

سی و سه پل، اصفهان

انسان از بدو تولد ناگزیر به آشنایی با فضای هندسی و شکل‌های هندسی است و هندسه در طول تاریخ مشکل‌گشای او در جهت حل مسائل محیط پیرامونی‌اش بوده است. ساخت پل‌ها نمونه‌ای بارز از کارایی هندسه در زندگی روزمره انسان است.

توسیم‌های هندسی

درس اول

استدلال و قضیه تالس

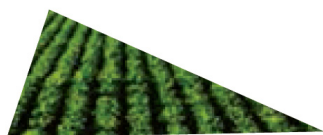
درس دوم

تشابه مثلث‌ها

درس سوم

درس اول

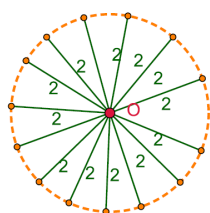
ترسیم های هندسی



انسان از دیرباز برای حل بسیاری از مسائل خود از ترسیم های هندسی کمک گرفته است. فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم مساحت تقسیم نماییم. چگونه می توان این کار را انجام داد؟

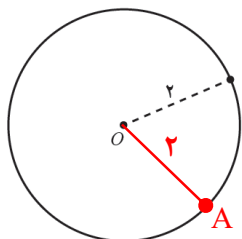
می توانیم ثابت کنیم که میانه ی هر مثلث آن مثلث را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند. کافی است وسط یکی از ضلع های زمین را پیدا کنیم و به رأس مقابل آن با یک دیوار مستقیم وصل کنیم.

فعالیت



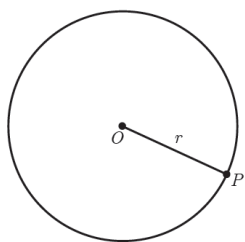
۱ یک نقطه ثابت در صفحه، مانند O را در نظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصله ثابت ۲ سانتی متر از آن هستند در نظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می دهند؟

این نقاط به شکل یک دایره هستند.



۲ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر بکشید و یک نقطه دلخواه روی این دایره در نظر بگیرید. فاصله این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

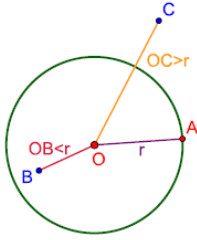
فاصله ی این نقطه تا مرکز دایره ۲ سانتی متر است.



نتیجه: دایره $C(O, r)$ (بخوانید دایره C به مرکز O و به شعاع r) را در نظر بگیرید. هر نقطه که از نقطه O به فاصله r باشد... **روی**... دایره قرار دارد و هر نقطه که... **روی**... دایره قرار دارد از نقطه O به فاصله r است.

۳ مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد یک بار برای نقاط داخل دایره و یک بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به دست آورید.

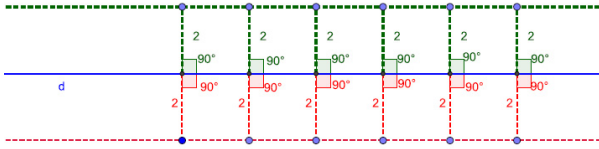
یک دایره به شعاع ۲ سانتی متر به مرکز O در صفحه داریم اگر نقاطی در صفحه را به دست آوریم که فاصله آن ها از مرکز دایره کمتر از ۲ سانتی متر باشند بی شمار دایره به مرکز O داریم که درون دایره مفروض قرار دارند و واقع تمام نقاطی که درون دایره هستند، فاصله شان از مرکز دایره کمتر از ۲ سانتی متر است. اگر نقاطی در صفحه را به دست آوریم که فاصله آن ها از مرکز این دایره بیش از ۲ سانتی متر باشد باز بی شمار دایره به مرکز O داریم که شعاع آن ها بیشتر از ۲ خواهد بود و این نقاط بیرون دایره قرار دارند.



در حالت کلی اگر فاصله ی هر نقطه در صفحه ی دایره $C(O, r)$ از مرکز دایره کمتر از r باشد نقطه درون دایره است و اگر این فاصله بیشتر از r باشد این نقطه بیرون دایره است.

۴ خطی مانند d در نظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از خط d هستند

مشخص نمایید. این نقاط چه شکلی یا شکل هایی را تشکیل می دهند؟



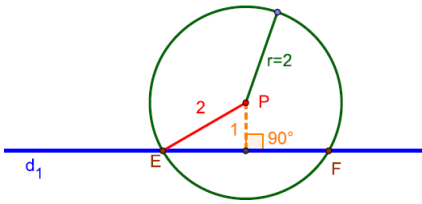
این نقاط به صورت دو خط موازی در دو طرف خط d قرار دارند.

۵ نقطه P به فاصله ۱ سانتی متر از خط d_1 قرار دارد.

الف) تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

برای مشخص کردن این نقاط با توجه به نتیجه ی بند ۲ این فعالیت کافی است دایره ای

به شعاع ۲ سانتی متر به مرکز P رسم کنیم.



ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

محل برخورد این دایره با خط d_1 یعنی نقاط E و F جواب این مسئله هستند.

۶ نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴

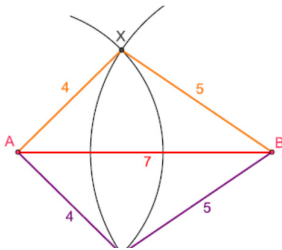
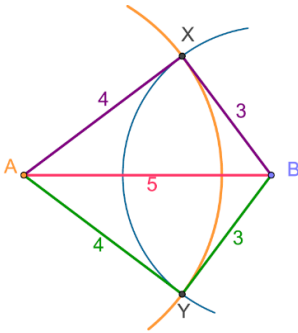
سانتی متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی متر کمانی دیگر رسم کنید

تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

الف) اندازه اضلاع مثلث های AXB و $A Y B$ را مشخص کنید.

اضلاع مثلث روی شکل نمایش داده شده اند.

ب) توضیح دهید که چگونه می توانید مثلی به طول ضلع های داده شده ۷ و ۵ و ۴ رسم کنید.



ابتدا پاره خطی به طول ۷ سانتی متر به نام AB رسم می کنیم. سپس به مرکز A (B)

دایره ای به شعاع ۴ سانتی متر و دایره ای به مرکز B (A) به شعاع ۵ سانتی متر رسم

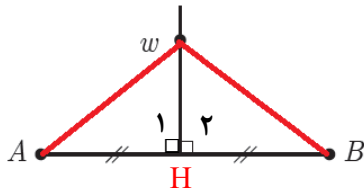
می کنیم. این دو دایره یکدیگر را در نقاط X و Y قطع می کنند. از این دو نقطه به دو

سر پاره خط AB وصل می کنیم مثلث های AXB و $A Y B$ جواب مسئله هستند.

برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن

۱- در شکل مقابل پاره خط AB و عمود منصف آن مشخص شده اند. نقطه ای دلخواه مانند

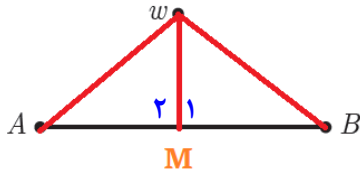
W روی عمود منصف AB در نظر بگیرید و نشان دهید W از دوسر AB به یک فاصله است.



$$\left. \begin{array}{l} AH = BH \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \\ WH = WH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AWH \cong \triangle BWH \Rightarrow AW = BW$$

نتیجه ۱: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط

به یک فاصله است.



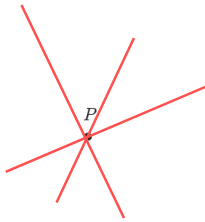
۲- پاره خط AB و نقطه W مانند شکل مقابل به گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به یک فاصله است (یعنی $AW = BW$). نشان دهید W روی عمود منصف AB قرار دارد. (راهنمایی: از W به A و B و به وسط AB وصل نمایید و با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمود منصف AB قرار دارد.)

دو مثلث AMW و BMW به حالت (ض ض ض) با هم همنهشت هستند. پس بنا بر اجزای متناظر $M_1 = M_2 = 90^\circ$ بنا بر این W روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

نتیجه ۲: هر نقطه که از دوسر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد روی عمود منصف آن پاره خط است.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دوسر آن پاره خط به یک فاصله و هر نقطه که از دوسر پاره خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

فعالیت کلاسی



۱- نقطه P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید بکشید که از نقطه P عبور نمایند؟

بی شمار خط از نقطه P می‌توان رسم کرد.

۲- دو نقطه A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید بکشید که از هر دو نقطه A و B عبور نمایند.

بی شمار خط می‌توان رسم کرد که بر هم منطبق می‌شوند و ما آن‌ها را یکی در نظر می‌گیریم.

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن را باید داشته باشیم؟ برای مشخص شدن یک خط کافی است دو نقطه از آن خط را داشته باشیم.

رسم عمود منصف یک پاره خط داده شده

می‌خواهیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم.

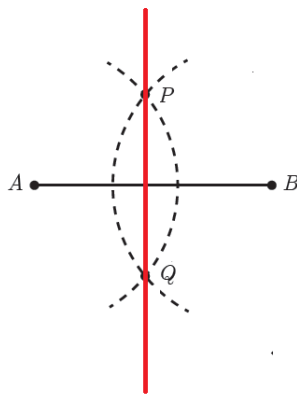
۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطه A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲- آیا نقاط P و Q نقطه‌ای متعلق به عمود منصف AB هستند؟ چرا؟

بله فاصله P و Q از دو سر پاره خط یکسان است (شعاع‌های دایره‌اند). پس نتیجه می‌گیریم AB قرار دارند.

۳- آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمود منصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟

بله اگر دو نقطه از خطی معلوم باشد می‌توان آن خط را مشخص کرد.



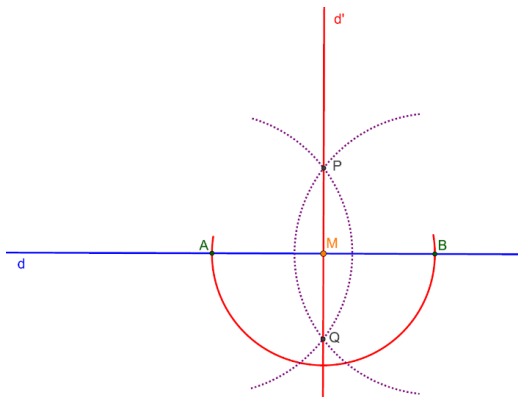
۴- حال عمود منصف AB را رسم نمایید.

خط PO همان عمود منصف پاره خط AB است.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطه M روی آن مانند شکل مشخص شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید به طوری که نقطه M وسط A و B باشد.



برای این منظور کافی است به مرکز M و شعاع دلخواه کمانی رسم کنیم طوری

این کمان خط d را در دو نقطه قطع می‌کند. این دو نقطه را A و B می‌نامیم.

چون A و B روی دایره به مرکز M هستند پس M وسط آن‌ها است.

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم نمایید.

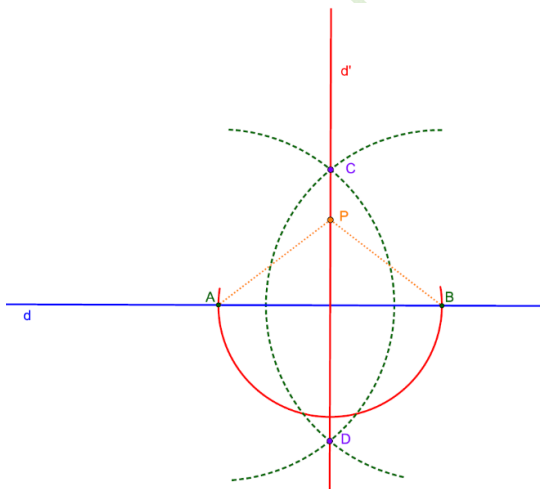
با استفاده از روش رسم عمود منصف که قبلاً توضیح داده شده است رسم می‌کنیم.

۳- عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود است و از نقطه M می‌گذرد.

رسم خط عمود بر یک خط، از یک نقطه غیر واقع بر آن

خط d و نقطه P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه P به یک فاصله باشند.



برای این کار دایره‌ای به مرکز P و شعاع بیش از فاصله P از خط d رسم می‌کنیم تا خط را در دو نقطه A و B قطع کند. واضح است که فاصله P

که مرکز دایره است از A و B به یک اندازه است.

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم نمایید.

عمود منصف AB را به روشی که قبلاً توضیح داده شده رسم می‌کنیم.

۳- آیا عمود منصف پاره خط AB از نقطه P می‌گذرد؟ چرا؟

بله زیرا هر نقطه که روی عمود منصف AB باشد از دو سر این پاره خط به

یک فاصله است و بالعکس و چون فاصله P از دو نقطه A و B

به یک فاصله است پس P نیز روی عمود منصف AB قرار دارد.

عمود منصف پاره خط AB بر خط d عمود است و از نقطه P می‌گذرد.

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن

خط d و نقطه P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱- خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

به روش رسم خط عمود بری یک خط از نقطه‌ی خارج آن از نقطه‌ی P خط d_1 را عمود بر خط d رسم می‌کنیم.

۲- خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

به روش رسم خطی عمود بر یک خط را نقطه‌ی روی خط d_2 را عمود بر خط d_1 رسم می‌کنیم.

۳- خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب در نظر بگیرید)

خط d_2 موازی خط d است. دو خط عمود بر یک خط باهم موازی هستند.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

۱- در شکل مقابل نیم خط Ow نیمساز زاویه vOu است. فرض کنید P یک نقطه دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه vOu یکسان است. (یعنی اگر از نقطه P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها باهم برابر است.)

دو مثلث $\triangle OHP$ و $\triangle OKP$ به حالت وتر و یک زاویه حاده با هم هم‌نهشت هستند. پس بنا بر اجزای متناظر نتیجه می‌گیریم که $PH = PK$.

نتیجه ۱: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

۲- در شکل مقابل فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه vOu یکسان است. نشان دهید که نقطه P روی نیمساز زاویه قرار دارد.

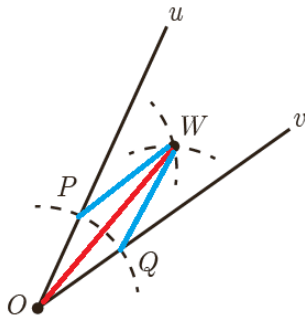
(راهنمایی: پاره خط OP را و دو عمود از نقطه P بر Ov و Ou رسم کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویه vOu است.)

دو مثلث $\triangle OHP$ و $\triangle OKP$ به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه با هم هم‌نهشت هستند.

پس بنا بر اجزای متناظر نتیجه می‌گیریم که $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ پس نقطه P روی نیمساز زاویه است.

نتیجه ۲: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



۳- رسم نیمساز یک زاویه

الف) زاویه uOv را در نظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم خط‌های Ov و Ou را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

- طول پاره خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟

با هم برابرند زیرا شعاع‌های دایره هستند.

ب) دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره خط PQ باز کرده و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند.

طول پاره خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند.

باهم برابرند زیرا شعاع‌های دایره‌اند.

پ) پاره خط‌های WP ، WO و WQ را رسم نمایید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به

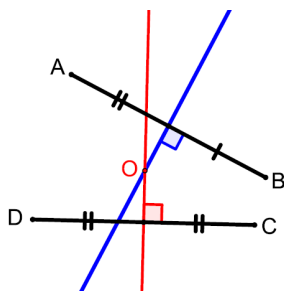
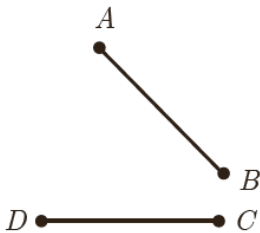
هم چگونه‌اند؟ چرا؟

باهم هم‌نهشت هستند به حالت (ض ض ض)

- اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

این دو زاویه بنا بر اجزای متناظر باهم برابر می‌شوند.

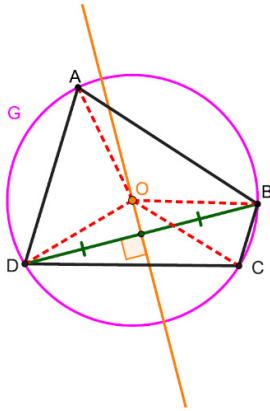
- پاره خط OW نیمساز زاویهٔ uOv است.



تمرین

۱ الف) دو پاره خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ D و C نیز به یک فاصله باشد.

بنا بر خاصیت عمود منصف نقطه‌ای که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد و همچنین نقطه‌ای که از دو نقطه D و C فاصله ثابت دارد روی عمود منصف پاره خط CD قرار دارد. بنا بر این جواب مسئله محل برخورد این دو عمود منصف است.



(ب) نقطه مورد نظر در قسمت (الف) را O می نامیم. اگر نقطه O روی عمود منصف پاره خط BC باشد و G دایره ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رئوس چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

با توجه به بند (الف) :

نقطه O روی عمود منصف AB است بنابراین: (۱) $OA=OB$

نقطه O روی عمود منصف CD است بنابراین: (۲) $OC=OD$

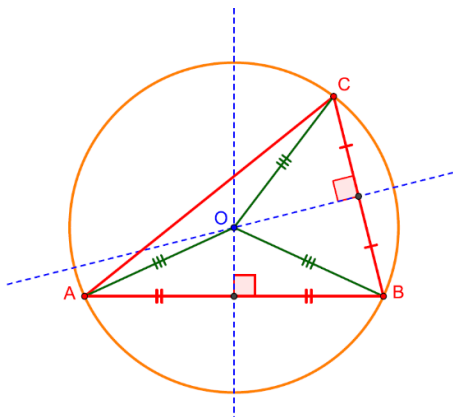
و با توجه به فرض قسمت (ب) نقطه O روی عمود منصف BC است بنابراین: (۳) $OC=OB$

از رابطه های (۱) و (۳) نتیجه می گیریم که: (۴) $OA=OC$

از رابطه ی (۴) و رابطه (۲) نتیجه می گیریم که: $OA=OB=OC=OD$

بنا براین فاصله ی نقاط B ، C و D از نقطه ی O برابر شعاع دایره OA است پس این نقاط روی دایره قرار دارند.

۲ مثلی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. عمود منصف های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



نقاط B و C روی این دایره اند زیرا :

نقطه ی O روی عمود منصف ضلع BC است بنا براین (۱) $OB=OC$

نقطه ی O روی عمود منصف ضلع AB است بنا براین (۲) $OA=OB$

از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که: $OA=OB=OC$ پس نقاط B و C نیز باید روی دایره به شعاع OA باشند.

نکته: این دایره، دایره محیطی مثلث نام دارد و با توجه به مطالب فوق هر مثلث حتما یک دایره ی محیطی دارد. مرکز این دایره محل

برخورد عمود منصف های مثلث است و شعاع آن فاصله ی این نقطه از رأس های مثلث است.

۳ مثلی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

اضلاع مثلث در پای عمودها بر دایره مماس هستند.

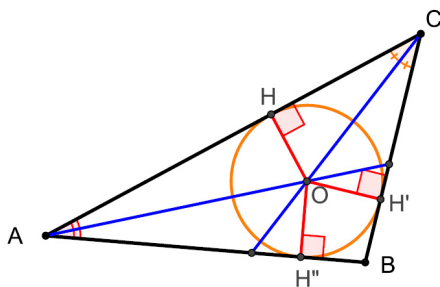
نقطه ی O روی نیمساز زاویه A است پس (۱) $OH=OH'$

نقطه ی O روی نیمساز زاویه C است پس (۲) $OH=OH''$

از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که: $OH'=OH''=OH$

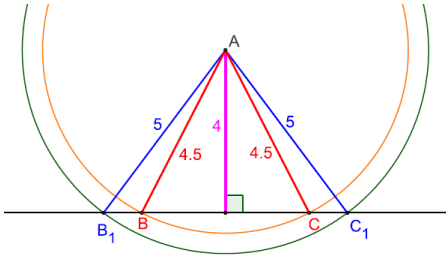
بنا براین $OH'=OH''=OH$ پس نقاط H' و H'' هم روی این دایره قرار دارند و اگر شعاع در نقطه ی تماس با خطی، بر آن عمود

باشد با آن مماس است، پس اضلاع مثلث در این نقاط بر دایره مماس هستند.



نکته: این دایره، دایره محاطی مثلث نام دارد و با توجه به مطالب فوق هر مثلث حتما یک دایره محاطی داخل دارد. که مرکز آن نقطه برخورد نیمساز های داخلی است. و شعاع آن برابر با فاصله ی این نقطه از اضلاع مثلث است.

۴ فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث های زیر را توضیح دهید.

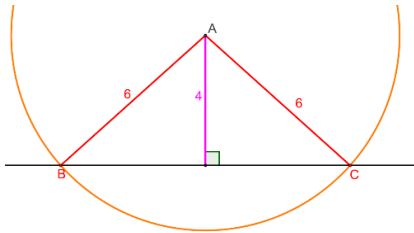


(الف) مثلثی متساوی الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

چون می خواهیم مثلث ABC متساوی الساقین باشد به طوری که $AB=AC$ و ضلع BC روی خط d باشد، پس باید نقاط B و C به فاصله ای مساوی از A و روی خط d باشند.

اگر بخواهیم این نقاط از نقطه ی A به یک فاصله باشند باید به مرکز A و شعاع دلخواه دایره رسم کنیم ولی چون می خواهیم

که این نقاط روی خط d هم باشند بنا براین شعاع این دایره باید بزرگ تر از ۴ سانتی متر باشد زیرا در غیر اینصورت این دایره خط d را در دو نقطه قطع نمی کند.



نکته: می توان بی شمار مثلث متساوی الساقین با این روش رسم کرد.

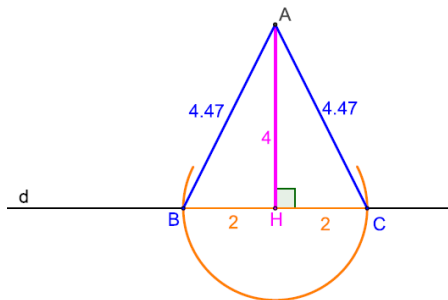
(ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی متر باشد.

برای این منظور کافی است به مرکز A و شعاع ۶ سانتی متر که از ۴ بزرگ تر است

دایره ای رسم کنیم این دایره خط d را در نقاط B و C قطع می کند و مثلث ABC جواب مسئله است.

(پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن 8 cm^2 باشد.

طول ارتفاع ۴ سانتی متر است پس طول قاعده نظیر را می توان حساب کرد.



$$s = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \times 4 \times BC \Rightarrow BC = 4$$

می دانیم در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع و میانه بر هم منطبق هستند بنا براین

پای ارتفاع یعنی نقطه H وسط BC است. پس به مرکز H و شعاع نصف BC (۲ سانتی متر) کمان می زنیم تا نقاط B و C به دست آیند سپس از A به این دو نقطه وصل می کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید. می‌دانیم که هر دو نسبت مساوی یک تناسب تشکیل می‌دهند.

می‌دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دو طرف یک تساوی جمع و یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود. همچنین اگر دو طرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیر صفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار می‌ماند. با توجه به این مطلب هر یک از خواص زیر را به راحتی می‌توان ثابت کرد.

کار در کلاس

۱ با فرض اینکه تمام مخارج مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

$$\text{الف) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

(طرفین وسطین)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow[\text{bd} \neq 0]{\times bd} \cancel{b}d \times \frac{a}{\cancel{b}} = b\cancel{d} \times \frac{c}{\cancel{d}} \Rightarrow ad = bc$$

$$\text{ب) } ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(تبدیل حاصل ضرب به تناسب)

$$ad = bc \xrightarrow[\text{bd} \neq 0]{\div bd} \frac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}} = \frac{\cancel{d}c}{\cancel{d}d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{پ) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

(معکوس کردن تناسب)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \xrightarrow[\text{ac} \neq 0]{\div ac} \frac{\cancel{a}d}{\cancel{a}c} = \frac{b\cancel{c}}{a\cancel{c}} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\text{ت) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \begin{cases} \xrightarrow[\text{ab} \neq 0]{\div ab} \frac{\cancel{a}d}{\cancel{a}b} = \frac{b\cancel{c}}{a\cancel{b}} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \\ \xrightarrow[\text{cd} \neq 0]{\div cd} \frac{a\cancel{d}}{c\cancel{d}} = \frac{b\cancel{c}}{\cancel{c}d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases}$$

(تعویض جای طرفین با وسطین)

$$\text{ث) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \end{cases} \quad (\text{ترکیب نسبت در صورت یا مخرج})$$

راهنمایی: در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \end{cases} \quad \text{معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید.}$$

$$\text{ج) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \\ \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \end{cases} \quad (\text{تفضیل نسبت در صورت یا مخرج})$$

راهنمایی: در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده، سپس از دو طرف عدد ۱ را کم کنید.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} - 1 = \frac{d}{c} - 1 \Rightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{c-d}{c} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \end{cases}$$

۲ با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

$$\text{الف) } \frac{5}{14} = \frac{15}{42} \Rightarrow 5 \times \underline{-42} = 15 \times \underline{-14}$$

$$\text{ب) } 3 \times 40 = 12 \times 10 \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{12}{40}$$

$$\text{پ) } \frac{7}{10} = \frac{21}{30} \Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{30}{21}$$

$$\text{ت) } \frac{6}{11} = \frac{18}{33} \Rightarrow \frac{6}{18} = \frac{11}{33}, \quad \frac{33}{11} = \frac{18}{6}$$

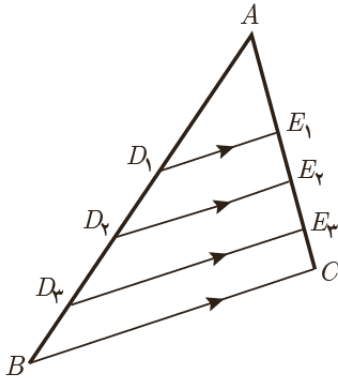
$$\text{ث) } \frac{4}{14} = \frac{10}{35} \Rightarrow \frac{18}{14} = \frac{45}{35}, \quad \frac{4}{18} = \frac{10}{45}$$

$$\text{ج) } \frac{5}{12} = \frac{10}{24} \Rightarrow \frac{-7}{12} = \frac{-14}{24}, \quad \frac{5}{-7} = \frac{10}{-14}$$

استدلال، قضیه تالس و تعمیم آن

در شکل مقابل داریم: $D_1E_1 \parallel BC$ و $D_2E_2 \parallel BC$ و $D_3E_3 \parallel BC$. این اطلاعات را می توان به این صورت نشان داد: $D_iE_i \parallel BC$ برای $1 \leq i \leq 3$

– اندازه پاره خط های زیر را با خط کش مشخص کرده و در کسر ها جایگزین کنید و نسبت های برابر در ستون های متمایز را مشخص نمایید.

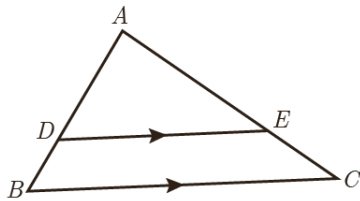


$$\frac{AD_1}{D_1B} = \frac{1/6}{2/4} \longleftrightarrow \frac{AE_1}{E_1C} = \frac{1}{1/5}$$

$$\frac{AD_2}{D_2B} = \frac{2/4}{1/6} \longleftrightarrow \frac{AE_2}{E_2C} = \frac{2}{0/5}$$

$$\frac{AD_3}{D_3B} = \frac{3/2}{0/8} \longleftrightarrow \frac{AE_3}{E_3C} = \frac{1/5}{1}$$

– اگر پاره خط DE مانند شکل روبه رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می زنید نسبت کدام پاره خط ها با هم برابر باشند؟



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

آیا می توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟

خیر نمی توان به طور قطع نتیجه گرفت.

در سال های قبل دیدید که نمی توان به درست بودن نتیجه ای که بر اساس مشاهده چند مورد به دست آمده باشد، مطمئن بود.

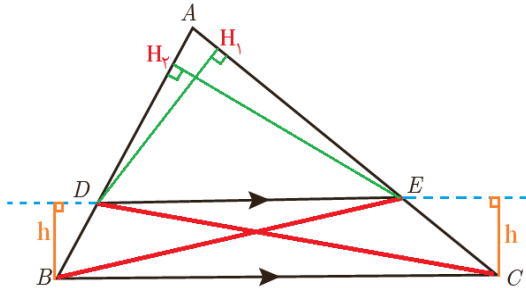
این نوع استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه ای کلی از آن گرفته می شود؛ یعنی «از جزء به کل می رسیم»، استدلال استقرایی نامیده می شود.

استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه گیری منطقی بر پایه واقعیت هایی که درستی آنها را پذیرفته ایم، بیان می شود.

در ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌اید، با مواردی از استدلال‌های استنتاجی مواجه شده‌اید. در ادامه با استدلال استنتاجی، نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به دست آوردیم، ثابت خواهیم کرد.

قضیه تالس

فعالیت



فرض کنید مانند شکل مقابل پاره خط DE موازی ضلع BC باشد.

$$\text{می‌خواهیم نشان دهیم: } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

۱ از نقطه D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابری دارند. چرا؟

ارتفاع‌های نظیر قاعده DE را در دو مثلث DEC و DEB رسم می‌کنیم. با توجه به شکل می‌دانیم که فاصله بین دو خط موازی

$$\left. \begin{aligned} S_{DEC} &= \frac{1}{2} h \cdot DE \\ S_{DEB} &= \frac{1}{2} h \cdot DE \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{DEC} = S_{DEB}$$

۲ از نقطه E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را H_1 بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را H_2 بنامید.

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2} EH_1 \times AD}{\frac{1}{2} EH_1 \times DB} = \frac{AD}{DB} \quad ۳$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{1}{2} DH_2 \times AE}{\frac{1}{2} DH_2 \times EC} = \frac{AE}{EC} \quad ۴$$

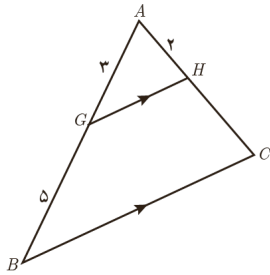
۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. چرا؟

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} &= \frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} &= \frac{AE}{EC} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{S_{DEB}=S_{DEC}} \left. \begin{aligned} \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} &= \frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} &= \frac{AE}{EC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند، قضیه نامیده می‌شوند.

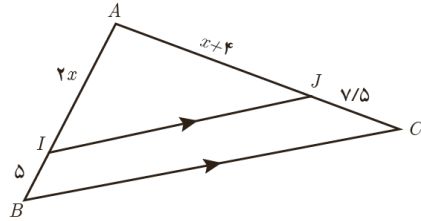
نتیجه بالا قضیه‌ای از تالس^۱ است. همان‌گونه که مشاهده کردید، رابطه بین طول‌های پاره‌خط‌هایی را که توسط خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، بر دو ضلع دیگر آن مثلث به وجود می‌آید، بیان می‌کند.

۱- فیلسوف و ریاضی‌دان که حدود ۶۲۳ سال قبل از میلاد در نواحی غرب ترکیه امروزی به دنیا آمد. اثبات بسیاری از قضایای مهم هندسی را به او نسبت داده‌اند.



۱ در شکل پاره خط‌های GH و BC موازی اند. اندازه پاره خط‌های AC و HC را به دست آورید.

$$\frac{AG}{GB} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{2}{HC} \Rightarrow HC = \frac{10}{3}$$



۲ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازه پاره خط‌های AI و AJ را به دست آورید.

$$\frac{AI}{IB} = \frac{AJ}{JC} \Rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{x+4}{7/5} \Rightarrow 15x = 5x + 20 \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2$$

تعمیم قضیه تالس

فعالیت

۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

الف) تناسب قضیه تالس را بنویسید.

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{DB+AD} = \frac{AE}{EC+AE} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

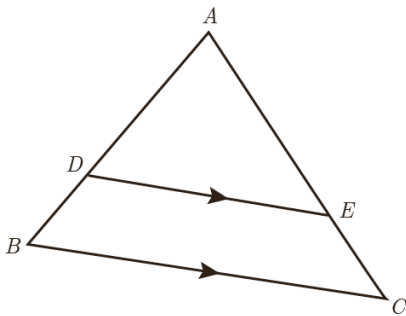
پ) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD-AB}{AB} = \frac{AE-AC}{AC} \Rightarrow \frac{-DB}{AB} = \frac{-EC}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

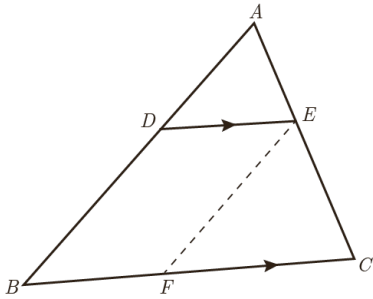
توجه کنید که تناسب‌های به دست آمده در (ب) و (ج) صورت‌های دیگر قضیه تالس اند.

۲ در مثلث ABC پاره خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسب قضیه تالس را

بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیه تالس نتیجه بگیرید.



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{DB}{DA} = \frac{EC}{AE} \cdot \frac{BD}{BA} = \frac{EC}{CA} \cdot \frac{AB}{BD} = \frac{CA}{CE} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \end{cases}$$



الف) در شکل پاره خط‌های DE و BC موازی اند. با توجه به قضیه تالس داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

ب) پاره خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم: $\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC}$

پ) با توجه به قسمت‌های الف) و ب) داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$

ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی ای است؟

بنابه فرض $DE \parallel BF$ و $DB \parallel EF$ پس بنا به تعریف چهارضلعی $DEFB$ متوازی الاضلاع است.

پاره خط BF با کدام پاره خط برابر است؟ $BF = DE$

ث) با توجه به قسمت‌های ج) و د) داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

این رابطه تعمیم قضیه تالس است.

کار در کلاس

در شکل پاره خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{PQ}{BC}$ ❌

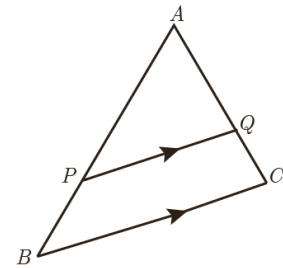
ب) $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$ ✅

پ) $\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AQ}$ ❌

ت) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC} = \frac{PQ}{BC}$ ❌

ث) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC}$ ✅

ج) $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$ ✅



اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

در مثال‌های زیر قضیه و عکس آن آمده است.

مثال ۱:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهاش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

مثال ۲:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

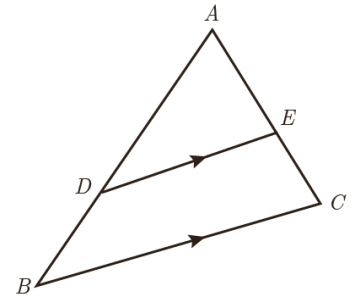
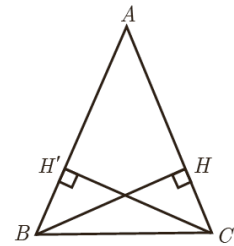
فرض: $AB=AC$

حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$



مثال ۳: در قضیه تالس فرض و حکم به صورت زیر است.

فرض: $DE \parallel BC$

حکم: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیه تالس را بنویسید.

فرض: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

حکم: $DE \parallel BC$

به عبارت دیگر عکس قضیه تالس می‌گوید هرگاه پاره خط DE مانند شکل پاره خط‌های AB و AC را به گونه‌ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ، در این صورت پاره خط DE موازی پاره خط BC است. به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟ کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت.

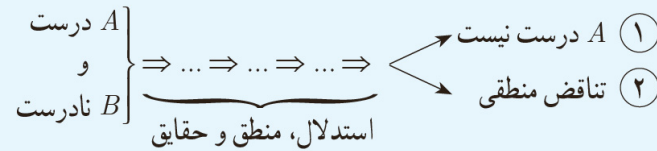
معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم در عکس آن ثابت باشند؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می‌شود، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. در برهان خلف به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجه غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

B (حکم) $\Rightarrow A$ (فرض): مسئله

اثبات به روش برهان خلف:



پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

مثال: اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

حل:

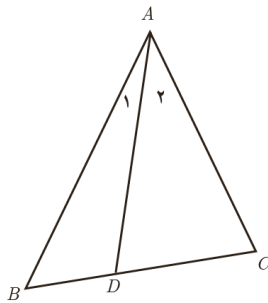
با استفاده از برهان خلف فرض کنیم مسئله نادرست باشد؛ یعنی عددی فرد نباشد؛ بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می‌توان نوشت $n = 2k$ به طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض است؛ لذا از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد.

مثال: فرض کنیم AD نیمساز زاویه A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آن‌گاه $AB \neq AC$.

حل:

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.



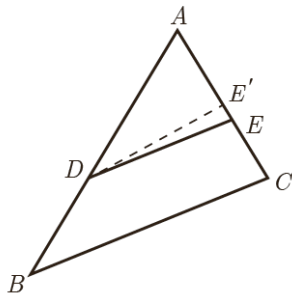
بنابراین داریم $AB = AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (چرا؟). از این هم‌نهستی نتیجه خواهد شد $BD = DC$ است، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا $AB = AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB \neq AC$ است.

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \text{ (فرض خلف)} \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ AD = AD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض)}} \triangle ABD \cong \triangle ACD$$

پاسخ چرا:

حال می‌خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیه تالس را ثابت کنیم.

عکس قضیه تالس: مانند شکل مقابل در مثلث ABC ، اگر $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ ، آن‌گاه $DE \parallel BC$.

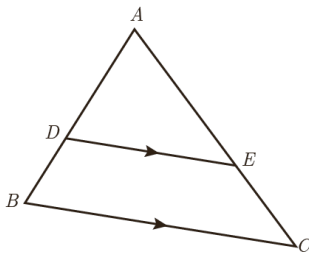


اثبات: با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله غلط باشد؛ یعنی $DE \not\parallel BC$.
 لذا از نقطه D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. طبق قضیه تالس داریم $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AD}{DB}$ و از مقایسه با فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$.
 حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE}{AC} = \frac{AE'}{AC}$ و در نتیجه $AE = AE'$. این یعنی نقطه E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است، زیرا $DE' \parallel BC$ و $DE \not\parallel BC$ است. بنابراین از ابتدا فرض غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی‌تواند غلط باشد، یعنی $DE \parallel BC$ است.

قضیه‌های دو شرطی

همان‌گونه که دیدیم، قضیه تالس و عکس آن هر دو درست‌اند؛ بنابراین برای مثلی مانند $\triangle ABC$ در شکل مقابل می‌توان هر دوی آنها را به صورت زیر بیان کرد:

اگر $DE \parallel BC$ ، آن‌گاه $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ و برعکس.



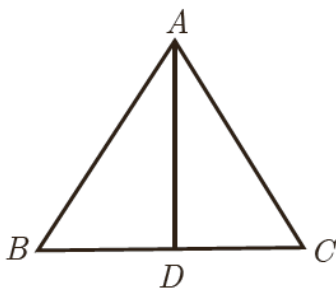
چنین قضیه‌هایی را قضیه‌های دو شرطی می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را با نماد \Leftrightarrow (که اگر و تنها اگر خوانده می‌شود) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیه فوق و عکس آن را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

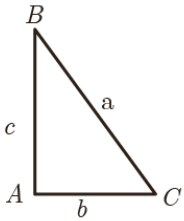
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow DE \parallel BC$$

در ادامه مثال‌هایی از قضایای دو شرطی ملاحظه خواهید کرد.

مثال: در یک مثلث دو ضلع برابرند؛ اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آنها باهم برابر باشند.



مثال: در مثلث متساوی‌الاضلاع یک پاره‌خط نیمساز است؛ اگر و تنها اگر میانه باشد.



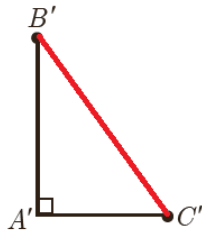
با توجه به قضیه فیثاغورس اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC ، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.
الف) عکس این قضیه را بنویسید.

اگر در مثلث ABC ، $a^2 = b^2 + c^2$ آنگاه مثلث در رأس A قائمه است.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱- فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه اضلاع آن برقرار است.

۲- پاره خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ است.



۳- با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

$$\left. \begin{aligned} B'C'^2 &= A'C'^2 + A'B'^2 \\ &\xrightarrow{\substack{A'B'=c \\ A'C'=b}} B'C'^2 = b^2 + c^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B'C'^2 = a^2 \Rightarrow B'C' = a$$

۴- توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

$$\left. \begin{aligned} A'B' &= AB \\ A'C' &= AC \\ B'C' &= BC \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$$

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کنید.

فرض کنیم ABC یک مثلث باشد در اینصورت: $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow A = 90^\circ$

مثلث قائم الزامیه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع برابر با مجموع مربع های دو ضلع دیگر باشد.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که در پایه‌های قبل نیز تا حدودی با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. اگر فردی ادعا کند که «همه اعداد فرد، اول اند»، این یک حکم کلی درباره تمام اعداد فرد است و ارائه عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است، برای رد این ادعا کافی است. به چنین مثالی که برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود، مثال نقض می‌گوییم. به عنوان مثالی دیگر؛ فرض کنیم فردی ادعا کند که «هیچ فرد ایرانی‌ای تا به حال مدال

فیلدز 'نگرفته است'. در این صورت شما برای رد ادعای او چه می‌توانید بگویید؟ اگر شما حتی یک فرد ایرانی را که مدال فیلدز گرفته است، برای او مثال بزنید، در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض، ادعای او را باطل کرده‌اید.

با دقت در ادعای مطرح شده خواهیم دید که کلمه «هیچ» در این حکم باعث می‌شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعه افراد ایرانی است) باشد. بنابراین در این مورد نیز آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد.

در ادامه نمونه‌هایی از حکم‌های کلی آمده‌اند.

الف) همه اعداد اول فردند. (حکم کلی درباره تمام اعداد اول)

ب) «در هر مستطیل اندازه قطر‌ها باهم برابر است.» (حکم کلی درباره تمام مستطیل‌ها)

پ) «به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت n^2+n+41 عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

درباره درستی یا نادرستی حکم «الف» چه حدسی می‌زنید؟ چگونه می‌توانید حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی «الف» با ارائه همین مثال نقض رد می‌شود. درباره درستی یا نادرستی حکم‌های «ب» و «پ» چه حدس‌هایی می‌زنید؟ آیا می‌توانید برای آنها مثال نقض بیابید و آنها را باطل کنید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض ارائه کنیم، درباره درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در این حالت درستی حکم را باید پذیرفت؟

برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم».

درباره گزینه (پ) چه می‌توان گفت؟

$$n = 41 \Rightarrow 41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 2) = 41 \times 43$$

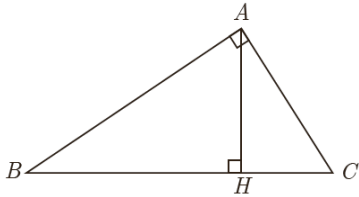
اگر فرض کنیم که $n = 41$ آنگاه داریم:

که حاصل دیگر عدد اول نیست پس $n = 41$ یک مثال نقض برای رد این حکم کلی است.

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی بر ما مشخص نباشد و برای رد آن، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی‌توان درباره درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

۱- مدال یا نشان فیلدز (Fields medal) جایزه‌ای است که به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدز هر چهار سال یک‌بار به ریاضی‌دانان جوان (کمتر از ۴۰ سال) که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند تعلق می‌گیرد. از آنجا که در رشته ریاضی جایزه نوبل اهدا نمی‌شود، این جایزه را «نوبل ریاضیات» می‌خوانند. در سال ۲۰۱۴ نشان فیلدز به ریاضی‌دان ایرانی خانم مریم میرزاخانی تعلق گرفت. گفتنی است که میرزاخانی اولین زنی در دنیاست که موفق به گرفتن این نشان شده است. البته با تأسف تمام موقع تدوین کتاب خبر درگذشت ایشان، جهان علم و جامعه ایرانی را سخت متأثر ساخت، روانش شاد

۱ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم الزاویه ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به دست آورید.



$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AH \cdot BC \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC}$$

۲ در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به دست آورید.

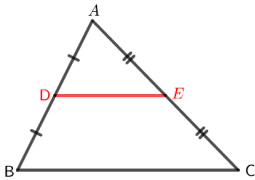
الف) $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{\lambda+b} \Rightarrow \frac{a}{10+a-a} = \frac{b}{\lambda+b-b} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{\lambda} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{\lambda}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a \pm nb}{b} = \frac{c \pm nd}{d} \\ \frac{a}{b \pm na} = \frac{c}{d \pm nc} \end{cases}$$

نکته: می توان ثابت کرد:

ب) $\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b} \Rightarrow \frac{3a+10-(10+2a)}{10+2a} = \frac{3b+7-(7+2b)}{7+2b} \Rightarrow \frac{a}{10+2a} = \frac{b}{7+2b}$
 $\Rightarrow \frac{a}{10+2a-2a} = \frac{b}{7+2b-2b} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{7} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{10}{7}$

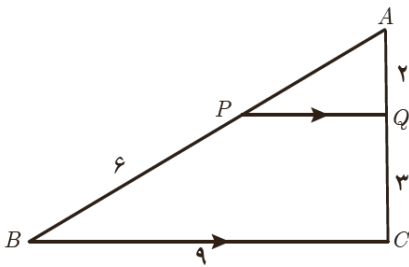
۳ ثابت کنید در هر مثلث پاره خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.



$$\left. \begin{aligned} AD = DB &\Rightarrow \frac{AD}{DB} = 1 \\ AE = EC &\Rightarrow \frac{AE}{EC} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} DE \parallel BC$$

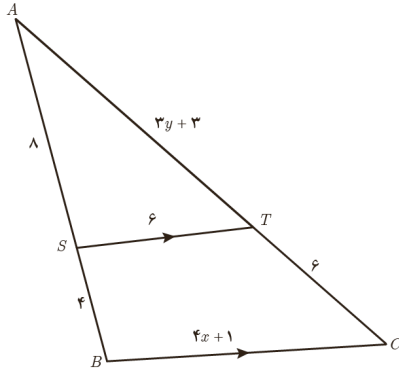
$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \xrightarrow{\substack{AB=2AD \\ AC=2AE}} \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DE = \frac{1}{2} BC$$

۴ در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است. طول پاره خط‌های PQ و AP را به دست آورید.



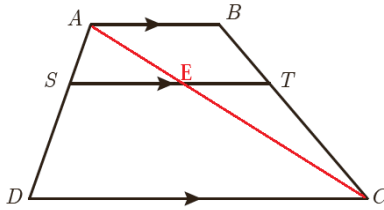
$$PQ \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{6-AP} = \frac{2}{3} \Rightarrow AP = 2 \\ \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{PQ}{9} \Rightarrow PQ = \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

۵ در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را به دست آورید.



$$ST \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AS}{SB} = \frac{AT}{TC} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{3y+3}{6} \Rightarrow 2 = \frac{y+1}{2} \Rightarrow y+1=4 \Rightarrow y=3 \\ \frac{AS}{AB} = \frac{ST}{BC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{6}{4x+1} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{6}{4x+1} \Rightarrow 8x+2=18 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

۶ در ذوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید: $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$. (راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ACD: SE \parallel DC \Rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{AE}{EC} \\ \triangle ABC: TE \parallel AB \Rightarrow \frac{BT}{TC} = \frac{AE}{EC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$$

۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل باهم برابرند.

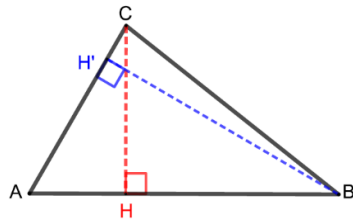
اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل باهم برابر باشند، در این صورت اضلاع مقابل موازی هستند.

پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل یکدیگر باشند، در این صورت رأس‌های چهارضلعی روی یک دایره قرار دارند.

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع ناهم‌راستا باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر».

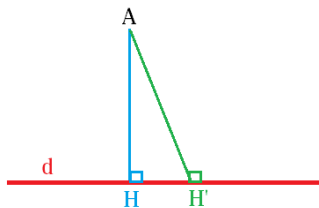
(راهنمایی: شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)



در مثلث ABC ، اگر $AB > AC$ آنگاه $CH < BH'$

به عبارتی: $AB > AC \Rightarrow CH < BH'$

۸ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.



خط d و نقطه A خارج آن را در نظر می‌گیریم. از نقطه A عمود AH را رسم می‌کنیم.

با استفاده از برهان خلف، فرض می‌کنیم که از نقطه A می‌توانیم خط دیگری مانند AH' را

برخط d عمود کنیم (فرض خلف). بنا براین در مثلث AHH' ، $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ ؛ ولی با توجه

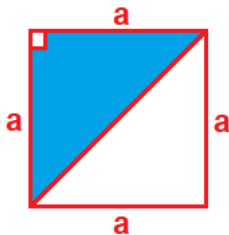
به این که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است، به تناقض می‌رسیم، پس از ابتدا

فرض غلط بودن حکم نادرست بوده و حکم نمی‌تواند غلط باشد. به عبارتی فرض خلف باطل و حکم مسئله ثابت می‌شود.

۹ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

عدد ۱۳۱، اول است و از ۱۲۷ بزرگ‌تر است. پس این حکم کلی با این مثال نقض رد می‌شود.



ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

مساحت مربع در شکل مقابل a^2 است اما مساحت مثلث قائم‌الزاویه رنگی $\frac{a^2}{2}$ است.

$a^2 < \frac{a^2}{2}$ پس با این مثال نقض حکم کلی فوق رد می‌شود.

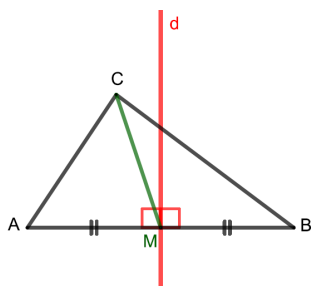
پ) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع با طول ضلع مثلث برابر است. با این مثال نقض این حکم کلی رد می‌شود.

ت) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.

در مثلث ABC شکل مقابل خط d عمود منصف ضلع AB و CM میانه ضلع AB است ولی

برهم منطبق نیستند.

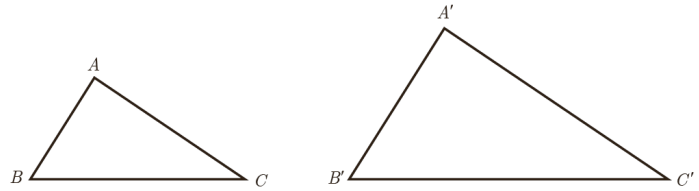


درس سوم

تشابه مثلث‌ها

در پایه نهم با مفهوم تشابه آشنا شدید. با توجه به مفهوم تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد؛ یعنی

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \text{ و } \hat{B} = \hat{B}' \text{ و } \hat{C} = \hat{C}' \\ \text{و} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



در این صورت نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم. مثلاً اگر $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3}$ باشد، می‌گوییم مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\frac{2}{3}$ ، متشابه است. در این صورت مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{3}{2}$ ، متشابه خواهد بود.

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

اثبات:

$$1- \text{داریم } \hat{D} = \hat{B} \text{ و } \hat{E} = \hat{C} \text{ (چرا؟)} \quad \begin{cases} \hat{D} = \hat{B} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی - مورب } AB} \\ \hat{E} = \hat{C} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی - مورب } AC} \end{cases} \Rightarrow DE \parallel BC$$

بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

۲- با توجه به قضیه تالس داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

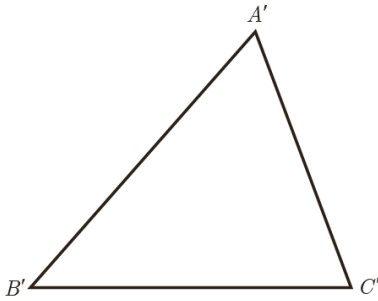
۳- با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

با استفاده از قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیه بعد را که **حالت‌های تشابه دو مثلث** را بیان می‌کنند، اثبات کرد. از آنجا که اثبات این قضیه‌ها مدنظر نیست، در ادامه تنها صورت آنها بیان شده است.

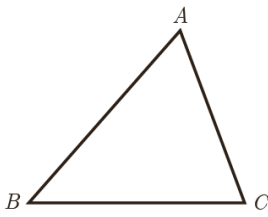
قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{A} = \hat{A}' \text{ و } \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C')$$



قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \right)$$



قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

کار در کلاس

۱ در شکل مقابل $BC \parallel DE$.

اندازه پاره خط‌های CA و DE را به دست آورید.

بنا بر قضیه خطوط موازی $BC \parallel DE$ و BD مورب پس $\hat{B} = \hat{D}$

بنا بر قضیه خطوط موازی $BC \parallel DE$ و CE مورب پس $\hat{C} = \hat{E}$

پس بنا بر قضیه (۱) تشابه دو مثلث ABC و ADE به حالت برابر بودن دو زاویه با هم متشابه‌اند. در نتیجه می‌توانیم برای آن‌ها

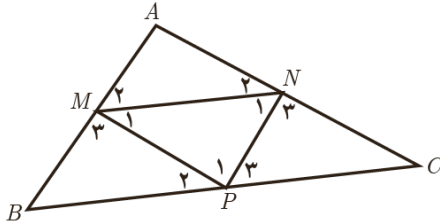
$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{AC}{18} = \frac{33}{22} = \frac{21}{DE} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AC}{18} = \frac{33}{22} \Rightarrow AC = 27 \\ \frac{33}{22} = \frac{21}{DE} \Rightarrow DE = 14 \end{cases}$$

نسبت تشابه بنویسیم:

۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند.

حل:

الف) $MN \parallel BC$ و $NP \parallel AB$ و $MP \parallel AC$ چرا؟



قبلاً ثابت کرده ایم که هر گاه پاره خطی وسط دوضلع مثلث را به هم وصل کند با ضلع سوم موازی و نصف آن است.

ب) بنابراین $\hat{M}_1 = \hat{P}_1 = \hat{C}$ و $\hat{N}_1 = \hat{P}_1 = \hat{B}$ (چرا؟)

بنا بر قضیه خطوط موازی $MN \parallel BC$ و NP مورب پس $\hat{N}_1 = \hat{P}_1$ (۱)

همچنین $MN \parallel BP$ و $MB \parallel NP$ پس چهارضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است در نتیجه: $\hat{N}_1 = \hat{B}$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $\hat{N}_1 = \hat{P}_1 = \hat{B}$

بنا بر قضیه خطوط موازی $MN \parallel BC$ و MP مورب پس $\hat{M}_1 = \hat{P}_1$ (۳)

همچنین $MN \parallel PC$ و $MP \parallel NC$ پس چهارضلعی $MNPC$ متوازی الاضلاع است در نتیجه: $\hat{M}_1 = \hat{C}$ (۴)

از (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم: $\hat{M}_1 = \hat{P}_1 = \hat{C}$

از (ب) دربارهٔ مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$\hat{N}_1 = \hat{B}$ و $\hat{M}_1 = \hat{C}$ پس بنا بر قضیه ۱ تشابه این دو مثلث متشابه‌اند.

۳ اگر سه مثلث ABC و $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $\hat{A}BC \sim \hat{A}'B'C'$

و $\hat{A}'B'C' \sim \hat{A}''B''C''$ ، دربارهٔ دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

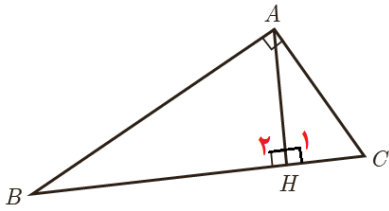
اگر $\hat{A}BC \sim \hat{A}'B'C'$ پس بنا به تعریف تشابه دو مثلث زوایای نظیر باهم برابرند: $\hat{A} = \hat{A}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$ (۱)

اگر $\hat{A}'B'C' \sim \hat{A}''B''C''$ پس بنا به تعریف تشابه دو مثلث زوایای نظیر باهم برابرند: $\hat{A}' = \hat{A}''$ ، $\hat{B}' = \hat{B}''$ و $\hat{C}' = \hat{C}''$ (۲)

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $\hat{A} = \hat{A}''$ ، $\hat{B} = \hat{B}''$ پس بنا بر قضیه (۱) تشابه داریم: $\hat{A}BC \sim \hat{A}''B''C''$.

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

فعالیت



فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.

۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHC$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{H}_1 = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قضیه (۱) تشابه}} \triangle ABC \sim \triangle AHC$$

۲ نشان دهید دو زاویه مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید:

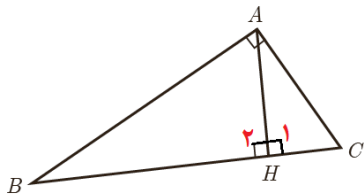
$$\triangle ABC \sim \triangle AHB$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قضیه (۱) تشابه}} \triangle ABC \sim \triangle AHB$$

۳ از (۱) و (۲) درباره مثلث‌های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با توجه به کار در کلاس قبلی نتیجه می‌شود که $\triangle AHB \sim \triangle AHC$

نتیجه: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.



$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^2 = HC \times BC$$

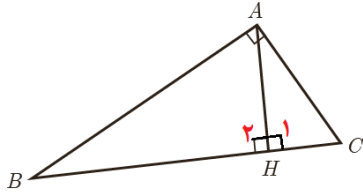
$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^2 = HB \times BC$$

$$\triangle AHB \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{AB} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB \times HC$$

۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطه فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

$$AC^2 + AB^2 = HC \times BC + HB \times BC = BC(\underbrace{HC + HB}_{BC}) = BC \times BC \Rightarrow AC^2 + AB^2 = BC^2$$

۸ مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.



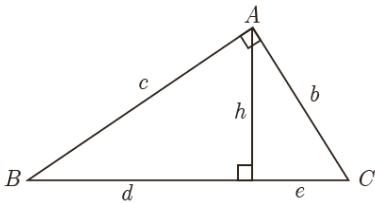
$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AH \cdot BC \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$AB \times AC = AH \times BC$

کار در کلاس

در مثلث قائم الزاویه مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

$e=? \quad d=7 \quad h=5$ ۱



$h^2 = de \Rightarrow 25 = 7e \Rightarrow e = \frac{25}{7}$

$c=? \quad b=? \quad e=3 \quad d=5$ ۲

$c^2 = d(d+e) \Rightarrow c^2 = 5(5+3) = 40 \Rightarrow c = 2\sqrt{10}$

$b^2 = e(d+e) \Rightarrow b^2 = 3(5+3) = 24 \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$

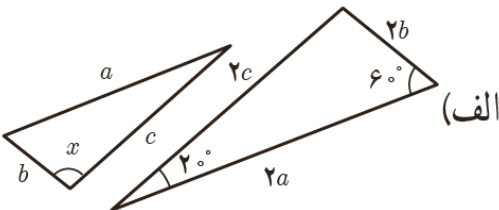
$h=? \quad b=6 \quad c=8$ ۳

$BC = \sqrt{36 + 64} = 10$

$bc = h \cdot BC \Rightarrow 6 \times 8 = 10 \cdot h \Rightarrow h = \frac{48}{10}$

تمرین

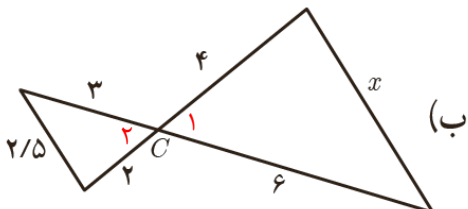
۱ در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.



بنا بر این دو مثلث بنا بر قضیه (۳) تشابه، متشابه اند. $\frac{2a}{a} = \frac{2b}{b} = \frac{2c}{c} = 2$

اندازه زاویه سوم در مثلث بزرگ تر با توجه به مجموع زوایای داخلی، 100°

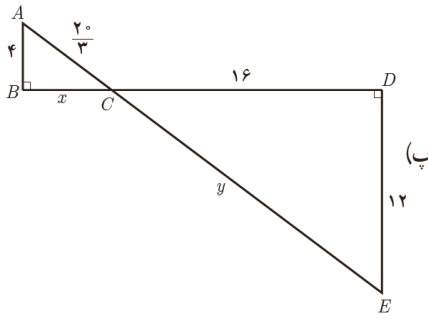
است. پس $x = 100^\circ$



بنا بر این دو مثلث بنا بر قضیه (۲) تشابه، متشابه اند. $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = 2, \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

$\frac{x}{2/5} = 2 \Rightarrow x = 5$

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی



$\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ و $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ بنا براین دو مثلث بنا بر قضیه (۱) تشابه، متشابه اند.

$$\frac{16}{x} = \frac{y}{20} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{16}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{16}{3} \\ \frac{y}{20} = 3 \Rightarrow y = 20 \end{cases}$$

۲ در مثلث قائم الزاویه روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به دست آورید.

الف) $AC = ?$ و $AB = ?$ و $AH = ?$ و $BH = 9$ و $BC = 10$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow AB^2 = 9 \times 10 = 90 \Rightarrow AB = 3\sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} \Rightarrow AC = \sqrt{100 - 90} \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$

$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow 3\sqrt{10} \times \sqrt{10} = AH \times 10 \Rightarrow AH = 3$$

ب) $AB = ?$ و $AH = ?$ و $BC = ?$ و $CH = 2$ و $AC = 5$

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow 25 = 2 \times BC \Rightarrow BC = \frac{25}{2}$$

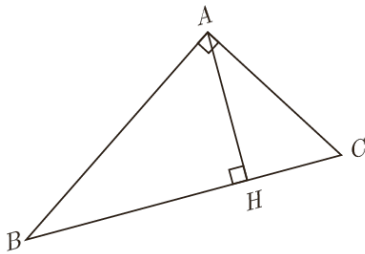
$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{625}{4} - 25} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{525}{4}} = \frac{5\sqrt{21}}{2}$$

$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow \frac{5\sqrt{21}}{2} \times 5 = AH \times \frac{25}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{21}$$

پ) $AH = ?$ و $BC = ?$ و $AC = 6$ و $AB = 8$

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} \Rightarrow BC = \sqrt{36 + 64} \Rightarrow BC = 10$$

$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow 8 \times 6 = AH \times 10 \Rightarrow AH = \frac{48}{10}$$

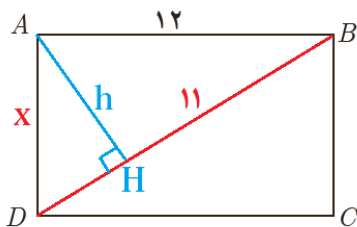


ت) $AC = ?$ و $BC = ?$ و $BH = ?$ و $AH = 6$ و $AB = 12$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} \Rightarrow BH = \sqrt{144 - 36} \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 144 = 6\sqrt{3} \times BC \Rightarrow BC = 8\sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} \Rightarrow AC = \sqrt{192 - 144} = \sqrt{48} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$



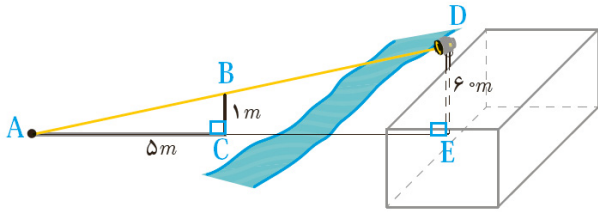
۳ شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطه A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازه عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازه عرض مستطیل را محاسبه کنید.

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} \Rightarrow h = \sqrt{144 - 121} \Rightarrow h = \sqrt{23}$$

$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 144 = 11 \times BD \Rightarrow BD = \frac{144}{11}$$

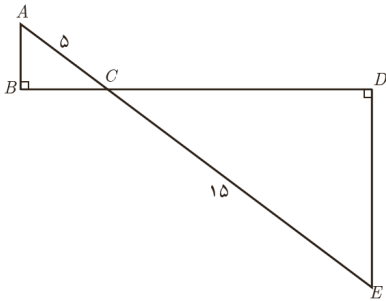
$$AD \times AB = AH \times BD \Rightarrow x = \frac{\sqrt{23} \times \frac{144}{11}}{12} \Rightarrow x = \frac{12}{11} \sqrt{23}$$

۴ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟



پس بنا بر قضیه اول تشابه $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ در نتیجه داریم:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{5}{AE} = \frac{1}{60} \Rightarrow AE = 300 \text{ m}$$



۵ در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به دست آورید.

پس بنا بر قضیه اول تشابه $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ در نتیجه داریم:

$$\frac{DC}{BC} = \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \frac{DC \times DE}{BC \times AB} = \frac{DC}{BC} \times \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = 3 \times 3 \Rightarrow \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = 9$$

می‌توان ثابت کرد اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$

$$\frac{P_{CDE}}{P_{ABC}} = \frac{DC+DE+CE}{BC+AB+AC} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{P_{CDE}}{P_{ABC}} = \frac{15}{5} \Rightarrow \frac{P_{CDE}}{P_{ABC}} = 3$$

۶ دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید؛ به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$ باشد. حال

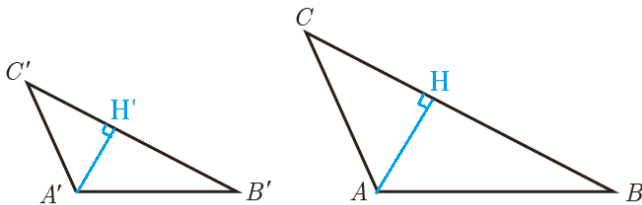
ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید.

الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.

بنا به فرض $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ پس بنا بر قضیه اول تشابه

در نتیجه داریم: $\triangle ABH \sim \triangle A'B'H'$

ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به دست آورید.



$$\frac{CH}{C'H'} = \frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = k \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = k$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AH \times BC}{A'H' \times B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \times \frac{BC}{B'C'} = k \times k \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$$

با توجه به نسبت تشابه دو مثلث و فرض مسئله داریم:

ب) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید

ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به دست آورید.

می‌توان ثابت کرد اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{BC+AB+AC}{B'C'+A'B'+A'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = k \quad \text{ثابت کنید:}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a+c}{b+d} = k \Rightarrow a+c = k(b+d) \\ \frac{e}{f} = k \Rightarrow e = kf \end{array} \right\} \Rightarrow a+c+e = k(b+d) + kf \Rightarrow a+c+e = k(b+d+f) \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = k$$

پاییز ریاضی