right).\left(\frac{BC}{B'C'}\right)=k.k=k^2$$

۶ - قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها را بیان کنید.

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

۷ - ثابت کنید دو مثلث زیر با هم متشابه هستند. سپس مقدار x را به دست آورید. $(AB \parallel CD)$



$$\left.\begin{array}{l}AB \parallel CD \text{ و } CB \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}\\ AB \parallel DC \text{ و } AD \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A}=\hat{D}\end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\triangle}{A}B \sim O\overset{\triangle}{C}D \quad \text{برابری دو زاویه}$$

$$\frac{AB}{CD}=\frac{OB}{OC}\Rightarrow\frac{x}{10}=\frac{2}{5}\Rightarrow x=4$$

۸ - گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.

الف) ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه آن‌را به دو مثلث .... تقسیم می‌کند.

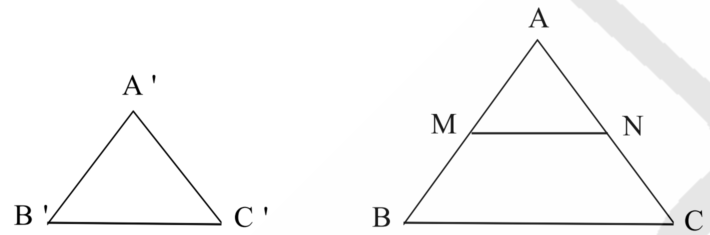
۱) هم‌نهشت ۲) متشابه

ب) کدام‌یک حالت تشابه است؟

۱) برابری دو زاویه ۲) برابری دو ضلع

الف) گزینه‌ی ۲ ب) گزینه‌ی ۱

- ۱- ثابت کنید هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند. ۱۹



(در فرض، به جای $A'B'$ و $A'C'$ مساوی‌های آن‌ها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا $MN \parallel BC$؟)

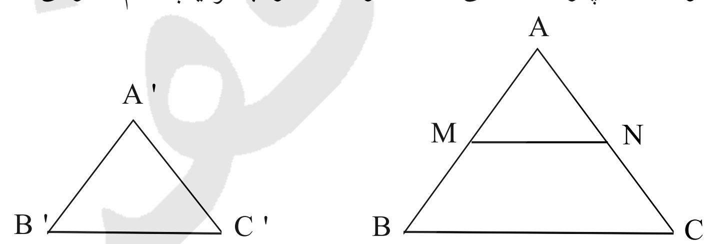
۲- از قضیه‌ی اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۳- تعمیم قضیه‌ی تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسه‌ی این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض نتیجه بگیرید:

$MN = B'C'$

۴- مثلث‌های $A'B'C'$ و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از این‌جا درستی حکم را ثابت کنید.

در مثلث ABC، روی AB و AC، پاره‌خط های AM و AN را به‌ترتیب هم‌اندازه‌ی $A'B'$ و $A'C'$ جدا کنید.



۱) $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

$MN \parallel BC$

طبق قضیه‌ی اساسی تشابه نتیجه می‌گیریم:

$\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

۲- ضلع‌ها متناسب و زاویه‌ها برابرند، پس:

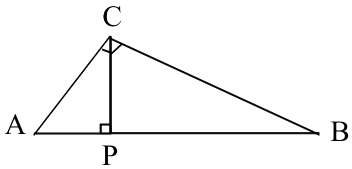
۳)

$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} AMN \sim A'B'C'$

۴- بنابراین نتیجه می‌گیریم:

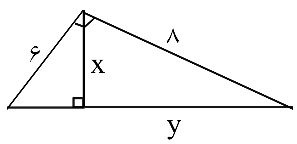
$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{AMN} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'} \\ \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

- الف) مطابق شکل، مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه است و CP بر AB عمود است، ثابت کنید: ۲۰

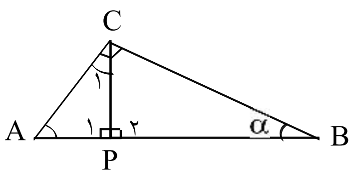


$$\left(PC^{۲} = AP \times BP\right)$$

ب) در شکل زیر مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



الف) با توجه به شکل، دو مثلث APC و BCP دو زاویه‌ی برابر دارند.



$$\left(\hat{P}_{۱} - \hat{P}_{۲} = ۹۰^{\circ} \text{ و } \hat{B} = \hat{C}_{۱} = \alpha\right)$$

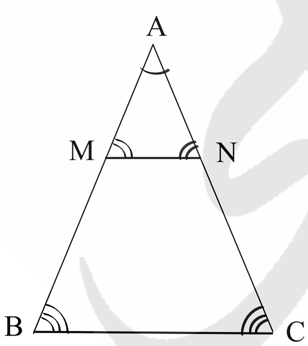
تناسب بین اضلاع متناظر را می‌نویسیم:

نسبت ضلع های روبه روی α

$$\frac{AP}{PC} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PC^{۲} = AP \times PB$$

ب)

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \Rightarrow BC^{۲} = ۳۶ + ۶۴ \Rightarrow BC = ۱۰$$
$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow ۶ \times ۸ = x \times ۱۰ \Rightarrow x = \frac{۴۸}{۱۰} = ۴/۸$$
$$AC^{۲} = CH \times BC \Rightarrow ۸^{۲} = y \times ۱۰ \Rightarrow y = \frac{۶۴}{۱۰} = ۶/۴$$



۲۱- اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (و یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است. (قضیه‌ی اساسی تشابه)

۱- زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به‌ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟

۲- با توجه به تعمیم قضیه‌ی تالس تناسب زیر را کامل کنید:

$$\frac{AM}{\dots} = \frac{\dots}{AC} = \frac{MN}{\dots}$$

۳- از گزینه ۱ و ۲ در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۱- $BC \parallel MN, AB \text{ مورب} \Rightarrow \angle M = \angle B$

$BC \parallel MN, AC \text{ مورب} \Rightarrow \angle N = \angle C$

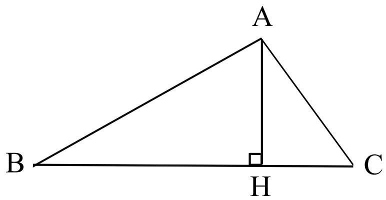
۲- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

۳- این دو مثلث با هم متشابه هستند.

۲ - با درنظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر، روابط را اثبات کنید.

الف) $AB^۲ = BC.BH$

ب) $AH^۲ = BH.CH$



الف) $\triangle A\hat{B}C \sim \triangle A\hat{B}H \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^۲ = BC.BH$

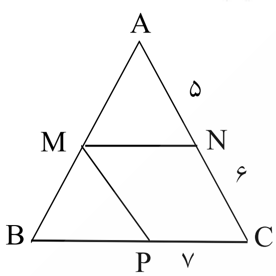
۳ - طول اضلاع یک مثلث به‌ترتیب ۶ و ۸ و ۹ است و طول کوچک‌ترین ضلع مثلث متشابه با آن برابر با ۸ است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

نسبت تشابه برابر است با $\frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$ که همان نسبت بین محیط است:

محیط مثلث اول $۱۳ + ۸ + ۶ = ۲۷$

محیط مثلث دوم $\frac{۲۷}{x} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = \frac{۴ \times \cancel{۲۷}^{۹}}{\cancel{۳}_{۱}} = ۳۶$

۴ - در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$، $MP \parallel AC$، است. اگر $AN = ۵$ و $NC = ۶$ و $PC = ۷$ باشد، BP را به دست آورید.



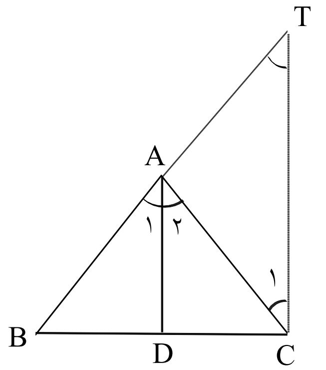
$MNCP$ یک متوازی‌الاضلاع است، چون ضلع‌های روبه‌رو دو به دو موازی هستند. بنابراین $MN = PC = ۷$ و آن‌ها که $MN \parallel PC$ طبق قضیه تالس در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۵}{۱۱} = \frac{۷}{x} \Rightarrow x = \frac{\cancel{۱۱}^{۲/۲} \times ۷}{\cancel{۵}_{۱}} = ۱۵/۴$$

$BP = ۱۵/۴ - ۷ = ۸/۴$

۵ - قضیه‌ی زیر را ثابت کنید:

«در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کنند.»



AD نیمساز زاویه‌ی A است. باید ثابت کنیم که $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

اثبات: از نقطه‌ی C موازی AD خطی رسم می‌کنیم که امتداد AB را در نقطه‌ی T قطع کند. از آن‌جا که $CT \parallel AD$ و BT خط مورب آن‌ها $\hat{A}_۱=\hat{T}$ و با درنظر گرفتن AC به عنوان خط مورب $\hat{C}_۱=\hat{A}_۲$.

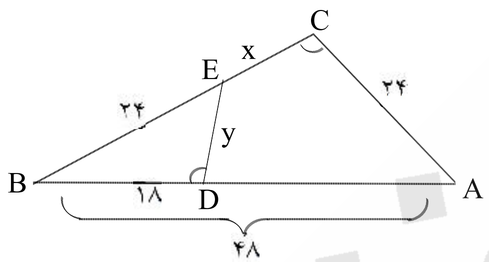
$\hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \Rightarrow \hat{C}_۱=\hat{T} \Rightarrow ATC$ مثلث متساوی‌الساقین

$\Rightarrow AT=AC \quad (۱)$

با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث BEC می‌توان نوشت: $(AD \parallel EC)$

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AT}\xrightarrow[\text{طبق ۱}]{AT=AC}\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

۲۶ - در شکل مقابل، . طول x و y را پیدا کنید.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{C}=B\hat{D}E\\ \hat{B}=\hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow B\overset{\triangle}{D}E \sim A\overset{\triangle}{B}C \Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{ED}{AC}=\frac{BE}{AB}$$

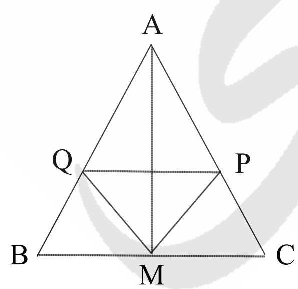
$$\Rightarrow \frac{۱۸}{۲۴+x}=\frac{y}{۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸}\Rightarrow \begin{cases}\frac{۱۸}{۲۴+x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲۴+x=۳۶\Rightarrow x=۱۲\\ \frac{y}{۲۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲y=۲۴\Rightarrow y=۱۲\end{cases}$$

۲۷ - ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.

کافیست میانه را به اندازه خودش امتداد دهیم و نقطه‌ی حاصل را به دو رأس حاده‌ی مثلث وصل کنیم تا یک مستطیل بوجود آید چون در مستطیل قطرها مساویند می‌توان حکم را نتیجه گرفت.

۲۸ - در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زاویه‌های AMC و AMB هستند.

ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



در مثلث AMC و نیمساز MP داریم: $\frac{MC}{MA}=\frac{AP}{PC} \quad (۱)$

در مثلث AMB و نیمساز MQ داریم: $\frac{MB}{MA}=\frac{QB}{AQ} \quad (۲)$

در رابطه (۲) می‌توانیم به جای MB، MC را جایگزین کنیم، چون M وسط ضلع BC است.

$$\frac{MC}{MA}=\frac{QB}{AQ} \quad (۳)$$

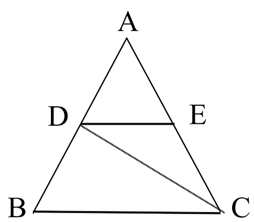
با مقایسه (۱) و (۳) داریم:

$$\frac{QB}{AQ}=\frac{AP}{PC}\xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} QP \parallel BC$$

۳۹ - طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

$\simeq$

۴۰ - در شکل زیر $\frac{AD}{AB}=\frac{۳}{۷}$، $DE \parallel BC$ مساحت ADE و DEC را به دست آورید.



چون $DE \parallel BC$، پس $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{۳}{۷}$

$$\frac{AE}{AC}=\frac{۳}{۷}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{AE}{AC-AE}=\frac{۳}{۷-۳}\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{۳}{۴}$$

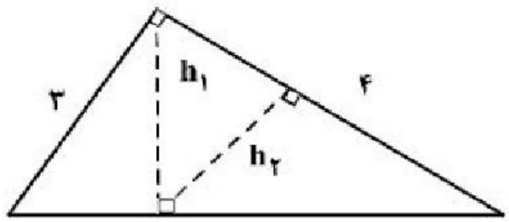
چون دو مثلث در رأس D مشترک‌اند و قاعده‌های آن‌ها بر روی یک خط قرار گرفته است.

$$\frac{S_{A\overset{\triangle}{D}E}}{S_{D\overset{\triangle}{E}C}}=\frac{AE}{EC}=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین نسبت مساحت‌ها برابر با $\frac{۳}{۴}$ است.

۱- در شکل زیر، h_1 و h_2 ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند.

نسبت $\frac{h_2}{h_1}$، کدام است؟

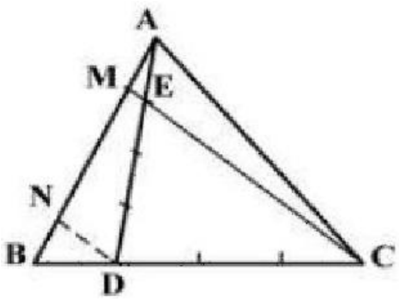


۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

سراسری => تجربی => ۹۸

۲- در شکل زیر، $BD = \frac{1}{4}BC$ و $AE = \frac{1}{4}AD$ و $DN \parallel CM$، اندازه‌ی AB چند برابر AM است؟



۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => ریاضی

۳- در مثلثی طول سه ضلع ۲ , ۴ , $2\sqrt{3}$ است. مجموع دو زاویه‌ی بزرگ‌تر چه‌قدر است؟

۱) ۱۵۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۱۳۵° ۴) ۱۶۵°

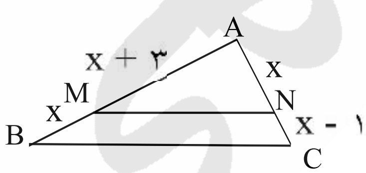
کنکورهای خارج از کشور => آزاد => ریاضی

۴- در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{۲}{۳}$ نسبت اضلاع است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۷۵ ۳) ۳

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۵- در شکل مقابل، MN موازی BC است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

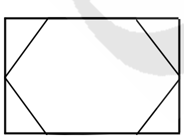


۱) $۱\frac{۲}{۳}$ ۲) $۱\frac{۵}{۹}$

۳) $۱\frac{۷}{۹}$ ۴) $۱\frac{۸}{۹}$

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => ریاضی

۶- در شکل مقابل محیط شش ضلعی منتظم چند برابر محیط مستطیل، محیط بر آن است؟

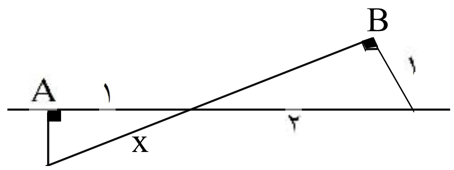


۱) $3\left(\sqrt{2}-1\right)$ ۲) $3\left(3-2\sqrt{2}\right)$

۳) $2\left(\sqrt{3}-1\right)$ ۴)

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => ریاضی

۷ - در شکل مقابل دو زاویه‌ی $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ قائمه‌اند، مقدار x چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

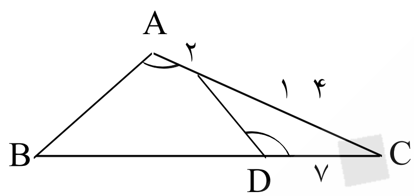
سراسری => ریاضی => ۹۱

۸ - در مثلث ABC داریم: $\widehat{A} = ۷۰^\circ$ و $\widehat{B} = ۵۰^\circ$ و ضلع $AB = ۱۸$ ، در مثلث MNP داریم: $\widehat{N} = ۶۰^\circ$ و $\widehat{M} = ۷۰^\circ$. اگر مساحت مثلث ABC برابر $\frac{۹}{۴}$ مساحت مثلث MNP باشد، ضلع MP چه‌قدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

سراسری => تجربی => ۸۶

۹ - در شکل مقابل $\widehat{A} = \widehat{D}$ ، طول BD چند واحد است؟



۱) ۲۲ ۲) ۲۳

۳) ۲۴ ۴) ۲۵

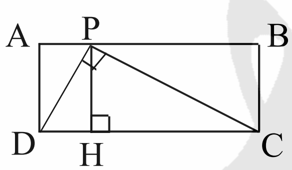
سراسری => ریاضی => ۸۶

۱۰ - نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است اگر یک ضلع مثلث کوچکتر ۲۱ سانتی‌متر باشد ضلع متناظر به این ضلع درمثلث بزرگتر چند سانتی‌متر است؟

۱) $۲۱\sqrt{۲}$ ۲) $۲۱\sqrt{۳}$ ۳) $۲۴\sqrt{۲}$ ۴) $۲۴\sqrt{۳}$

سراسری => تجربی => ۸۲

۱۱ - در مستطیل شکل مقابل $P = ۹۰^\circ$ و $۳AP = BP = ۹$. طول DP کدام است؟



۱) ۵ ۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۶

سراسری => تجربی => ۸۱

۱۲ - زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۸ و ۵ و ۲ می‌باشد. اندازه کوچکترین زاویه خارجی این مثلث چند درجه است؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۲ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶

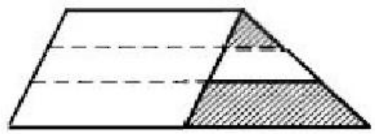
ی => تجربی => ۸۰ و سنجش علمی آزمون یار => ۸۰-۸۱ => متوسطه

۱۳ - در مستطیل ABCD به طول $AB = ۱۷$، از نقطه‌ی A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $BH = ۱۵$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چه‌قدر بیش‌تر است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۱۴ - یک ساق ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره‌خط موازی یک‌دیگرند. نسبت مساحت دو ناحیه سایه‌زده، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۱۵ - در مثلث ABC، اضلاع $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۷$ است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطه‌ی D قطع کرده است. اندازه‌ی BD، کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) ۸/۵ ۴) ۹

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۱۶ - در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، اضلاع قائم $AB = ۳\sqrt{۵}$ و $AC = ۶$ ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC، چند برابر مساحت مثلث AMH، است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

سراسری => تجربی => ۹۸

۱۷ - در یک ذوزنقه، پاره‌خطی که وسط های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن‌را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن ذوزنقه، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

سراسری => تجربی => ۹۸

۱۸ - از داخل یک استوانه‌ی قائم توپُر، به شعاع قاعده‌ی ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی مخروط به فاصله‌ی ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

۱) $۱۰/۳۶\pi$ ۲) $۱۱/۲۸\pi$ ۳) $۱۲/۵۶\pi$ ۴) $۱۳/۴۴\pi$

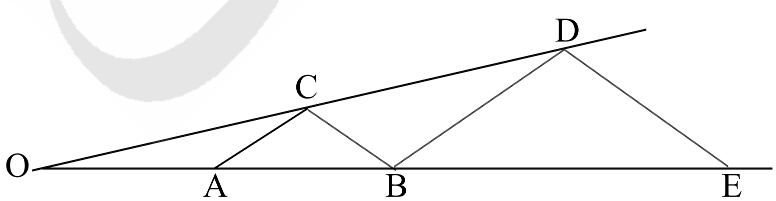
کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۱۹ - مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره‌ی گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => ریاضی

۲۰ - در شکل روبه‌رو، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $OA = ۳$ و $AB = ۵$ ، اندازه‌ی BE کدام است؟



۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$ ۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$ ۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$ ۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$

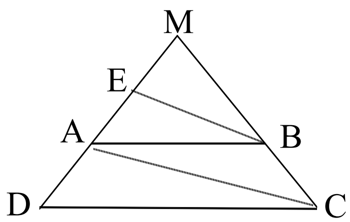
کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۱ - در ذوزنقه‌ای اندازه‌ی قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

۱) ۱۱/۴ ۲) ۱۱/۶ ۳) ۱۲/۲ ۴) ۱۲/۸

سراسری => تجربی => ۹۴

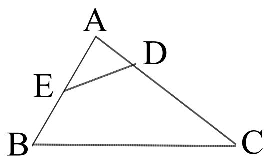
۲ - در ذوزنقه $ABCD$ ، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD=۷$ و $AE=۳$ باشد، فاصله‌ی MD کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۲۵
۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۲/۷۵

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => ریاضی

۳ - در چهارضلعی $BCDE$، زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند. اگر $BC=۲۰$ و $DE=۱۲$،آن‌گاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۰/۵۶ ۲) ۰/۶۴
۳) ۰/۷۲ ۴) ۰/۸۰

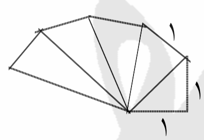
کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۴ - اضلاع مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز زاویه‌ی داخلی متوسط آن را رسم می کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => ریاضی

۵ - مثلث‌های قائم‌الزاویه، در یک رأس مشترک، که اندازه‌ی یک ضلع قائم آن‌ها ۱ واحد است، چنان رسم می‌شوند که ضلع قائم دیگر آن، وتر مثلث قبلی است. مساحت نهمین مثلث کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$
۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

سراسری => تجربی => ۸۸

۶ - زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۶ و ۵ و ۱، می‌باشند، کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث چند برابر بزرگ‌ترین ضلع آن است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

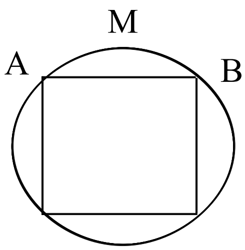
سراسری => تجربی => ۹۳ (سراسری - آزاد)

۷ - در مثلث متساوی‌الساقین $AB=AC=۴$ و $BC=۲\sqrt{۷}$ ضلع AC را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. $(AD=AC)$، اندازه BD کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۶ ۴) ۷

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۱۸ - در شکل مقابل ضلع مربع برابر ۲ واحد است. فاصله‌ی وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چه‌قدر است؟



۱)
۲) $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$
۳) $\sqrt{2}$
۴) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

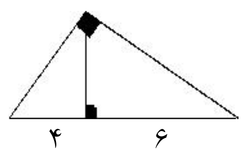
کنکورهای خارج از کشور <= سراسری <= تجربی

۱۹ - در ذوزنقه‌ای به طول قاعده‌ها ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه M متقاطع‌اند، فاصله M از قاعده‌ی بزرگ‌تر، چه‌قدر است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

سراسری <= تجربی <= ۸۷

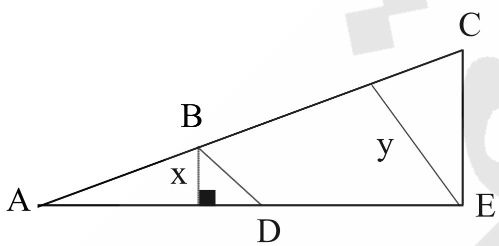
۲۰ - در بزرگ‌ترین مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل، اندازه‌ی بزرگ‌ترین میانه کدام است؟



۱) $\sqrt{50}$
۲) $\sqrt{65}$
۳) $\sqrt{70}$
۴) $\sqrt{75}$

سراسری <= تجربی <= ۸۶

۲۱ - در شکل مقابل $AD = 8$, $DE = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ ، نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{5}{9}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{4}{5}$

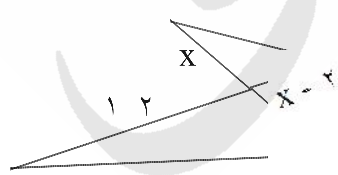
سراسری <= تجربی <= ۸۵

۲۲ - اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ و ۶ واحد است، عمود منصف وتر، امتداد ضلع کوچکتر را در M قطع می‌کند. فاصله‌ی M از نزدیکترین رأس این مثلث چند واحد است؟

۱) ۷/۵
۲) ۸
۳) $\sqrt{80}$
۴) $\frac{25}{3}$

سراسری <= ریاضی <= ۸۴

۲۳ - در شکل مقابل دو مثلث متشابه‌اند، نسبت مساحت آن دو مثلث کدام است؟

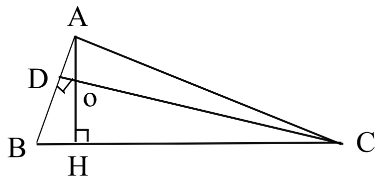


۱) $\frac{9}{4}$
۲) $\frac{9}{16}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{3}{4}$

سراسری <= تجربی <= ۸۳

۴ - در شکل مقابل AH و CD دو ارتفاع مثلث ABC هستند اگر

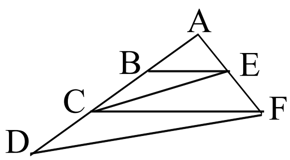
$12 = \frac{1}{3}OH = AD = 5DO$ طول HC کدام است؟



۱) ۱۶۵
۲) ۱۷۰
۳) ۱۷۵
۴) ۱۸۰

سراسری => ریاضی => ۸۲

۵ - در شکل مقابل $BE \parallel CF$ و $DF \parallel CE$، اگر $AB = 5$ و $BC = 3$ آنگاه اندازه CD کدام است؟



۱) ۴/۵
۲) ۴/۸
۳) ۵/۴
۴) ۵/۶

سراسری => تجربی => ۸۱

۶ - طول اضلاع یک مثلث ۱۱ و ۵ و ۷ سانتیمتر و طول کوچکترین ضلع مثلثی متشابه با مثلث اولی، ۲۲/۵ سانتیمتر است. محیط مثلث دوم کدام است؟

۱) ۱۰۲
۲) ۱۰۲/۵
۳) ۱۰۳
۴) ۱۰۳/۵

سراسری => تجربی => ۸۰

۷ - اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \alpha$ باشد، کدام نسبت برابر $\frac{1}{\alpha^3}$ است؟

۱) $\frac{b^4 + d^4}{(b+d)(a+c)}$

۲) $\frac{(b+d)}{(a+c)} \cdot \frac{b^2 + 2bd + d^2}{a^2 - ac + c^2}$

۳) $\frac{(b+d)\left(b^2 - bd + d^2\right)}{(a+c)^2}$

۴)

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۸ - در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم‌الزاویه‌ی ۳ و $\sqrt{6}$ ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است و مثلث را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم کرده است. نسبت مساحت این دو مثلث کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{2}{5}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{6}{7}$

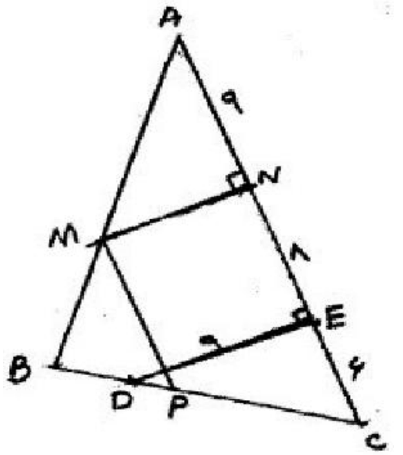
آزمایشی سنجش => تجربی => ۸۷

۹ - از یک نقطه‌ی داخل مثلث، سه خط به موازات اضلاع مثلث رسم می‌کنیم. تعداد مثلث‌های متشابه به وجود آمده در درون مثلث، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۴۰ - در شکل مقابل، $MP \parallel AC, BD = \frac{۱}{۳} DC$ است. نسبت $\frac{BP}{PC}$، کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$

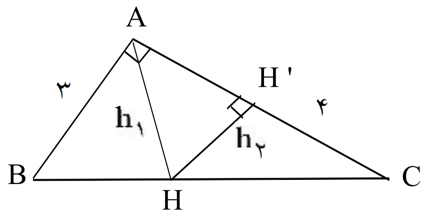
۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

آ ز م ا ی ش ی س ن جش => د ه م => س ا ل ت ح ص ی ل ی ۹ ۸ - ۹ ۷

۱ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و AHC با داشتن دو زاویه مساوی متشابه‌اند. بنابراین نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت اضلاع نظیرشان است.

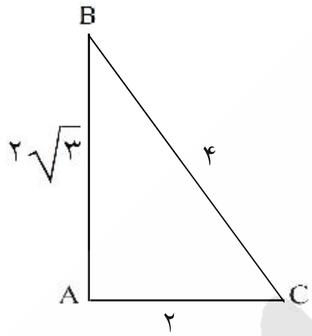


$$A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{H}C \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱}=\frac{AC}{BC} \xrightarrow{BC=\sqrt{۱۶+۹}=۵} \frac{h_۲}{h_۱}=\frac{۴}{۵}$$

۲ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM}=\frac{AM+MN+NB}{AM}=\frac{۵AM}{AM}=۵$$

۳ - گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با دقت کردن به طول اضلاع مثلث، می‌توان متوجه شد که رابطه‌ی فیثاغورس بین سه عدد ۴، ۲ و $۲\sqrt{۳}$ برقرار است یعنی $\left(۲\sqrt{۳}\right)^۲+۲^۲=۴^۲$. لذا مثلث داده شده یک مثلث قائم‌الزاویه به طول وتر ۴ و اضلاع قائمه‌ی ۲ , $۲\sqrt{۳}$ است. بنابراین برای زاویه‌های C , B داریم:



$$\text{Sin}\,\hat{B}=\frac{۲}{۴}\Rightarrow \hat{B}=۳۰^\circ$$

$$\text{Cos}\,\hat{C}=\frac{۲}{۴}\Rightarrow \hat{C}=۶۰^\circ$$

بنابراین حاصل جمع دو زاویه بزرگ‌تر برابر است با $۹۰^\circ+۶۰^\circ=۱۵۰^\circ$.

۴ - گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه این دو مثلث است. اگر نسبت تشابه دو مثلث را k در نظر بگیریم، چون نسبت مساحت‌ها $\frac{۲}{۳}$ نسبت اضلاع (یا همان نسبت تشابه) است، داریم:

$$\text{نسبت مساحت}=\frac{۲}{۳}\times\text{نسبت اضلاع} \Rightarrow k^۲=\frac{۲}{۳}k \xrightarrow[(k\neq ۰)]{\div k} k=\frac{۲}{۳}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ نسبت تشابه مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر

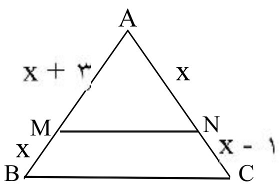
حال با داشتن نسبت تشابه دو مثلث (یعنی $k'=\frac{۳}{۲}$)، نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

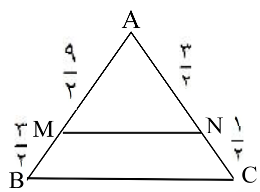
$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}}=K'^۲=\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر MN موازی BC باشد، آن‌گاه بر اساس قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{x+3}{x}=\frac{x}{x-1}\Rightarrow \cancel{x^2}+2x-3=\cancel{x^2}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

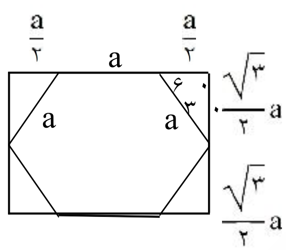
بنابراین شکل به صورت روبه‌رو درمی‌آید. از طرفی می‌دانیم نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر با مربع نسبت تشابه آن‌ها است، بنابراین:





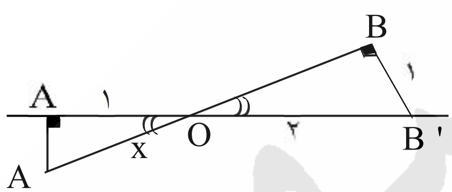
۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

اندازه‌ی ضلع شش ضلعی را a در نظر می‌گیریم، با توجه به شکل داریم:



$$\frac{\text{محیط شش ضلعی}}{\text{محیط مستطیل}}=\frac{6a}{4a+2\sqrt{3}a}=\frac{3}{2+\sqrt{3}}=\frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{1}=3\left(2-\sqrt{3}\right)$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\Delta OBB' : OB'^2=OB^2+BB'^2\Rightarrow OB^2=4-1=3\Rightarrow OB=\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ A=B\end{array}\right\}\Rightarrow A\hat{O}A'\sim B\hat{O}B'\Rightarrow\frac{A'O}{OB'}=\frac{AO}{OB}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

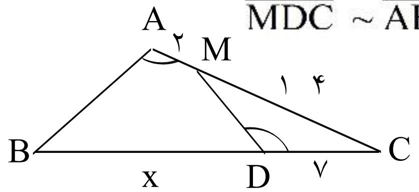
۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ABC} : A=70^\circ \text{ و } B=50^\circ \text{ و } \hat{C}=60^\circ\\ \widehat{MNP} : \hat{M}=70^\circ \text{ و } \hat{N}=60^\circ \text{ و } \hat{P}=50^\circ\end{array}\right.\Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta MPN$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MPN}}=\frac{9}{4}=\left(\frac{AB}{MP}\right)^2\Rightarrow\frac{AB}{MP}=\sqrt{\frac{9}{4}}\Rightarrow\frac{18}{MP}=\frac{3}{2}\Rightarrow MP=12$$

- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{MDC} \sim \widehat{ABC} \Rightarrow \frac{۷}{۱۶} = \frac{۱۴}{۷+x} \Rightarrow \frac{۱}{۱۶} = \frac{۲}{۷+x} \Rightarrow ۷ + x = ۳۲ \Rightarrow x = ۲۵$$



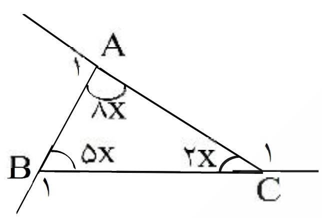
۱۰ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۴۹}{۱۲۸} \Rightarrow \frac{a_۱}{a_۲} = \frac{۷}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow a_۲ = ۲۴\sqrt{۲}$$

۱۱ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث قائمه‌ی $\widehat{DPC}$ ، PH ارتفاع وارد بر وتر است، داریم:

$$PH^۲ = DH.CH = AP.PB \Rightarrow PH^۲ = ۳\times ۹ = ۲۷ \Rightarrow PH = AD = \sqrt{۲۷} = ۳\sqrt{۳}$$
$$۳AP = ۹ \Rightarrow AP = ۳$$
(رابطه فیثاغورس) $DP^۲ = AD^۲ + AP^۲ = ۲۷ + ۹ = ۳۶ \Rightarrow DP = ۶$

۱۲ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$۲x + ۵x + ۸x = ۱۵x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = ۸x = ۹۶^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۱۸۰ - \hat{A} = ۸۴^\circ \\ \hat{B} = ۵x = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۱۲۰^\circ \\ \hat{C} = ۲x = ۲۴^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱ = ۱۵۶^\circ \end{cases}$$

نکته: کوچکترین زاویهٔ خارجی مثلث مربوط به بزرگترین زاویهٔ داخلی مثلث $(\hat{A})$ می‌باشد.

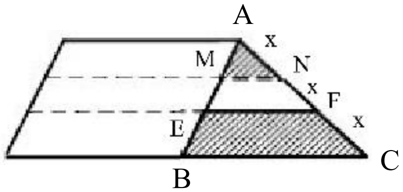
۱۳ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABD بنابر رابطه‌ی طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$AB^۲ = BH \times BD \Rightarrow ۱۷^۲ = ۱۵ \times BD \Rightarrow BD = \frac{۱۷\times ۱۷}{۱۵}$$

بنابراین:

$$BD - ۱۹ = \frac{۱۷\times ۱۷}{۱۵} - ۱۹ = \frac{۱۷\times ۱۷ - ۱۵\times ۱۹}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵}$$

۱۴ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل می‌توان نوشت:



$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} A\hat{M}N \sim A\hat{B}C \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{x}{۳x}\right)^۲ = \frac{۱}{۹} \quad (۱)$$

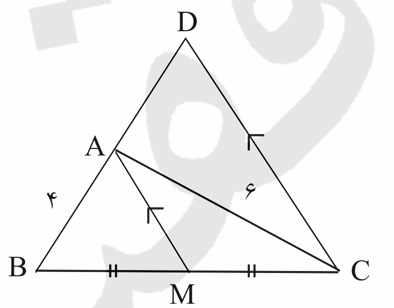
$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} A\hat{E}F \sim A\hat{B}C \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{۲x}{۳x}\right)^۲ = \frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}} \frac{S_{BEFC}}{S_{ABC}} = \frac{۵}{۹} \quad (۲)$$

از تقسیم تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}}{\frac{S_{BEFC}}{S_{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۵}{۹}} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{BEFC}} = \frac{۱}{۵}$$

۱۵ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



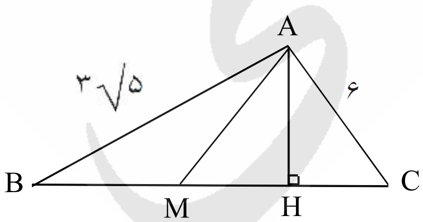
بنابر فرض سوال شکل مقابل را خواهیم داشت:

$$AM \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AD} \xrightarrow{BM = MC} ۱ = \frac{۴}{AD} \Rightarrow AD = ۴$$

بنابراین:

$$BD = AB + AD = ۴ + ۴ = ۸$$

۱۶ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه می‌نویسیم:



$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۴۵ + ۳۶ = ۸۱ \Rightarrow BC = ۹$$

$$AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow ۳۶ = CH \times ۹ \Rightarrow CH = ۴$$

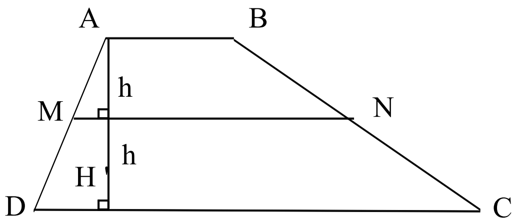
$$MH = MC - CH = \frac{۹}{۲} - ۴ = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = \frac{\frac{۱}{۲}AH \times BC}{\frac{۱}{۲}AH \times MH} = \frac{BC}{MH} = \frac{۹}{\frac{۱}{۲}} = ۱۸$$

۱۷ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم پاره‌خطی که وسط های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند مساوی نصف مجموع دو قاعده است. در صورتی که M و N وسط های دو ساق ذوزنقه‌ی ABCD باشند پس $MN = \frac{\Lambda B + DC}{2}$ است.

در ضمن بنابر قضیه‌ی تالس اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، آن‌گاه $AH' = HH' = h$. حال بنابر فرض می‌نویسیم.



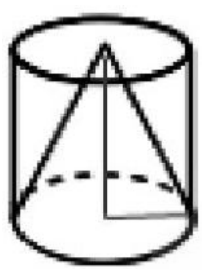
$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}h(AB + MN)}{\frac{1}{2}h(MN + DC)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB + MN}{MN + DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN + DC = 2AB + 2MN$$

$$\Rightarrow DC - 2AB = MN \Rightarrow DC - 2AB = \frac{\Lambda B + DC}{2} \Rightarrow 2DC - 4AB = AB + DC$$

$$\Rightarrow DC = 5AB \Rightarrow \frac{DC}{AB} = \frac{1}{5}$$

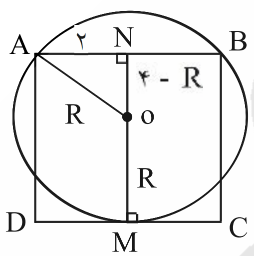
۱۸ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\frac{x}{4} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{8}{5}$$

$$S = \pi(4)^2 - \pi\left(\frac{8}{5}\right)^2 = 16\pi - \frac{64}{25}\pi = \frac{336}{25}\pi = 13/44\pi$$

۱۹ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم دایره‌ی گذرا از دو رأس A و B در نقطه‌ی M بر ضلع DC مماس باشد. در این صورت اگر O مرکز دایره باشد آن‌گاه OM بر DC و امتداد آن بر AB عمود خواهد بود در مثلث قائم‌الزاویه OAN قضیه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم.



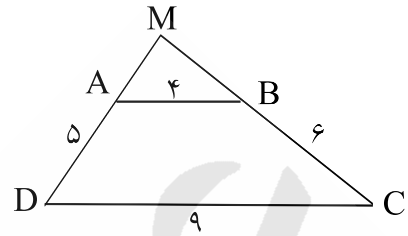
$$OA^2 = AN^2 + ON^2 \Rightarrow R^2 = 2^2 + (4 - R)^2 \Rightarrow R^2 = 4 + 16 - 8R + R^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{20}{8} = 2/5$$

۲۰ - گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. از قضیه‌ی تالس به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda C \parallel BD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} \\ BC \parallel DE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OC}{CD} = \frac{OB}{BE} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{8}{BE} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

۱ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنا بر فرض تست شکل مقابل را خواهیم داشت:



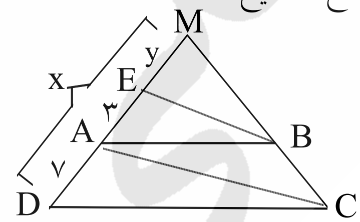
$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{AB}{DC} = \frac{MB}{MC}$$

$$\frac{MA}{MD} = \frac{۴}{۹} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل از}} \frac{MA}{۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow MA = ۴$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{۴}{۹} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل از}} \frac{MB}{۶} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow MB = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸$$

محیط MAB

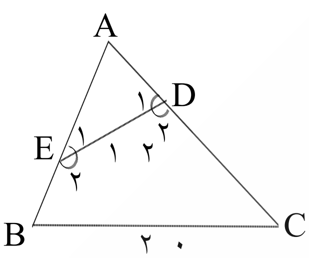
۲ - گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left.\begin{array}{l} BE \parallel AC \Rightarrow \frac{y}{۳} = \frac{MB}{BC} \\ AB \parallel CD \Rightarrow \frac{y+۳}{۷} = \frac{MB}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{۳} = \frac{y+۳}{۷} \Rightarrow y = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

$$x = y + ۱۰ = ۲/۲۵ + ۱۰ = ۱۲/۲۵$$

۳ - گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در چهارضلعی BCDE، زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند. و $BC = ۲۰$ و $DE = ۱۲$ است. داریم:



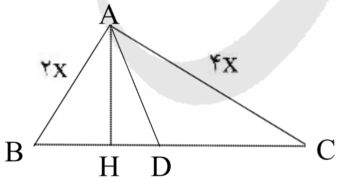
$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \\ \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_۱$$

$$\begin{cases} \hat{C} + \hat{E}_۲ = ۱۸۰^\circ \\ \hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{C} = \hat{E}_۱$$

از تساوی زوایای دو مثلث ABC و ADE، نتیجه می‌گیریم، این دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر با نسبت دو ضلع نظیر هم می‌باشد. دو ضلع DE و BC متناظر یک‌دیگرند. و در نتیجه نسبت تشابه $k = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵}$ است. از طرفی می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر با مجذور نسبت تشابه آن‌ها است. پس داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = K^۲ = \left(\frac{۳}{۵}\right)^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{ABC} - S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{۲۵ - ۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{BCDE}}{S_{ABC}} = \frac{۱۶}{۲۵} = ۰/۶۴$$

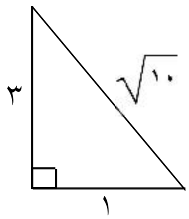
۴ - گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل نیمساز داخلی یک زاویه، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می‌کند، بنابراین:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۲x}{۴x} = \frac{۱}{۲} \longrightarrow DC = ۲BD$$

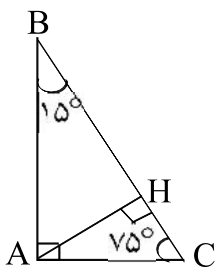
$$\frac{S_{\widehat{ABD}}}{S_{\widehat{ABC}}} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times BD}{\cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times BC} = \frac{BD}{BD + DC} = \frac{BD}{BD + ۲BD} = \frac{۱}{۳}$$

۲۵ - گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. وتر مثلث قائم‌الزاویه به‌ترتیب $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{4}$ و ..... می‌باشند پس مثلث نهم دارای وتر $\sqrt{10}$ است و شکل آن به‌صورت زیر است.



$$S = \frac{1\times 3}{2} = \frac{3}{2}$$

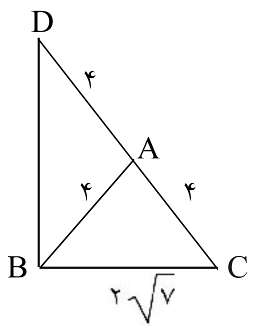
۲۶ - گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. زوایای مثلث را $6k^\circ$ و $5k^\circ$ و $1k^\circ$ را در نظر می‌گیریم می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث $180k^\circ$ است پس:



$$k + 5k + 6k = 180 \Rightarrow 12k = 180 \Rightarrow k = 5$$

معلوم شد که مثلث قائم الزاویه است زیرا زوایا 90° و 75° و 15° هستند. بزرگ‌ترین ضلع وتر و کوچک‌ترین ارتفاع، ارتفاع وارد بر وتر است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌ی 15° دارد ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ است پس: $\frac{AH}{BC} = \frac{1}{4}$

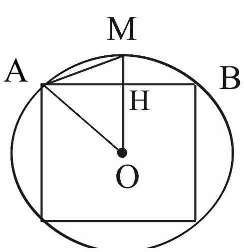
۲۷ - گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



مثلث $B\overset{\triangle}{D}C$ قائم‌الزاویه است زیرا میانه AB نصف DC می‌باشد.

$$B\overset{\triangle}{D}C : BD^2 = DC^2 - BC^2 = 8^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow BD = 6$$

۲۸ - گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

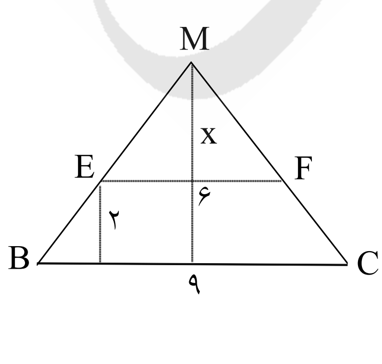


از O به M و A وصل می‌کنیم. مثلث $O\overset{\triangle}{A}H$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. از طرفی قطر مربع با قطر دایره برابر است پس $2R = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ و $R = \sqrt{2}$ در نتیجه $OM = \sqrt{2}$ پس $MH = OM - OH = \sqrt{2} - 1$

$$A\overset{\triangle}{H}M : AM^2 = MH^2 + AH^2 \Rightarrow AM^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 1 = 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow AM = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

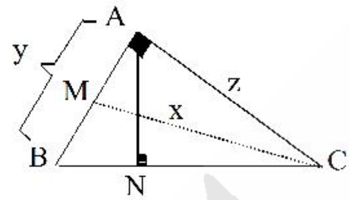
۲۹ - گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث MEF و MBC متشابهند. با فرض این‌که ارتفاع مثلث بزرگ‌تر $(x + 2)$ باشد و نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت تشابه.

$$\frac{6}{9} = \frac{x}{2 + x}$$



$$12 + 6x = 9x \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 4 + 2 = 6$$

۲۰ - گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در هر مثلث میانه‌ی وارد بر کوچک‌ترین ضلع بزرگ‌ترین میانه است. اگر ارتفاع AN را برابر x در نظر بگیریم داریم:

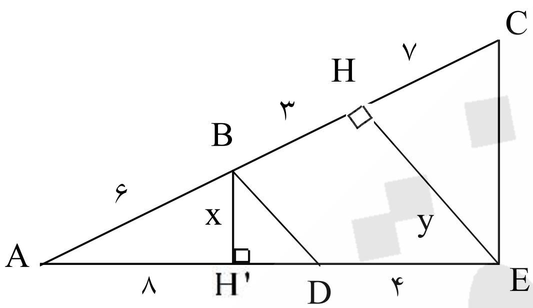


$$x^{۲} = ۴ \times ۶ \Rightarrow x = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$$
$$y^{۲} = ۱۶ + ۲۴ = ۴۰ \rightarrow y = ۲\sqrt{۱۰}$$
$$z^{۲} = ۱۰^{۲} - ۴۰ = ۶۰ \rightarrow z = \sqrt{۶۰}$$

در مثلث CMA:

$$CM^{۲} = AM^{۲} + AC^{۲}$$
$$CM^{۲} = ۱۰ + ۶۰ = ۷۰ \rightarrow CM = \sqrt{۷۰}$$

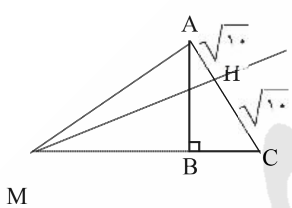
۲۱ - گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} \text{ زاویه ی مشترک} \\ \widehat{H'} = \widehat{H} = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ز ز})} \overset{\frown}{AH'B} \sim \overset{\frown}{AHE}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{AB}{AE} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

۲۲ - گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. $AB = ۶ \quad , \quad BC = ۲ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۱۰}$

قرار می‌دهیم $MC = z$



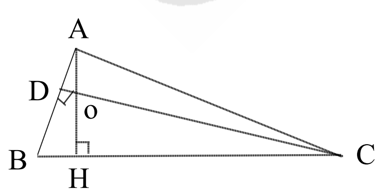
$$S_{\Delta AMC} = \frac{۱}{۲} AB \,.\, MC = \frac{۱}{۲} MH \,.\, AC$$
$$۶z = \sqrt{z^{۲} - ۱۰} \times ۲\sqrt{۱۰} \Rightarrow ۳z = \sqrt{۱۰z^{۲} - ۱۰۰}$$
$$۹z^{۲} = ۱۰z^{۲} - ۱۰۰ \Rightarrow z^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow z = ۱۰$$
$$MB = MC - BC \Rightarrow MB = ۸$$

۲۳ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۹}{x - ۲} = \frac{۱۲}{x} \Rightarrow ۹x = ۱۲x - ۲۴ \Rightarrow x = ۸$$

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \longrightarrow \text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{۴}{۹}$$

۲۴ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$AD = ۱۲ \,,\, OH = ۳۶ \,,\, OD = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow \overset{\frown}{OAD} \sim \overset{\frown}{OHC} \Rightarrow \frac{AD}{HC} = \frac{OD}{OH} \Rightarrow$$
$$\frac{۱۲}{HC} = \frac{\frac{۱۲}{۵}}{۳۶} = \frac{۱}{۱۵} \Rightarrow HC = ۱۸۰$$

۵ ۲ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۶ ۲ - نسبت تشابه ۲ مثلث متشابه برابر نسبت اضلاع متناظر است. اگر طول دو ضلع دیگر مثلث x و y باشد داریم:

ضلع به طول ۵ از مثلث اول با ضلع ۲۲/۵ از مثلث دوم متناظر است

$$\frac{۲۲/۵}{۵}=\frac{x}{۷}=\frac{y}{۱۱}$$

چون هر دو کوچکترین ضلع ۲ مثلث هستند.

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۳۱/۵ \\ y=۴۹/۵ \end{cases} \Rightarrow \text{محیط مثلث}=x+y+۲۲/۵=۱۰۳/۵$$

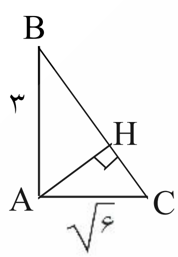
بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۷ ۲ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\alpha \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{۱}{\alpha}$$

$$\begin{cases} \dfrac{b^۳+d^۳}{a^۳+c^۳}=\dfrac{۱}{\alpha^۲} \Rightarrow \dfrac{(b+d)\left(b^۲-bd+d^۲\right)}{a^۳+c^۳}=\dfrac{۱}{\alpha^۳} \\ \dfrac{(b+d)^۳}{(a+c)^۳}=\dfrac{۱}{\alpha^۳} \end{cases}$$

۸ ۲ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم AH ارتفاع وارد بر وتر باشد.



$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=۹+۶=۱۵ \Rightarrow BC=\sqrt{۱۵}$$

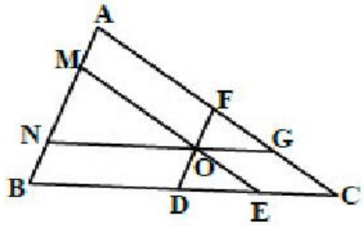
$$AB^۲=BH\times BC \Rightarrow ۹=BH\times\sqrt{۱۵} \Rightarrow BH=\frac{۹}{\sqrt{۱۵}},\ CH=\frac{۶}{\sqrt{۱۵}}$$

نسبت مساحت دو مثلث با ارتفاع یکسان به نسبت قاعده‌های آن‌هاست:

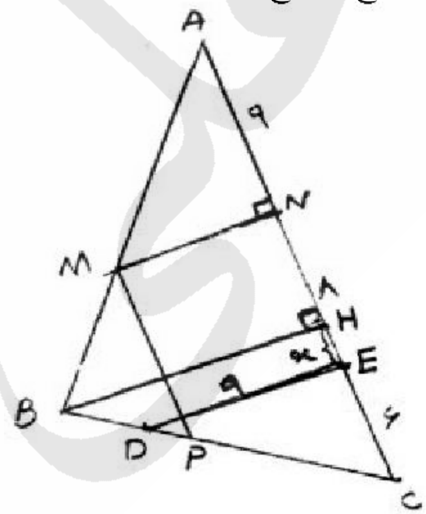
$$\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=\frac{BH}{CH}=\frac{\frac{۹}{\sqrt{۱۵}}}{\frac{۶}{\sqrt{۱۵}}}=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{S_{ACH}}{S_{ABH}}=\frac{CH}{BH}=\frac{\frac{۶}{\sqrt{۱۵}}}{\frac{۹}{\sqrt{۱۵}}}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

۳۹ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و زوایای مساوی ناشی از خطوط موازی و خطوط قاطع خط های موازی:



۴۰ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$D\overset{\triangle}{C}E \sim B\overset{\triangle}{H}C \Rightarrow \frac{DC}{BC}=\frac{CE}{CH}=\frac{DE}{BH}$$

$$NH = ۸ - ۲ = ۶$$

$$A\overset{\triangle}{B}H \sim A\overset{\triangle}{M}N \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{AB}=\frac{MN}{BH}=\frac{AN}{AH}=\frac{۹}{۱۵}$$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۵}\xrightarrow{MP \parallel AC}\frac{BP}{PC}=\frac{۲}{۳}$$