فصل سوم

چندضلعی ها

چندضلعی ها

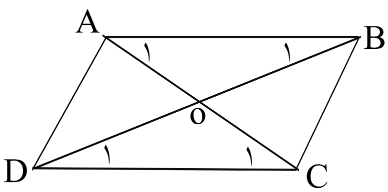
مساحت

۱ - با استفاده از استدلال استنتاجی، نشان دهید که در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

فرض کنیم O نقطه‌ی تلاقی اقطار متوازی‌الاضلاع ABCD باشد.

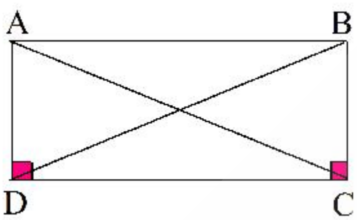
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AB \parallel CD \\ \text{مورب } AC\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \left.\begin{array}{l}AB \parallel CD \\ \text{مورب } BD\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AB = CD \text{ اضلاع مقابل متوازی الاضلاع مساویند}\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{O}B \cong D\overset{\triangle}{O}C \Rightarrow \begin{cases}OA = OC \\ OB = OD\end{cases}$$

(ز ض ز)



بنابراین در متوازی الاضلاع اقطار منصف یکدیگرند.

۲ - نشان دهید که در هر مستطیل، قطرها با هم مساوی هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند.



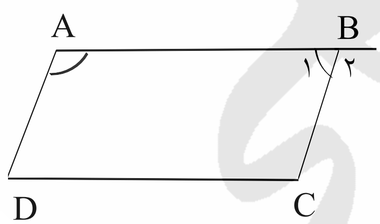
(ض ز ض)

ا ض لا ع م ق ا ب ل م س ت ط ی ل م س ا و ی ن د

بنابراین در مستطیل قطرها مساویند. در ضمن مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است پس قطرهای مستطیل منصف یکدیگرند.

۳ - ثابت کنید که اگر در یک چهار ضلعی زاویه‌های مقابل دو به دو متساوی باشند، چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

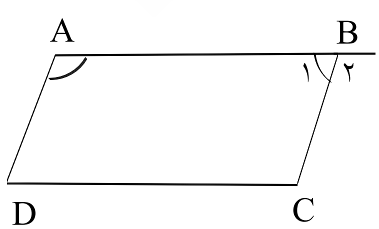
فرض کنید در چهارضلعی ABCD داشته باشیم $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$، مجموع زوایای هر چهارضلعی ۳۶۰° است. داریم:



$$\hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰ \Rightarrow ۲\hat{A} + ۲\hat{B}_1 = ۳۶۰ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B}_1 = ۱۸۰^\circ$$

از طرفی $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = ۱۸۰^\circ$ بنابراین $\hat{A} = \hat{B}_2$ در نتیجه $AD \parallel BC$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $AB \parallel DC$ پس ABCD متوازی‌الاضلاع است.

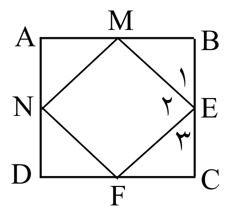
۴ - ثابت کنید که اگر در یک چهار ضلعی هر دو زاویه‌ی مجاور به یک ضلع، مکمل یکدیگر باشند، چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.



با توجه به فرض $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B}_1 = ۱۸۰^\circ$

از طرفی $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = ۱۸۰^\circ$ بنابراین $\hat{A} = \hat{B}_2$ در نتیجه $AD \parallel BC$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $AB \parallel DC$. پس چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۵ - ثابت کنید هر گاه وسطهای اضلاع مربعی را متوالیاً به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک مربع می‌باشد.



فرض: $ABCD$ مربع و M و E و F و N وسط اضلاع

حکم: $MEFN$ مربع

برهان: بنا به فرض $\left.\begin{array}{l} MB = BE \\ \hat{B} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{MBE}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $\Rightarrow \hat{E}_۱ = ۴۵^\circ$

بنا به فرض $\left.\begin{array}{l} CE = CF \\ \hat{C} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CEF}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $\Rightarrow \hat{E}_۳ = ۴۵^\circ$

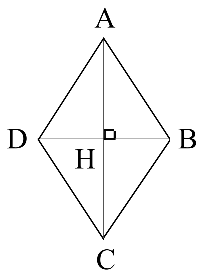
$\hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ + \hat{E}_۳ = ۱۸۰^\circ$ نیم صفحه است $\hat{E} \Rightarrow \hat{E}_۲ = ۹۰^\circ$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد زاویه‌های M و N و F هم ۹۰° هستند.

$\widehat{MBE} \cong \widehat{CFE}$ (ض ز ض) $\Rightarrow ME = EF$ اجزای نظیر

چهارضلعی که همه‌ی زوایای آن قائمه باشند و دو ضلع مجاورش برابر باشند مربع است.

۶ - نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن برهم عمود باشند، لوزی است.



فرض:

$AB \parallel CD,\ AD \parallel BC,\ AC \perp BD$

حکم:

$AB = BC = CD = DA$

برهان: قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یک‌دیگر را نصف می‌کنند و از طرف دیگر $AC \perp BD$ پس در ΔABD، AH عمودمنصف ضلع BD است. لذا مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد. به طریق مشابه در ΔABC نیز BH عمودمنصف ضلع AC می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$AB = BC = CD = DA$ پس چهارضلعی $ABCD$ لوزی است.

۷ - گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.

الف) ذوزنقه چهارضلعی است که:

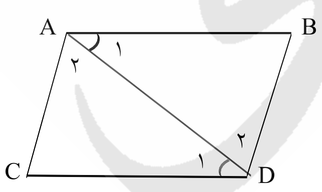
۱) دو ضلع آن موازی باشد. ۲) دو قطر آن موازی باشد.

ب) n ضلعی را مقعر گوییم هرگاه با امتداد دادن یک ضلع آن تغییری ندارد بقیه نقاط چندضلعی:

۱) در یک طرف خط واقع شوند. ۲) در دو طرف خط واقع شوند.

الف) گزینه‌ی ۱ ب) گزینه‌ی ۲

۸ - ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند.



$ABDC$ یک متوازی‌الاضلاع است. نشان می‌دهیم: $\angle C = \angle B$ و $\angle A = \angle D$

قطر AD را رسم کرده و ثابت می‌کنیم $\angle C = \angle B$ است.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD ,\ AD \text{ مورب} \Rightarrow \angle A_۱ = \angle D_۱ \\ AC \parallel BD ,\ AD \text{ مورب} \Rightarrow \angle A_۲ = \angle D_۲ \\ AD = AD \end{array}\right\}$$

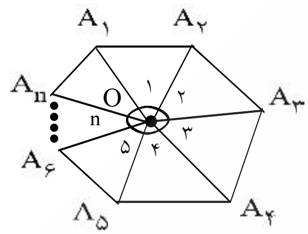
به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که $\angle A = \angle D$ است. برای اثبات $\angle A = \angle D$ می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد:

$$\left.\begin{array}{l}\angle B = ۱۸۰^\circ - (\angle A_۱ + \angle D_۲)\\ \angle C = ۱۸۰^\circ - (\angle A_۲ + \angle D_۱)\end{array}\right\} \xrightarrow[\angle A_۲ = \angle D_۲]{\angle A_۱ = \angle D_۱} \angle B = ۱۸۰^\circ - (\angle A_۱ + \angle D_۱) = \angle C$$

$$\Rightarrow \angle B = \angle C$$

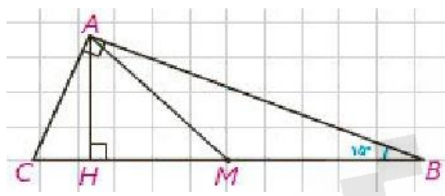
- با استدلال استنتاجی ثابت کنید که مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب برابر با $(n - ۲) \times ۱۸۰^\circ$ است. ۹

از نقطه‌ی دلخواه O به رأس‌های n ضلعی وصل می‌کنیم. در این صورت n ضلعی به n مثلث تقسیم می‌شود و مجموع زوایای هر مثلث ۱۸۰° است. بنابراین:

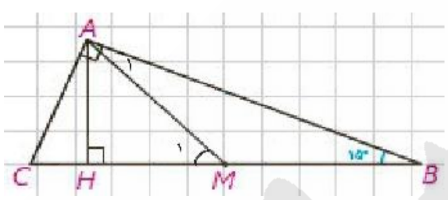


$$\text{مجموع زوایای } n \text{ ضلعی محدب} = ۱۸۰n - (\hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ + \ldots + \hat{O}_n) = ۱۸۰n - ۳۶۰ = ۱۸۰(n - ۲)$$

- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، اندازه‌ی زاویه‌ی B برابر ۱۵° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازه‌ی وتر است. ۱۰



در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد وتر نصف وتر است پس:



از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است.

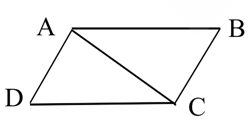
$$\Delta AMH;\ \angle H = ۹۰^\circ, \angle M_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow AM = \frac{AM}{۲} \Rightarrow AH = \frac{\frac{AM}{۲}}{\frac{۲}{۱}} = \frac{AM}{۴}$$

- ثابت کنید: ۱۱

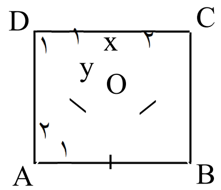
هرگاه هر قطر یک چهارضلعی، آن چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

$$A\overset{\triangle}{B}C \cong A\hat{D}C \Rightarrow \begin{cases} AB = CD \\ BC = AD \end{cases}$$

این ویژگی متوازی‌الاضلاع است، پس $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.



۱۲ - در شکل مقابل، ABCD یک مربع است. اندازه‌ی x و y را به‌دست آورید.

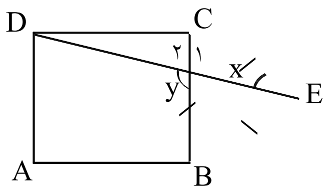


مثلث OAB متساوی‌الاضلاع می‌باشد پس $\hat{A}_1 = ۶۰$ دز نتیجه $\hat{A}_2 = ۳۰$. از طرفی مثلث $O\overset{\triangle}{A}D$ متساوی‌الساقین است زیرا دو ساق AO و AD برابر ضلع مربع می باشد.

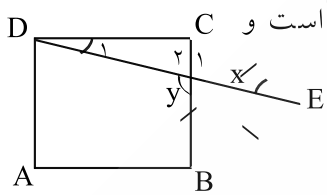
$$\hat{D}_1 = y = \frac{۱۸۰ - ۳۰}{۲} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{D}_2 = ۱۵^\circ$$

به همین ترتیب $C_2 = ۱۵$. پس زاویه‌ی x برابر است با : $x = ۱۸۰ - (۱۵ + ۱۵) = ۱۵۰^\circ$

۱۳ - شکل زیر ABCD یک مربع است. اندازه‌ی x و y را به‌دست آورید.



مثلث $B\overset{\triangle}{C}E$ مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشد پس $\hat{C}_1 = ۶۰^\circ$ از طرفی $\hat{C}_2 = ۹۰^\circ$ پس $D\hat{C}E = ۱۵۰^\circ$.

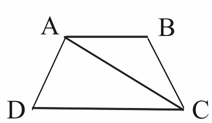


در ضمن $CE = CD$ هر دو برابر ضلع مربع هستند پس مثلث DCE متساوی‌الساقین است و

$$\hat{D}_1 = x = \frac{۱۸۰ - ۱۵۰}{۲} = ۱۵^\circ$$

$y = D_1 + C_2 \Rightarrow y = ۱۵ + ۹۰ = ۱۰۵^\circ$ زاویه خارجی مثلث $D\overset{\triangle}{C}Y$.

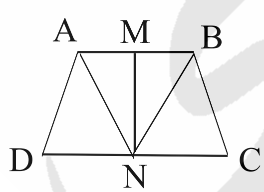
۱۴ - در ذوزنقه‌ی ABCD اگر $BC = AD = AB$ و $AC = DC$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی D را بیابید.



در شکل مقابل مثلث‌های ABC و ADC متساوی‌الساقین هستند. پس می‌توان نتیجه گرفت

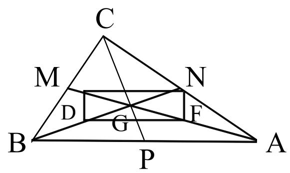
$$D = DAC \text{ و } D = \frac{C}{۲} \Rightarrow D + D + ۲D = ۱۸۰ \Rightarrow D = ۷۲$$

۱۵ - ثابت کنید در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین خطی که اوساط دو قاعده را به هم وصل می‌کند بر دو قاعده عمود است.



نشان دهید مثلث ABN متساوی‌الساقین است و چون MN میانه است نتیجه بگیرید MN ارتفاع می‌باشد.

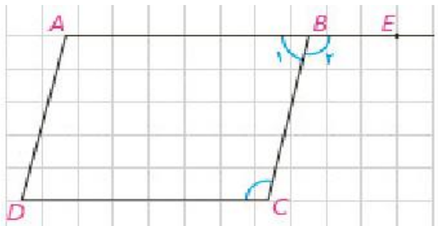
۱۶ - نقطه تلاقی میانه‌های AM و BN و CP در مثلث ABC را G و وسط AG را F و وسط BG را D می‌نامیم. ثابت کنید که چهارضلعی FDMN متوازی‌الاضلاع است. و از آنجا نتیجه بگیرید نقطه برخورد میانه‌ها دو پاره‌خط با نسبت‌های $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۳}$ میانه روی هریک از میانه‌ها جدا می‌کند.



در مثلث ABC نتیجه بگیرید MN موازی و مساوی نصف AB است. همچنین در مثلث ABG نتیجه بگیرید DF موازی و مساوی نصف AB است. پس MN و EF موازی و مساوی همدیگرند بنابراین $FDMN$ متوازی‌الاضلاع است. و در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند. داریم:

$$GA = GD = BD \Rightarrow GN = \frac{۱}{۳} BN \,,\; BG = \frac{۲}{۳} BN$$

۱۷ - چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

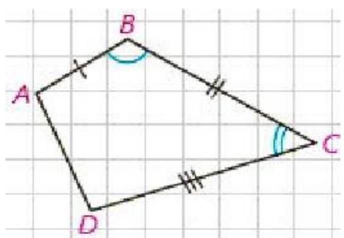


با توجه به شکل، $\angle B_{۲} = \angle C$ است ؛ چرا؟ $\angle B_{۱}$ و $\angle B_{۲}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین $\angle B_{۱}$ و $\angle C$ .... می‌باشند.

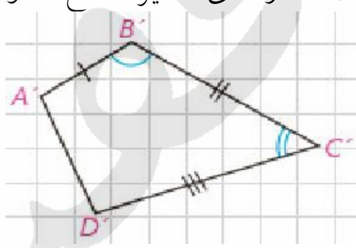
مکمل‌اند، زیرا $AB \parallel CD$ و BC مورب است.

بنابراین $\angle B_{۱}$ و $\angle C$ مکمل می‌باشند.

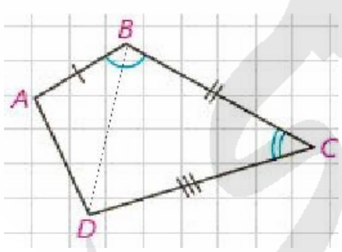
۱۸ - الف) در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟



ب) اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟



الف) قطرهای BD و $B'D'$ را در دو چهارضلعی رسم می‌کنیم بدیهی است که دو مثلث BCD و $B'C'D'$ هم‌نهشت‌اند پس:



$$\angle B_{۱} = \angle B'_{۱} \xrightarrow{\angle B = \angle B'} \angle B_{۲} = \angle B'_{۲}$$

در دو مثلث ABD و $A'B'D'$:

$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B' \\ \angle B_{۲} &= \angle B'_{۲} \\ BD &= B'D' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta A'B'D' \xrightarrow{\Delta ABCD \cong \Delta A'B'C'D'}$$

$\square\, ABCD \cong \square\, A'B'C'D'$

ب) در این حالت کافی است قطرهای AC و $A'C'$ را رسم نموده و مانند قسمت الف عمل کنیم.

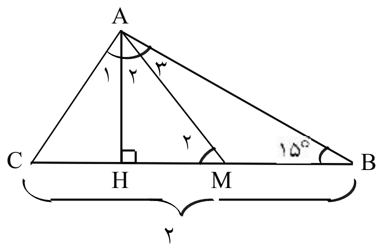
۱۹ - چندضلعی را تعریف کرده و یک مثال برای چندضلعی محدب بیاورید.

چندضلعی: شکلی است که شامل $n(n \geq ۳)$ پاره‌خط متوالی است که:

۱) هر پاره‌خط دقیقاً دو پاره‌خط را در نقاط ابتدایی و انتهایی‌اش قطع می‌کند.

۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند روی یک خط نباشند.

چندضلعی محدب



۲۰ - با توجه به این‌که در مثلث ΔABC، AH ارتفاع وارد بر وتر است. اگر AM میانه‌ی وارد بر وتر مثلث ABC باشد، اندازه‌ی ارتفاع AH را به دست آورید. سپس مساحت $\overset{\triangle}{AMB}$ را محاسبه کنید.

چون:

$$\angle B = ۱۵^\circ \Rightarrow \angle C = ۷۵^\circ \xrightarrow{\text{در مثلث } AHC} \begin{cases} \angle H = ۹۰^\circ \\ \angle C = ۷۵^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle A_۱ = ۱۵^\circ \quad (۱)$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است

$$AM = MB \xrightarrow[\text{مثلث متساوی الساقین}]{\Delta MB} \angle A_۳ = ۱۵^\circ \quad (۲)$$

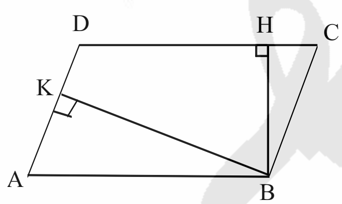
$$\angle A_۱ + \angle A_۲ + \angle A_۳ = ۹۰^\circ \xrightarrow{\text{با درنظر گرفتن ۱ و ۲}} \angle A_۲ = ۶۰^\circ \xrightarrow{\text{در } \Delta AHM} \angle M_۲ = ۳۰^\circ$$

می‌دانیم ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰° نصف وتر است. $AH = \frac{۱}{۲}AM \ (*)$

از طرفی $(**)\ AM = \frac{۱}{۲}BC$

$$(*),(**) \Rightarrow AH = \frac{۱}{۴}BC \xrightarrow{BC = ۲۰} AH = \frac{۱}{۴} \times ۲۰ = ۵$$

$$S_{AMB} = \frac{۱}{۲}(۱۰ \times ۵) = ۲۵$$



۲۱ - چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.
الف) دلیل تشابه دو مثلث ΔABK و ΔBHC را بنویسید.
ب) تناسب اضلاع متناظر دو مثلث را کامل کنید.

الف) به حالت برابری سه زاویه متشابه‌اند.

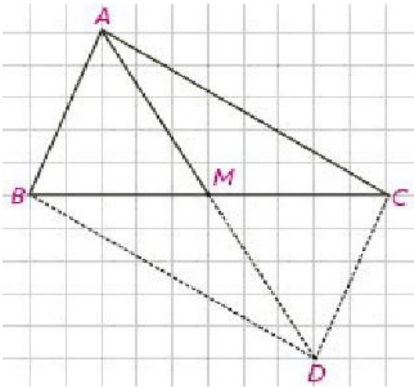
$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle C \ \text{زوایه های روبه رو متوازی الاضلاع} \\ \angle K = \angle H = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BHC \sim \Delta BKA$$

ب) $\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{HC} = \frac{BK}{BH}$

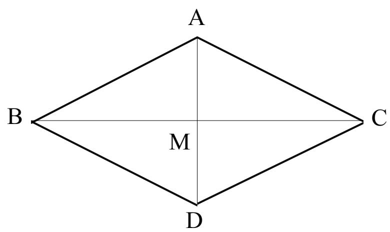
۲ - در مثلث ABC، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{۲}$. روی نیم‌خط AM نقطه‌ی D را چنان درنظر می‌گیریم که MD = AM.

الف) آیا می‌توانید نتیجه بگیرید AD = BC و قطرهای AD و BC منصف یک‌دیگرند؟

ب) چگونه نتیجه می‌گیرید $\angle A$ قائمه است؟



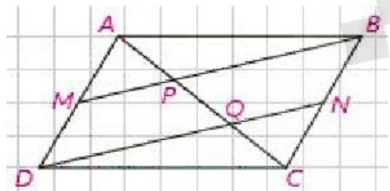
الف)
$$\left.\begin{array}{l} AM = \frac{BC}{۲} \\ AM = \frac{AD}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BC}{۲} = \frac{AD}{۲} \Rightarrow BC = AD$$



پس قطرها برابر و منصف یک‌دیگرند.

ب) از آن‌جا که قطرها برابر و منصف‌اند و با توجه به این‌که هر چهارضلعی که در آن قطرها برابر و منصف باشند یک مستطیل است، می‌توان نتیجه گرفت که زاویه‌ی $\angle A$ قائمه است.

۳ - در متوازی‌الاضلاع ABCD، M و N به‌ترتیب وسط های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید AP = PQ = QC.

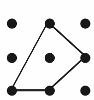


اگر در یک چهارضلعی دو ضلع موازی و مساوی باشند آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. در چهارضلعی BMDN داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \xrightarrow{\div ۲} BN = MD \\ \qquad\qquad\quad BN \parallel MD \end{array}\right\} \Rightarrow BM \parallel DN$$

$$\Delta BCP\ ;\ BP \parallel QN \Rightarrow \frac{CQ}{QP} = \frac{CN}{NB} = ۱ \Rightarrow CQ = PQ \Rightarrow AP = PQ = QC$$

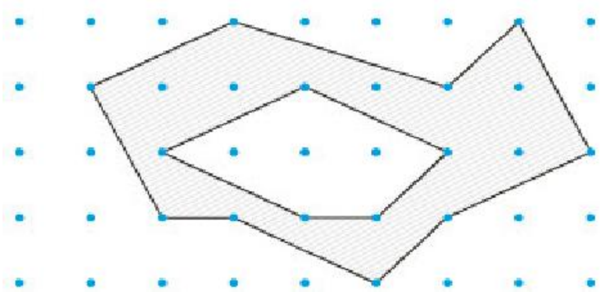
۴ ■ چندضلعی شبکه‌ای را تعریف کرده و مساحت چندضلعی زیر را به دست آورید.



چندضلعی که تمام رئوس آن روی نقاط شبکه‌ای قرار گیرد، چندضلعی شبکه‌ای نام دارد.

$$\begin{array}{l} b = ۴ \\ i = ۱ \end{array} \Rightarrow S = \frac{b}{۲} - ۱ + i \Rightarrow S = \frac{۴}{۲} - ۱ + ۱ \Rightarrow S = ۲$$

۵ - با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (راهنمایی: مساحت چندضلعی داخلی را از مساحت چندضلعی بیرونی کم کنید.)



$b = ۱۴ , i = ۵ , S = \frac{b}{۲} - ۱ + i \Rightarrow S = ۷ - ۱ + ۵ = ۱۱$

۶ - اگر فاصله‌ی نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی‌متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحه‌ی شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن‌را به طور تقریبی محاسبه کنید.
واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.

$b = ۴۴$

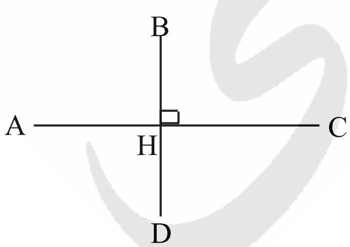
$i = ۴۵$

$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i \Rightarrow S = \frac{۴۴}{۲} - ۱ + ۴۵$

$S = ۲۱ + ۴۵ = ۶۶$

۷ - ثابت کنید اگر قطرهای یک چهار ضلعی بر هم عمود باشند، مساحت چهار ضلعی برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌ی قطرها خواهد بود.

فرض کنید اقطار چهار ضلعی $ABCD$ بر هم عمود باشند.



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AH \times BD + \frac{۱}{۲} CH \times BD$$

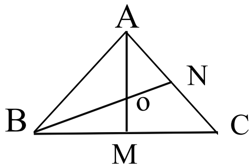
$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} BD\,(AH + CH)$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} BD \times AC$$

پس مساحت این چهارضلعی مساوی نصف حاصل ضرب قطرهای آن می‌باشد.

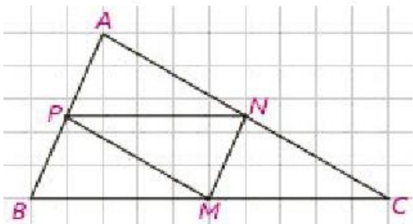
۸ - اگر در مثلث $\overset{\frown}{ABC}$ داشته باشیم: $BC = ۱۰$ و میانه $AM = ۹$ و میانه $BN = ۶$؛ آنگاه مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

راه حل: اگر O نقطه تلاقی میانه‌های AM و BN باشد. داریم:



اضلاع مثلث OBM در رابطه فیثاغورث $\left(5^2 = 4^2 + 3^2\right)$ صدق می‌کنند، پس مثلث OBM قائم الزاویه است و $\widehat{M} = 90^\circ$. بنابراین: AM ارتفاع است. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \times BC = \frac{1}{2} 9 \times 10 = 45$

۲۹ - M و N و P وسط های سه ضلع مثلث ABC مطابق شکل‌اند.



الف) پاره‌خط PN موازی ضلع .... است و پاره‌خط PM موازی ضلع .... است. چرا؟

ب) بنابراین چهارضلعی PNCM .... است، در نتیجه، $\Delta MNP \cong \Delta NMC$، چرا؟

پ) به همین ترتیب برای بقیه‌ی مثلث‌ها نیز می‌توان نشان داد که دو به دو هم‌نهشت‌اند.

$\Delta APN \cong \Delta MNP \cong \Delta BPM$

الف) پاره‌خط PN موازی ضلع BC است و پاره‌خط PM موازی ضلع AC است. از آن‌جا که P و N به‌ترتیب وسط AB و AC هستند، پس:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AN}{NC} \xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}} PN \parallel BC$$

با همین استدلال داریم:

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BM}{MC} \xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}} PM \parallel AC$$

ب) بنابراین چهارضلعی PNCM متوازی‌الاضلاع می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} MN = MN \ \text{مشترک} \\ \text{ضلع های مقابل در متوازی الاضلاع} \begin{cases} PN = MC \\ PM = NC \end{cases} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})}$$

$\Delta MNP \cong \Delta NMC \quad (***)$

پ) اثبات: PNMB یک متوازی‌الاضلاع است زیرا:

$$\frac{NC}{AN} = \frac{MC}{MB} \xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} NM \parallel AB \Rightarrow NM \parallel BD \quad (2)$$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که چهارضلعی PNMB چون ضلع‌های روبه‌رویش دو به دو با هم موازی هستند پس متوازی‌الاضلاع است. حال ثابت می‌شود که $\Delta PBM \cong \Delta PNM$.

$$\left.\begin{array}{l} PM \ \text{ضلع مشترک} \\ \text{ضلع های متقابل در متوازی الاضلاع} \begin{cases} BP = MN \\ PN = BM \end{cases} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \Delta PBM \cong \Delta PNM \quad (***)$$

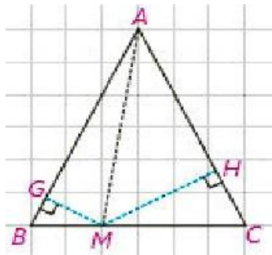
در ادامه‌ی کار ثابت می‌شود که ANMP یک متوازی‌الاضلاع است چون:

$$\text{نتایج قسمت های قبل} \begin{cases} MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel AP \\ PM \parallel AC \Rightarrow PM \parallel AN \end{cases} \Rightarrow \text{ANMP متوازی الاضلاع}$$

پس دو مثلث $(*)$ $APN \cong PNM$ بنا به حالت (ض ض ض)

با مقایسه رابطه‌ی * و ** و *** داریم: $\Delta APN \cong \Delta BPM \cong \Delta MNP$

۲۰ - در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است، نقطه‌ی دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C درنظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به‌ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. $S_{\Delta MB}$ و $S_{\Delta MC}$ را بنویسید.

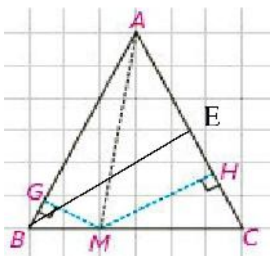


مساحت مثلث ABC را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید. الف) چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن‌را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از .... برابر .... است.

ب) به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعده‌ی BC از خط های شامل دو ساق برابر اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق است.

الف) در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از AB , AC برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است.

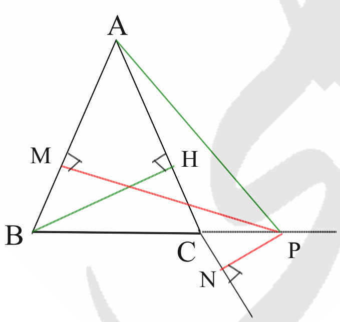


$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}AB \times MG \ , \ S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}AC \times MH \ , \ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \times BE$$

$$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta ACM} = S_{\Delta ABC} \xrightarrow{AB = AC} \frac{1}{2}AC \times MG + \frac{1}{2}AC \times MH = \frac{1}{2}AC \times BE$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}AC} \times (MG + MH) = \cancel{\frac{1}{2}AC} \times BE \Rightarrow MG + MH = BE$$

ب) فرض کنیم P نقطه‌ای روی امتداد ضلع BC باشد. اگر PM و PN فاصله‌های نقطه P از دو ساق مثلث ABC $(AB = AC = a)$ باشند، پاره‌خط AP و ارتفاع BH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم.



$$S_{\Delta ABP} = \frac{1}{2}AB \times PM \ , \ S_{\Delta ACP} = \frac{1}{2}AC \times PN$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \times BH$$

$$\left|S_{\Delta ABP} - S_{\Delta ACP}\right| = S_{\Delta ABC} \xrightarrow{AB - AC = a} \left|\frac{1}{2}a \times PM - \frac{1}{2}a \times PN\right| = \frac{1}{2}a \times BH$$

۲۱ - یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه‌ی مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

حداقل ۳ نقطه می‌تواند داشته باشد. چون حداقل تعداد ضلع‌های یک چندضلعی ۳ تا است.

۲ - یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه‌ی درونی می‌تواند داشته باشد؟

حداقل صفر، یعنی شامل هیچ نقطه‌ی درونی نباشد.

۳ - در یک لوزی اندازه‌ی هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

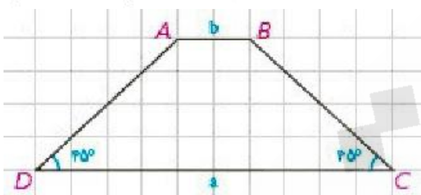
a را بزرگ‌ترین قطر درنظر می‌گیریم. بنابراین $a = ۳b$ از طرفی در لوزی داریم: (بنا به رابطه‌ی فیثاغورس)

$$\left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{b}{۲}\right)^۲ = \left(۲\sqrt{۱۰}\right)^۲$$

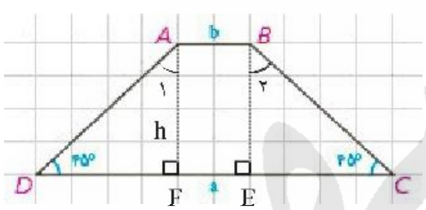
$$\left(\frac{۳b}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{b}{۲}\right)^۲ = ۴۰ \Rightarrow \frac{۱۰\,b^۲}{۴} = ۴۰ \Rightarrow b = \frac{۴ \times ۴۰}{۱۰}$$

مساحت برابر است با: $\frac{a.b}{۲} = \frac{۴ \times ۱۲}{۲} = \frac{۴۸}{۲} = ۲۴$

۴ - در ذوزنقه‌ی شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده ۴۵° است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.



عمودهای BF و AF را بر CD وارد می‌کنیم چهارضلعی ABCD مستطیل است. پس:

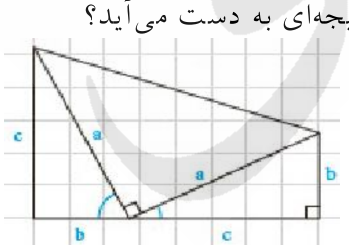


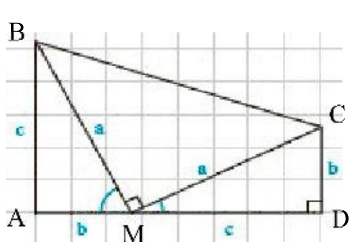
$$AB = EF = b$$
$$\Delta ADF;\ \angle A_۱ = \angle D = ۴۵^\circ \Rightarrow AF = DF = h$$
$$\Delta BCE;\ \angle B_۱ = \angle C = ۴۵^\circ \Rightarrow BE = CE = h$$

$$\Rightarrow CD = ۲h + b = a \Rightarrow h = \frac{a-b}{۲}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(a+b)h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a+b}{۲} \times \frac{a-b}{۲} = \frac{a^۲ - b^۲}{۲}$$

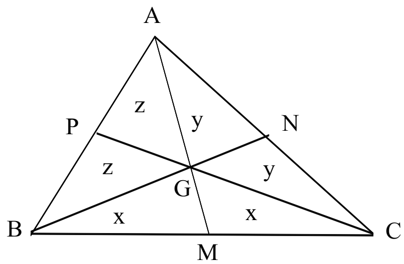
۵ - مساحت ذوزنقه‌ی مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آن‌ها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟





$$\xrightarrow{\times ۲} (b+c)^{۲} = ۲bc + a^{۲} \Rightarrow b^{۲} + \cancel{۲bc} + c^{۲} = \cancel{۲bc} + a^{۲} \Rightarrow b^{۲} + c^{۲} = a^{۲}$$

۶ ۲ - ثابت کنید در هر مثلث با رسم هر سه میانه، مثلث به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود.



میانه‌های مثلث ABC در نقطه‌ی G همرس هستند.

می‌دانیم هر میانه مساحت مثلث را نصف می‌کند.

$$B\overset{\triangle}{G}C: \text{میانه } GM \Rightarrow S_{BMG} = S_{GMC} = x$$

$$A\overset{\triangle}{G}C: \text{میانه } GN \Rightarrow S_{AGN} = S_{GNC} = y$$

از طرف دیگر داریم:

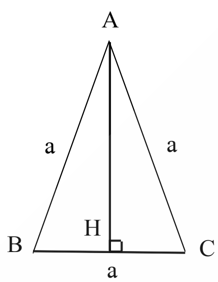
$$A\overset{\triangle}{B}C: \text{میانه } AM \Rightarrow S_{ABM} = S_{ACM} \Rightarrow ۲z + x = ۲y + x \Rightarrow y = z$$

$$A\overset{\triangle}{B}C: \text{میانه } BN \Rightarrow S_{ABN} = S_{BNC} \Rightarrow ۲z + y = ۲x + y \Rightarrow x = z$$

بنابراین $x = y = z$ در نتیجه شش مثلث AGP و BGP و BGM و GMC و GNC و AGN هم‌مساحت هستند.

۷ ۲ - مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را حساب کنید.

در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع همان میانه است. ارتفاع را با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس محاسبه می‌کنیم:



$$a^{۲} = (HA)^{۲} + \left(\frac{a}{۲}\right)^{۲} \Rightarrow (HA)^{۲} = a^{۲} - \left(\frac{a}{۲}\right)^{۲} \Rightarrow (HA)^{۲}$$

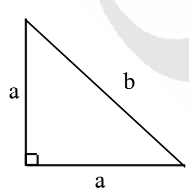
$$= a^{۲} - \frac{a^{۲}}{۴} = \frac{۳}{۴}a^{۲} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

مساحت برابر است با: $\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a.\,a\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$

۸ ۲ - مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین برابر با ۸ است. محیط این مثلث را به دست آورید.

طول هر ضلع زاویه‌ی قائمه را a در نظر می‌گیریم پس $\frac{۱}{۲}a.\,a = ۸$ در نتیجه $a^{۲} = ۱۶$ و $a = ۴$

داریم:



$$b^{۲} = ۴^{۲} + ۴^{۲} \Rightarrow b^{۲} = ۳۲ \Rightarrow b = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

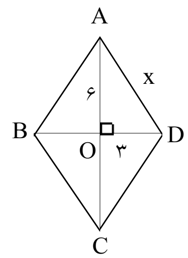
$$\text{محیط}: ۴ + ۴ + ۴\sqrt{۲} = ۸ + ۴\sqrt{۲}$$

۹ ۲ - اندازه‌ی قطر لوزی ۱۲ و مساحت آن ۳۶ است. قطر دیگر لوزی و محیط لوزی را محاسبه کنید.

طول قطر دیگر لوزی را a در نظر می‌گیریم.

$$S_{\text{لوزی}} = \frac{\text{حاصلضرب دو قطر}}{۲} \Rightarrow \frac{۱۲a}{۲} = ۳۶ \Rightarrow a = ۶$$

از آن‌جا که قطرها عمودمنصف هستند، اندازه‌ی ضلع را با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس می‌توان حساب کرد.



$$A\hat{O}D : x^۲ = ۶^۲ + ۳^۲ \Rightarrow x^۲ = ۳۶ + ۹ \Rightarrow x^۲ = ۴۵ \Rightarrow x = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

$$\text{محیط} = ۴ \times ۳\sqrt{۵} = ۱۲\sqrt{۵}$$

۰ - فاصله‌ی M نقطه‌ی داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از هر ضلع برابر با $۵\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}$ و $۲\sqrt{۳}$ است. محیط مثلث را محاسبه کنید.

می‌دانیم مجموع فاصله‌های نقطه‌ی M از اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ارتفاع مثلث است.

$$\text{ارتفاع مثلث} \quad ۲\sqrt{۳} + \sqrt{۳} + ۵\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$$

ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۸\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۱۶ \Rightarrow \text{محیط} = ۳ \times ۱۶ = ۴۸$$

۱ - در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

سراسری => ریاضی => ۹۸

۲ - در یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه، از نقطه‌ی O محل تلاقی قطرها، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود. ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$، چگونه است؟

۱) کوچک‌تر از ۱ ۲) مساوی ۱ ۳) بزرگ‌تر از ۱ ۴) متغیر نسبت به اضلاع

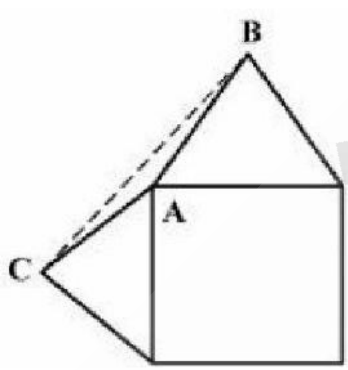
سراسری => تجربی => ۹۷

۳ - در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع و میانه‌ی نظیر وتر، زاویه‌ی ۱۲ درجه با هم ساخته‌اند. کوچک‌ترین زاویه‌ی این مثلث، چند درجه است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۸ ۳) ۳۷ ۴) ۳۹

سراسری => تجربی => ۹۷

۴ - بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟



۱) $\sqrt{۳} - ۱$

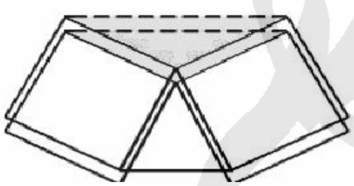
۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۳) ۱

۴) $\sqrt{۳}$

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۵ - در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$

سراسری => ریاضی => ۹۳ (سراسری - آزاد)

۶ - در ذوزنقه قائم الزاویه‌ای نسبت دو قاعده برابر $\frac{۲}{۳}$ است. اگر وسط قاعده کوچک را به وسط ساق قائمه وصل کنیم مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت ذوزنقه اصلی است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

سراسری => تجربی => ۸۲

۷ - طول ساق یک مثلث متساوی الساقین $\sqrt{۸۵}$ سانتی‌متر و طول قاعدهٔ آن ۱۲ سانتی‌متر است. مساحت مثلث چند سانتیمتر مربع است؟

۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) ۴۲ ۳) $۳۰\sqrt{۲}$ ۴) ۴۸

تجربی => ۸۰ و سنجش علمی آزمون یار => ۸۱-۸۰ => متوسطه

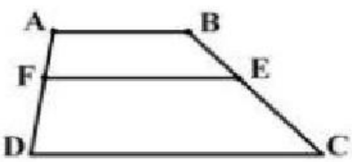
۸ - در چهارضلعی ABCD، وسط دو ضلع غیرمجاور و وسط دو قطر آن، رأس‌های یک لوزی است. الزاماً کدام نتیجه‌گیری در مورد چهارضلعی مفروض، درست است؟

۱) دو ضلع غیرمجاور دیگر، برابرند. ۲) دو قطر عمود برهم‌اند.
۳) دو ضلع شامل رأس‌های لوزی، برابرند. ۴) دو ضلع غیرمجاور، موازی‌اند.

سراسری => ریاضی => ۹۸

۹ - در ذوزنقه ABCD ، قاعده‌ی بزرگ $\frac{۵}{۲}$ قاعده‌ی کوچک است و $AF = \frac{۱}{۴}AD$ و EF موازی قاعده است.

نسبت $\frac{EF}{CD}$، کدام است؟



۱) $\frac{۱۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$
۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

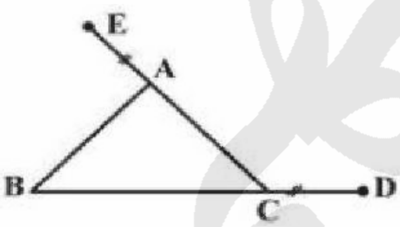
کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۱۰ - در مثلث ABC ، ضلع AB بزرگ‌تر از ضلع AC است. هریک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به اندازه خود تا D و E امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC ، کدام است؟

۱) کم‌تر از ۱ ۲) بیش‌تر از ۱
۳) مساوی ۱ ۴) بستگی به ضلع سوم دارد.

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۱۱ - در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، بر روی امتداد دو ضلع BC و CA پاره‌خط های $CD = AE$ جدا شده است. زاویه‌ی بین امتداد DA با BE چند درجه است؟



۱) ۴۵ ۲) ۶۰
۳) ۷۵ ۴) ۹۰

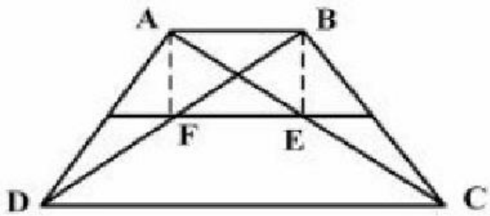
کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

۱۲ - در یک متوازی‌الاضلاع با زاویه‌ی ۶۰ درجه، نیم‌سازهای دو زاویه‌ی مجاور ضلع بزرگ، روی ضلع دیگر آن متقاطع‌اند. اگر محیط این متوازی‌الاضلاع $۱۲\sqrt{۳}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۹\sqrt{۳}$ ۲) ۱۸ ۳) $۱۲\sqrt{۳}$ ۴) $۱۸\sqrt{۳}$

سراسری => تجربی => ۹۷

۱۳ - در ذوزنقه ABCD ، نسبت قاعده‌ها $\frac{۱}{۳}$، خط واصل به اوساط ساق‌ها، اقطار ذوزنقه را در E و F قطع کرده است. مساحت چهارضلعی ABEF ، چند برابر مساحت ذوزنقه اولیه است؟

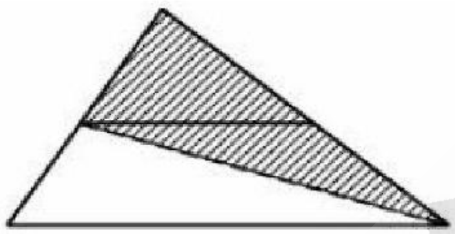


۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

سراسری <= ریاضی <= ۹۷

۱۴ - در شکل زیر، نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۷}{۸}$

۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$

۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

کنکورهای خارج از کشور <= سراسری <= تجربی

۱۵ - در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

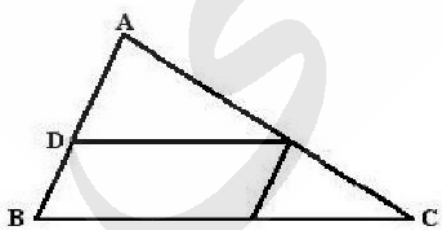
سراسری <= تجربی <= ۹۵

۱۶ - در ذوزنقه متساوی‌الساقین، با زاویه‌ی ۶۰ درجه، قاعده‌ی کوچک‌تر برابر ساق آن است. اگر محیط این ذوزنقه ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲۷\sqrt{۳}$ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

سراسری <= تجربی <= ۹۵

۱۷ - در شکل روبه‌رو $\frac{DA}{DB}=\frac{۲}{۳}$، مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۳۶

۲) ۴۰

۳) ۴۵

۴) ۴۸

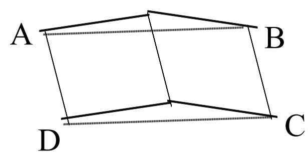
سراسری <= ریاضی <= ۹۵

۱۸ - در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین، اندازه‌ی دو قاعده برابر ۵ و ۹ و طول ساق آن ۶ واحد است. مساحت این ذوزنقه کدام است؟

۱) $۱۴\sqrt{۶}$ ۲) $۲۱\sqrt{۲}$ ۳) $۲۱\sqrt{۳}$ ۴) $۲۸\sqrt{۲}$

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

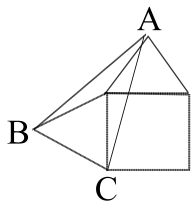
۱۹ - در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویه‌ی ۶۰° درجه، در یک ضلع مشترک‌اند. بزرگ‌ترین زاویه متوازی‌الاضلاع ABCD چند درجه است؟



۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۵
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

سراسری => تجربی => ۸۸

۲۰ - در شکل روبه‌رو، طول ضلع مربع ۲ واحد است. دو مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی دو ضلع مجاور ساخته شده است. مساحت مثلث ABC ، کدام است؟



۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۱+\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) ۴

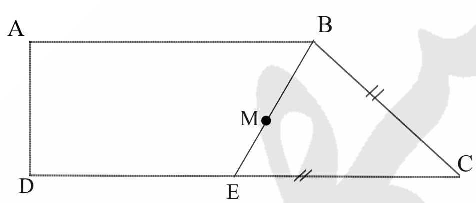
سراسری => ریاضی => ۹۲ (سراسری - آزاد)

۲۱ - در متوازی‌الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد، و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

سراسری => تجربی => ۹۲ (سراسری - آزاد)

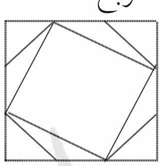
۲۲ - در شکل مقابل چهار ضلعی ABCD ، ذوزنقه قائم‌الزاویه است و CB = CE ، مجموع فواصل M از دو خط CB و CE برابر کدام است؟



۱) DE ۲) BC
۳) BE ۴) AD

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => تجربی

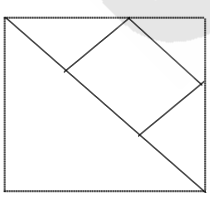
۲۳ - در شکل مقابل اندازه طول اضلاع هشت ضلعی منتظم ۲ واحد است. مساحت مربع کوچک چند واحد مربع است؟



۱) ۲) $۴\left(۲+\sqrt{۲}\right)$
۳) $۸\left(۱+\sqrt{۲}\right)$ ۴) $۸\left(۲+\sqrt{۲}\right)$

سراسری => ریاضی => ۸۷

۲۴ - در شکل مقابل هر دو چهار ضلعی مربع‌اند.
مساحت مربع بزرگتر چند برابر مساحت کوچکترین مثلث‌ها است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۶
۳) ۱۸ ۴) ۲۴

سراسری => تجربی => ۸۴

۲۵ - در یک مستطیل با طول و عرض $۲\sqrt{۶}$ و $۲\sqrt{۳}$، فاصله هر رأس از قطر مستطیل کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) $۲\sqrt{۲}$

سراسری => تجربی => ۸۳

۲۶ - در یک مستطیل وسط های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم، نسبت مساحت مستطیل به مساحت شکل حاصله کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ‏ ۴) ۳

سراسری => تجربی => ۸۳

۲۷ - در مثلث قائم‌الزاویه ABC $\left(A=\frac{\pi}{۲}\right)$ $AC=۲\,AB$ ارتفاع AH رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟

۱) ۳ ‏ ۲) ۴ ‏ ۳) ۵ ‏ ۴) ۶

سراسری => ریاضی => ۸۱

۲۸ - در مثلث $A\hat{B}C$ اندازه زاویه‌های B و C به‌ترتیب ۳۸ و ۶۴ درجه است. اندازه‌ی زاویه بین نیمساز خارجی زاویه‌ی C و نیمساز داخلی زاویه‌ی B کدام است؟

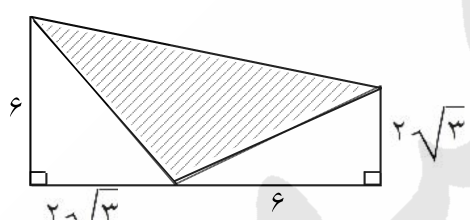
۱) ۱۹ ‏ ۲) ۳۹ ‏ ۳) ۳۲ ‏ ۴) ۷۲

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۲۹ - در شکل مقابل مساحت مثلث سایه زده کدام است؟

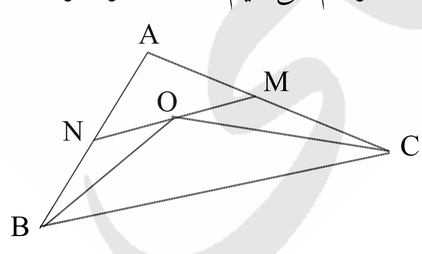
۱) ۱۸ ‏ ۲) ۲۰

۳) ۲۴ ‏ ۴) ۳۲



آزمایشی سنجش => ریاضی => سال تحصیلی ۹۴-۹۳

۳۰ - در مثلث $A\hat{B}C$، از نقطه O محل تلاقی نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه M و AC را در نقطه‌ی N قطع کند. حاصل $BM+CN$ برابر کدام است؟



۱) $\frac{MN}{۲}$

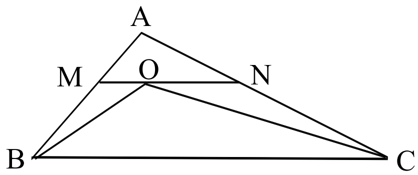
۲) MN

۳) BC

۴) $\frac{MN+BC}{۲}$

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۱ ۲ - در شکل زیر $AB = ۱۱$، $BC = ۲۲$، $AC = ۱۶$ و MN خطی موازی BC است که از O می‌گذرد. اگر BO و CO به‌ترتیب نیمسازهای زوایای ABC و ACB باشند، محیط مثلث AMN کدام است؟

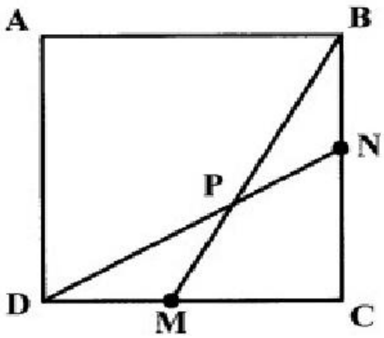


۱) ۲۷ ۲) ۲۹

۳) ۳۱ ۴) ۳۳

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۲ ۲ - در مربع $ABCD$، نقاط M و N به ترتیب وسطهای DC و BC می‌باشند. نسبت مساحت چهارضلعی $MPNC$ به مساحت مربع $ABCD$، کدام است؟

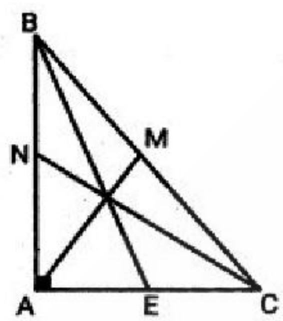


۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۳ ۲ - در شکل زیر، مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ قائم‌الزاویه است. $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ و AM و BE و CN میانه‌های وارد بر اضلاع مثلث می‌باشند. حاصل $AM^۲ + BE^۲ + CN^۲$، کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲} BC^۲$

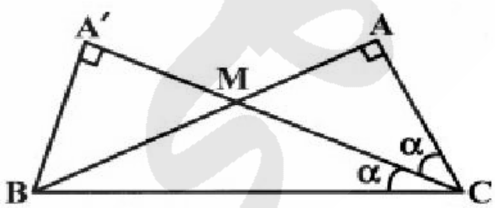
۲) $۲AB^۲$

۳) $AC^۲ + BC^۲$

۴) $AB^۲ + AC^۲ + BC^۲$

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۴ ۲ - در شکل زیر $\hat{\alpha} = ۳۰^\circ$ است. نسبت مساحت مثلث $A'\overset{\triangle}{B}C$ به مساحت مثلث $A\overset{\triangle}{M}C$، کدام است؟



۱) ۲

۲) ۳

۳) $\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۳}$

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۵ ۲ - در مثلث ABC با اضلاع $a = ۱۶$، $c = b = ۱۰$ و نقطهٔ M روی ضلع BC قرار دارد. مجموع فواصل M از دو ضلع AB و AC کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) ۸/۸ ۳) ۹/۶ ۴) ۹/۸

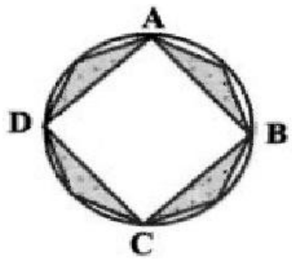
آزمایشی سنجش => یازدهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۲۶ - از یک قطعه مقوا به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ واحد با حذف گوشه‌های آن شش ضلعی منتظم ساخته می‌شود. مساحت آن کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴)

آزمایشی سنجش => دوازدهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۲۷ - در شکل زیر، شعاع دایره برابر $\sqrt{۲}$ است. مساحت ناحیه بین هشت‌ضلعی منتظم و مربع ABCD ، کدام است؟



۱) $۴\left(\sqrt{۲}-۱\right)$

۲) $۸\left(\sqrt{۲}-۱\right)$

۳) $۴\left(۲-\sqrt{۲}\right)$

۴) $۸\left(۲-\sqrt{۲}\right)$

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۲۸ - در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین، طول پاره‌خطی که وسط های دو ساق را به هم وصل می‌کند، برابر ۳ است. اگر قطرهای ذوزنقه بر هم عمود باشند، مساحت ذوزنقه کدام است؟

۱) ۶ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) ۹ ۴) $۹\sqrt{۳}$

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۲۹ - نسبت اضلاع قائم از مثلثی $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و میانه‌ی وارد بر ضلع بزرگ آن ۸ واحد است. مساحت مثلث کدام است؟

۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) $۳۲\sqrt{۳}$ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

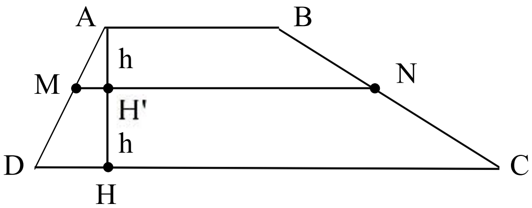
آزمایشی سنجش => ریاضی => ۸۷

۳۰ - پاره‌خط AB داده شده است. دهانه پرگار را یک بار به اندازهٔ ۳، بار دیگر به اندازهٔ ۷ باز می‌کنیم و از نقطهٔ A دو کمان می‌زنیم. سپس کمان‌هایی به همان اندازه‌ها، این بار از نقطهٔ B می‌زنیم و دو نقطه بخورد را، C و D می‌نامیم تا متوازی الاضلاع ACBD تشکیل شود. طول AB کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

آزمایشی سنجش => یازدهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۱ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ذوزنقه‌ی $ABCD$ نقاط M و N وسط های دو ساق هستند پس بنابر قضیه‌ی میان خط در ذوزنقه $MN = \frac{AB + DC}{۲}$ و اگر ارتفاع AH را رسم کنیم آن‌گاه $AH' = HH' = h$. بنابر فرض سؤال داریم.

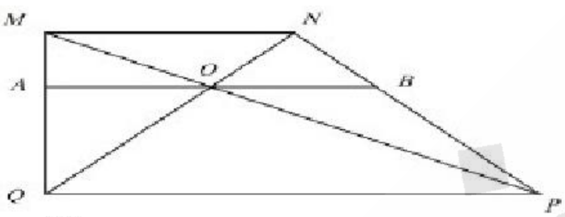


$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}h(AB + MN)}{\frac{۱}{۲}h(MN + DC)} = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵AB + ۵MN = ۳MN + ۳DC$$

$$\Rightarrow ۵AB - ۳DC = -۲MN \Rightarrow ۵AB - ۳DC = -۲\left(\frac{AB + DC}{۲}\right) \Rightarrow ۶AB = ۲DC \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{۱}{۳}$$

۲ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

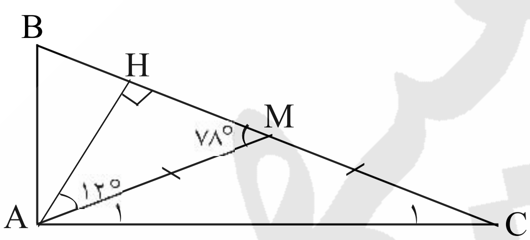


$$\left.\begin{array}{l} \frac{OA}{MN} = \frac{AQ}{QM} \\ \frac{OB}{MN} = \frac{BP}{PN} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{OA}{OB} = \underbrace{\frac{AQ}{QM} \times \frac{PN}{BP}}_{۱}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = ۱$$

تالس در ذوزنقه می‌گوید : $\frac{AQ}{QM} = \frac{BP}{PN}$

۳ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است. میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است:

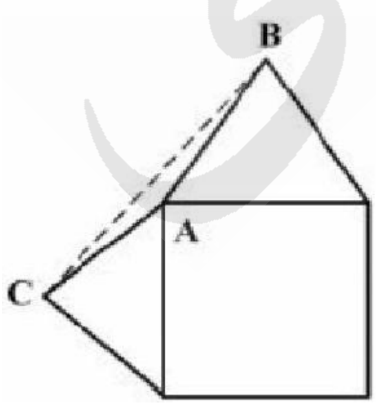


$$AM = \frac{۱}{۲}BC = MC \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱$$

$$A\widehat{M}H = \widehat{A}_۱ + \widehat{C}_۱ = ۲\widehat{C}_۱ = ۷۸° \Rightarrow \widehat{C}_۱ = ۳۹°$$

*نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، بین ارتفاع ومیانه وارد بر وتر برابر تفاضل دو زاویه حاده مثلث است.($M\widehat{A}H = \widehat{B} - \widehat{C}$)

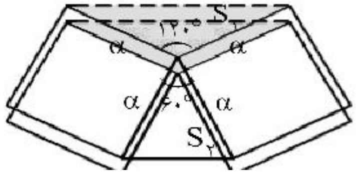
۴ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$S_{A\overset{\Delta}{B}C} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \operatorname{Sin} ۱۵۰° = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \operatorname{Sin} ۳۰°$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

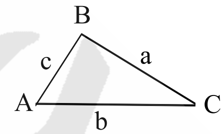
- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵



نسبت $S_۱$ به $S_۲$ را خواسته است. زوایای اطراف نقطه A برابر °۳۶۰ است.

پس زاویه منفرجه مثلث بالایی برابر °۱۲۰ است.

می‌دانیم مساحت هر مثلث ABC از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

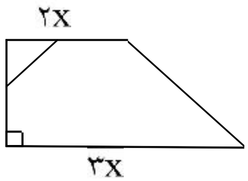


$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\, ab \,\text{Sin}\, C$$

$$\begin{cases} S_۱ = \frac{۱}{۲}\, a \times a \times \text{Sin}\, ۱۲۰° \\ S_۲ = \frac{۱}{۲}\, a \times a \times \text{Sin}\, ۶۰° \end{cases} \Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{\text{Sin}\, ۱۲۰°}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{\text{Sin}\, ۶۰°}} = ۱$$

توضیح: از آن جا که °۱۲۰ و °۶۰ مکمل یکدیگرند، مقدار Sin شان با هم برابر است.

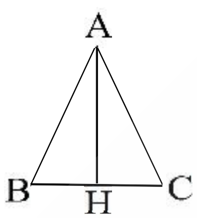
- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶



ذوزنقه $S = \frac{۱}{۲}(۳x + ۲x)h = \frac{۵}{۲}\, x\, h$

مثلث $S = \frac{۱}{۲}x \times \frac{h}{۲} = \frac{۱}{۴}xh \Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۱}{۱۰}$

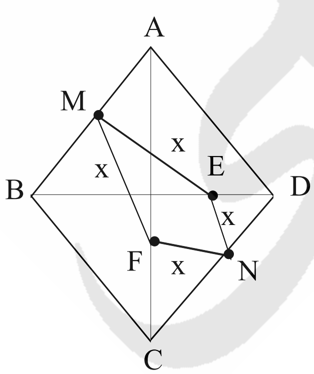
- یادآوری: ارتفاع وارد بر قاعده در مثلث متساوی‌الساقین میانهٔ قاعده نیز می‌باشد. ۷



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AH\,.\,BC = \frac{۱}{۲}۷ \times ۱۲ = ۴۲$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸

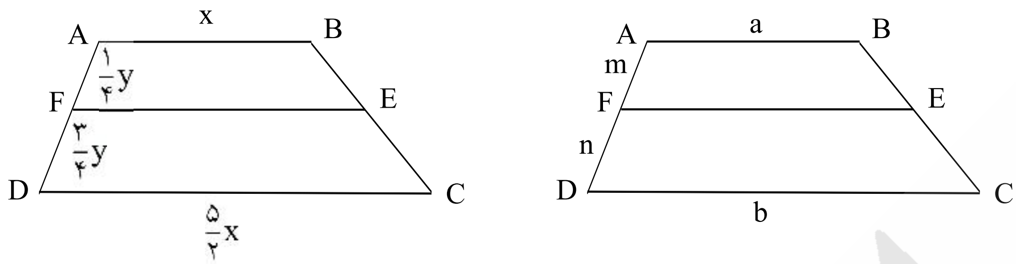


درنظر بگیرید نقاط M و N وسط های دو ضلع غیرمجاور چهارضلعی ABCD است و نقاط E و F وسط های دو قطر آن است و چهارضلعی MENF لوزی به ضلع x است. بنابر قضیه‌ی میان خط دو مثلث نتیجه می‌گیریم.

$BC = ۲MF = ۲EN = ۲x$ و $AD = ۲ME = ۲FN = ۲x$

پس $BC = AD$ یعنی دو ضلع غیرمجاور دیگر چهارضلعی ABCD برابرند.

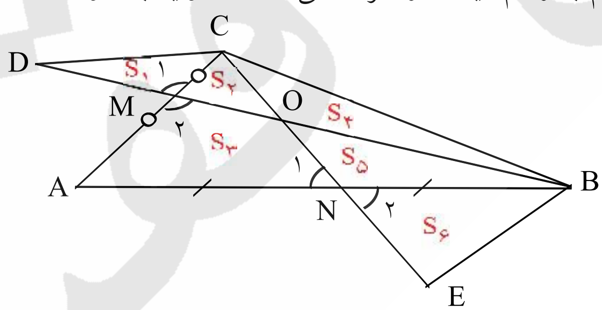
- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹



$$EF = \frac{na + mb}{m + n}$$

$$EF = \frac{\frac{3}{4}xy + \frac{5}{8}xy}{y} = \frac{11}{8}x$$

- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم با رسم میانه در هر مثلثی، مثلث اولیه به دو مثلث هم‌مساحت تبدیل می‌شود. ۱۰



$$\left.\begin{array}{l} BM \ \text{میانه} : S_2 + S_4 = S_3 + S_5 \\ CN \ \text{میانه} : S_2 + S_3 = S_4 + S_5 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} S_2 = S_5$$

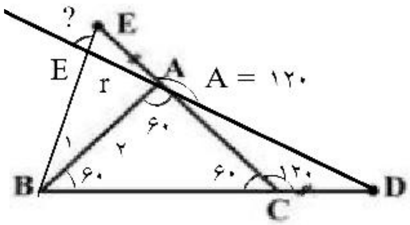
مثلث‌های DMC و MAB با یکدیگر هم‌نهشت هستند بنا بر حالت زیر:
می‌دانیم دو مثلث هم‌نهشت مساحت‌های یکسانی دارند.

$$\left.\begin{array}{l} MD = MB \\ MC = MA \\ \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} M\overset{\triangle}{A}B \cong M\overset{\triangle}{D}C \Rightarrow S_1 = S_3 + S_5 \quad \text{I}$$

از آن‌جا که $S_2 = S_5$ و از روابط I و II نتیجه می‌گیریم که $S_1 = S_6$

$$\frac{S_{DBC}}{S_{EBC}} = \frac{S_1 + S_2 + S_4}{S_6 + S_5 + S_4} = \frac{S_6 + S_5 + S_4}{S_6 + S_5 + S_4} = 1$$

۱۱ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$E\overset{\triangle}{A}B = A\overset{\triangle}{C}D \Rightarrow \begin{cases} AC = AB \\ CD = AE \\ \hat{C} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۱۲۰ \end{cases} \Rightarrow \hat{E} = \hat{D}$$

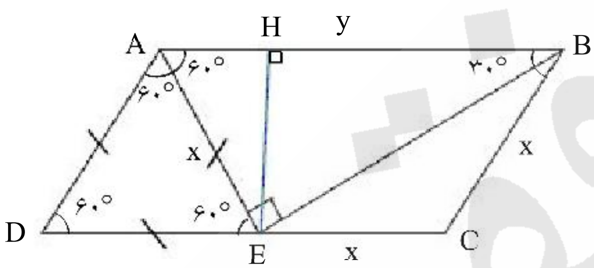
$$\hat{A}_۴ = \hat{B}_۱$$

$$\hat{F}_۱ = \hat{F}_۲$$

$$\hat{F}_۲ = \hat{E} + \hat{A}_۱ \xrightarrow[\hat{A}_۱ = \hat{A}_۴]{\hat{E} = \hat{D}} = F_۲ = D + A_۴ \xrightarrow{D_۲ + A_۴ = C = ۶۰} \hat{F}_۲ = ۶۰$$

$$\Rightarrow \hat{F}_۲ = \hat{F}_۱ \Rightarrow \hat{F}_۱ = ۶۰$$

۱۲ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$۲x + ۲y = ۱۲\sqrt{۳}$$

$$x + y = ۶\sqrt{۳}$$

$$\text{Cos}\,۶۰^\circ = \frac{x}{y} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x = y$$

$$x + y = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow ۳x = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow x = ۲\sqrt{۳}$$

$$y = ۴\sqrt{۳}$$

ارتفاع : $EH = \text{Sin}\,۶۰^\circ \times x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲\sqrt{۳} = ۳$

متوازی‌الاضلاع $= EH \times y = ۳ \times ۴\sqrt{۳} = ۱۲\sqrt{۳}$

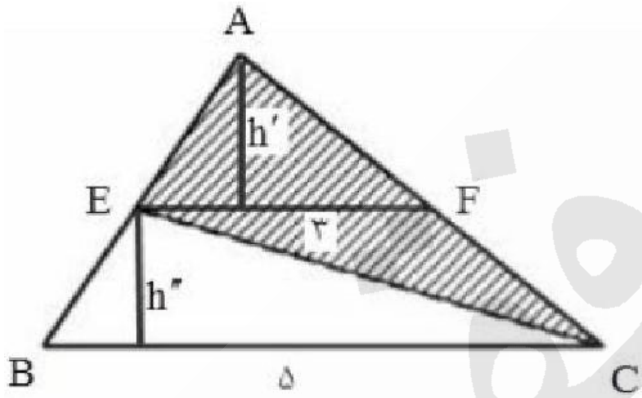
۱۳ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است. پاره‌خط رسم شده در ذوزنقه‌ی موجود، پاره‌خط میانگین است.
نکته: اگر پاره‌خط میانگین در ذوزنقه، قطرهای آن‌را در نقاط E و F قطع کند آن‌گاه EF برابر است با نصف تفاضل طول قاعده‌های ذوزنقه.

$$AB = x\ ,\ CD = ۳x \rightarrow EF = \frac{CD - AB}{۲} = \frac{۳x - x}{۲} = x$$

بنابراین چهارضلعی ABEF در حالت کلی متوازی‌الاضلاع است (که البته در این سؤال مستطیل است) و ارتفاع آن هم نصف ارتفاع ذوزنقه است (به خاطر تالش موجود در شکل). بنابراین داریم:

$$\frac{S_{ABEF}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{h}{۲}x}{\frac{h}{۲}(x + ۳x)} = \frac{۱}{۴}$$

۱۴ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\frac{EF}{BC} = \frac{۳}{۵}$$

$$\frac{S_{B\overset{\Delta}{E}C}}{S_{BCFE}} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{S_{E\overset{\Delta}{F}C}}{S_{BCFE}} = \frac{۳}{۸}$$

$$\frac{S_{A\overset{\Delta}{E}F}}{S_{A\overset{\Delta}{B}C}} = \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{A\overset{\Delta}{E}F}}{S_{BCFE}} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\frac{۳}{۸} + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

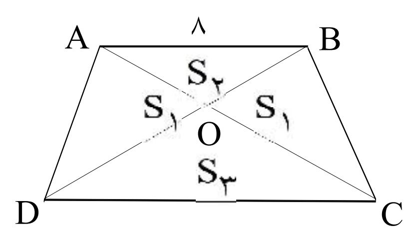
۱۵ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر ذوزنقه با رسم دو قطر، دو مثلث بین دو قطر و ساق‌ها هم‌مساحت هستند و مساحت هرکدام واسطهٔ هندسی بین مساحت مثلث‌های بین دو قطر و دو قاعده است، یعنی در شکل زیر داریم:
می‌دانیم در ذوزنقه‌ها دو مثلث ایجاد شده با دو قطر و دو ساق هم‌مساحت‌اند:

$$S_{OAD} = S_{OBC} = S_۱$$

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AO}{CO} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{S_۲}{S_۱} = \frac{OA}{OC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow S_۲ = \frac{۲}{۳}S_۱$$

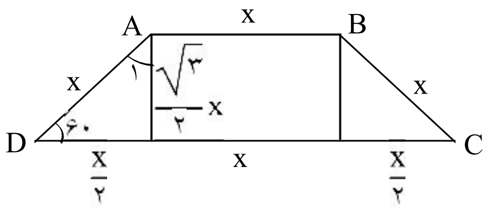
$$\frac{S_۱}{S_۳} = \frac{OA}{OC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow S_۳ = \frac{۳}{۲}S_۱$$



$$S_{ABC} = ۲S_۱ + S_۲ + S_۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}h(AB + CD) = ۲S_۱ + \frac{۲}{۳}S_۱ + \frac{۳}{۲}S_۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۱۰)(۸ + ۱۲) = \left(۲ + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۲}\right)S_۱$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ = \frac{۱۲ + ۴ + ۹}{۶}S_۱ \Rightarrow S_۱ = \frac{۶۰۰}{۲۵} = ۲۴$$

۱۶ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر اندازه‌ی ساق ذوزنقه x باشد، آن‌گاه $AD = AB = BC = x$.
ارتفاع‌های AH و 'BH را رسم می‌کنیم. در این صورت دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADH و 'BCH با داشتن وتر و یک ضلع قائمه، مساوی همنهشت هستند، پس $DH = CH'$ و چون $\widehat{A}_۱ = ۳۰^\circ$ پس $DH = CH' = \frac{AD}{۲} = \frac{x}{۲}$.



از طرفی چهارضلعی ABH'H مستطیل است، پس $HH' = x$ در نتیجه $DC = ۲x$. داریم:

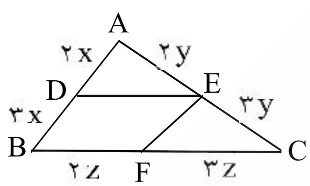
$$\text{محیط ذوزنقه} = ۳۰ \Rightarrow x + x + x + ۲x = ۳۰ \Rightarrow ۵x = ۳۰ \Rightarrow x = ۶$$

بنابراین $AB = ۶$ و $DC = ۱۲$ در ضمن در مثلث قائم‌الزاویه ADH نتیجه می‌گیریم:

$$\widehat{D} = ۶۰ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AD = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۶) = ۳\sqrt{۳}$$

۱۷ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$AD = ۲x \ , \ \frac{AD}{BD} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow BD = ۳x$$



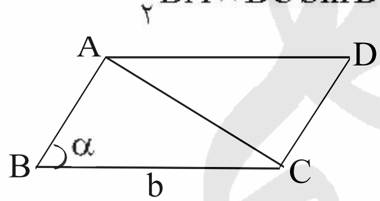
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AE = ۲y \ , \ EC = ۳y$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow \frac{۳y}{۲y} = \frac{CF}{BF} \Rightarrow \frac{CF}{BF} = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow CF = ۳Z \ , \ BF = ۲Z$$

حالا مساحت متوازی‌الاضلاع و مساحت مثلث ABC را با کمک سینوس زاویه B به دست می‌آوریم.

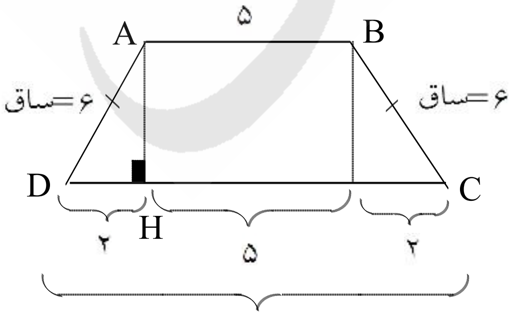
$$\frac{S_{BDEF}}{S_{ABC}} = \frac{BD \times BF \operatorname{Sin} B}{\frac{۱}{۲}BA \times BC \operatorname{Sin} B} = \frac{(۳x)(۲z)}{\frac{۱}{۲}(۵x)(۵z)} = \frac{۱۲}{۲۵} = \frac{۴۸}{۱۰۰} = ۴۸\%$$



نکته: مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن‌ها است:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}a.b.\operatorname{Sin}\alpha \Rightarrow S_{ABCD} = ۲S_{ABC} = a.b.\operatorname{Sin}\alpha$$

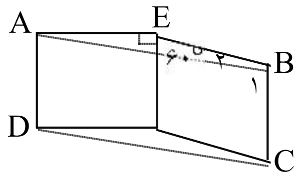
۱۸ - گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$$\text{ارتفاع ذوزنقه} = AH = \sqrt{AD^۲ - DH^۲} = \sqrt{۶^۲ - ۲^۲} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{۲} = \frac{(۵+۹) \times ۴\sqrt{۲}}{۲} = ۲۸\sqrt{۲}$$

۱۹ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث AEB متساوی‌الساقین است.

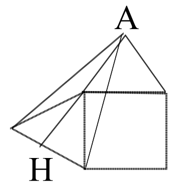


$$\hat{E} = ۹۰ + ۶۰ = ۱۵۰^\circ$$

$$AE = EB = EF \Rightarrow E\hat{A}B = E\hat{B}A = ۱۵^\circ$$

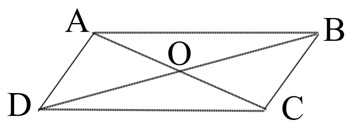
$$\hat{B}_۲ = ۱۵^\circ \Rightarrow B_۱ = ۱۲۰^\circ - ۱۵^\circ = ۱۰۵^\circ$$

۲۰ - گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



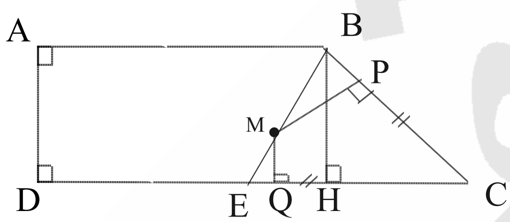
$$AH = ۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲) = ۲ + \sqrt{۳} \;;\; S = \frac{۲\left(۲ + \sqrt{۳}\right)}{۲} = ۲ + \sqrt{۳}$$

۲۱ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر ۴ مثلث به‌وجود آمده مساحت‌های برابر دارند. زیرا قطرها منصف یکدیگرند و میانه مثلث مساحت را نصف می‌کند. در ضمن در هر مثلث با اضلاع a و b که زاویه بین آن‌ها α باشد، مساحت با $\frac{۱}{۲}ab\,Sin\alpha$ برابر است.



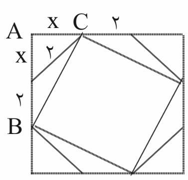
$$S_{ABCD} = ۴S_{AOB} = ۴\left(\frac{۱}{۲}OA.OB.S:۱۳۵^\circ\right) \Rightarrow S_{ABCD} = ۲(۴)(۶)\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲۴\sqrt{۲}$$

۲۲ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه روی قاعده مثلث متساوی‌الساقین تا دو ساق مثلث برابر با ارتفاع وارد بر ساق است و از آن‌جا که ذوزنقه قائم‌الزاویه است، یعنی:



$$BC = EC \rightarrow MP + MQ = BH = AD$$

۲۳ - گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل ابتدا x را به‌دست می‌آوریم.



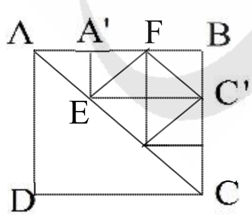
$$x^۲ + x^۲ = ۲^۲ \Rightarrow x = \sqrt{۲}$$

$$A\overset{\triangle}{B}C : BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow BC^۲ = \left(۲ + \sqrt{۲}\right)^۲ + \left(\sqrt{۲}\right)^۲$$

$$= ۶ + ۴\sqrt{۲} + ۲ = ۸ + ۴\sqrt{۲} = ۴\left(۲ + \sqrt{۲}\right)$$

مسلماً $BC^۲$ مساحت مربع کوچک‌تر است بنابراین مساحت مربع کوچک‌تر $۴\left(۲ + \sqrt{۲}\right)$ است.

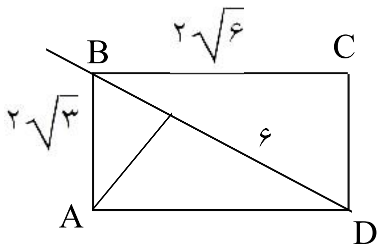
۲۴ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کوچکترین مثلث، مثلث $\overset{\frown}{BFC'}$ با تقسیم‌بندی شکل داریم:



$$\left.\begin{array}{l} S_{BFC'} = \frac{۱}{۹} S_{ABC} \\ S_{ABC} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{BFC'} = \frac{۱}{۱۸} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = ۱۸ S_{BFC'}$$

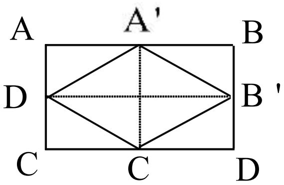
۲۵ - گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$d=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۲۴+۱۲}=\sqrt{۳۶}$$
$$d\ (\text{قطر})=۶$$

$$۶\times h=۲\sqrt{۳}\times ۲\sqrt{۶}\Rightarrow h=\frac{۲\sqrt{۱۸}}{۳}=۲\sqrt{۲}$$

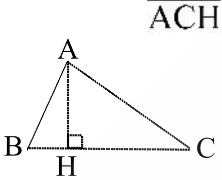
۲۶ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left.\begin{array}{l} S_{ABCD}\ \text{مستطیل}=a\times b \\ S_{A'B'C'D'}\ \text{لوزی}=\dfrac{\text{قطر کوچک}\times\text{قطر بزرگ}}{۲}=\dfrac{a\times b}{۲}\end{array}\right\}\dfrac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{\text{لوزی}}}=۲$$

۲۷ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ABH}\sim\widehat{ABC}\Rightarrow\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BH}{AB}\Rightarrow AB^۲=BH\,.\,BC\\ \widehat{ACH}\sim\widehat{ABC}\Rightarrow\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{CH}{AC}\Rightarrow AC^۲=CH.BC\\ \text{طبق فرض}:\ AC=۲AB\end{array}\right\}CH.BC=۴BH.BC\Rightarrow CH=۴BH$$

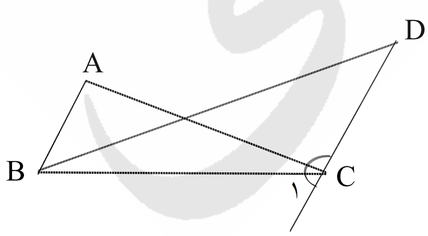


بنابراین خواهیم داشت: $BH=\frac{۱}{۵}BC$ درنتیجه: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ABM}}=\dfrac{\frac{AH\times BC}{۲}}{\frac{AM\,.\,BM}{۲}}=\dfrac{BC}{BH}=۵$

۲۸ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\hat{C}_۱=\frac{۱۸۰-۶۴}{۲}=۵۸$$

در مثلث $B\overset{\triangle}{C}D$



$$\hat{C}=۱۸۰-۵۸=۱۲۲$$
$$\hat{B}=\frac{۳۸}{۲}=۱۹$$
$$\hat{D}=۱۸۰-(۱۲۲+۱۹)=۳۹$$

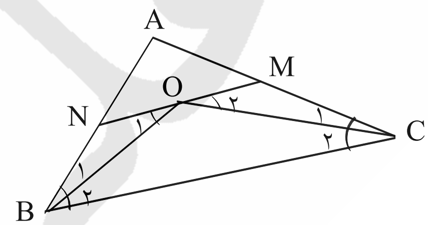
۲۹ - گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. از تساوی دو مثلث قائم‌الزاویه نتیجه می‌شود که مثلث سایه زده قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم $\sqrt{۶^۲+(۲\sqrt{۳})^۲}=۴\sqrt{۳}$ است. پس مساحت آن ۲۴ واحد مربع است.

۲۰ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases}\hat{B}_1=\hat{B}_2\\ \hat{B}_2=\hat{O}_1\end{cases}\Rightarrow \hat{B}_1=\hat{O}_1\Rightarrow O\overset{\triangle}{M}B \ \text{متساوی الساقین} \Rightarrow BM=OM$$

$$\begin{cases}\hat{C}_1=\hat{C}_2\\ \hat{C}_2=\hat{O}_2\end{cases}\Rightarrow \hat{C}_1=\hat{O}_2\Rightarrow O\overset{\triangle}{N}C \ \text{متساوی الساقین} \Rightarrow CN=ON$$

بنابراین:



$$BM+CN=OM+ON=MN$$

۲۱ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون BO نیمساز است پس:

$$\left.\begin{array}{l}M\hat{B}O=C\hat{B}O\\ MN \parallel BC\Rightarrow M\hat{O}B=C\hat{B}O\end{array}\right\}\Rightarrow M\hat{B}O=M\hat{O}B$$

در نتیجه $MO=MB$ و به طور مشابه $ON=NC$ به این ترتیب:

$$AMN\ \text{محیط مثلث} = AM+MO+NO+NA=AM+MB+NC+NA$$
$$=AB+AC=11+16=27$$

۲۲ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قطر BD را رسم می‌کنیم.

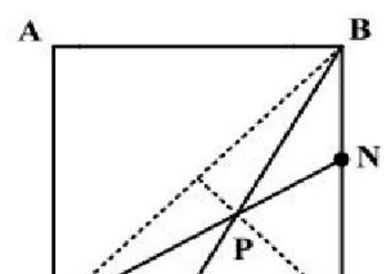
نقطهٔ P، نقطهٔ همرسی میانه‌ها (مرکز ثقل) مثلث $D\overset{\triangle}{B}C$ است.

$$S_{B\overset{\triangle}{P}D}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{6}S_{ABCD}$$

$$S_{BPC}=\frac{1}{6}S_{ABCD}$$

$$BC\ \text{وسط}\ N\Rightarrow S_{N\overset{\triangle}{P}C}=\frac{1}{12}S_{ABCD}$$

$$DC\ \text{وسط}\ N\Rightarrow S_{M\overset{\triangle}{P}C}=\frac{1}{12}S_{ABCD}$$



۲۳ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A\overset{\triangle}{B}E \rightarrow BE^2 = AB^2 + AE^2 = AB^2 + \frac{AC^2}{4}$$

$$A\overset{\triangle}{C}N \rightarrow CN^2 = AC^2 + AN^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$AM = \frac{BC}{2}$ در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است $\Rightarrow AM^2 = \frac{BC^2}{4}$

$$AM^2 + BE^2 + CN^2 = \frac{BC^2}{4} + AB^2 + \frac{AC^2}{4} + AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

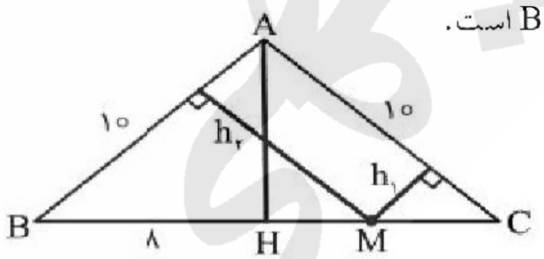
۲۴ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$A\overset{\triangle}{M}C \sim A'\overset{\triangle}{B}C \Rightarrow \frac{AC}{A'C} = \frac{AM}{A'B} = \frac{MC}{BC} =$ نسبت تشابه

$$AC = BC.\ \cos 2\alpha = BC.\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\ BC$$

$$A'C = BC.\ \cos \alpha = BC.\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\ BC$$

۲۵ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ABC متساوی‌الساقین، پس H وسط BC است.



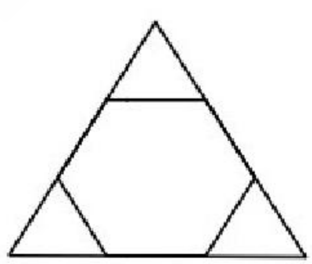
$$ABH: AH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 16 = 48$$

$$S_{ABC} = S_{AMC} + S_{AMB} \Rightarrow 48 = 5h_1 + 5h_2$$

$$\Rightarrow h_1 + h_2 = 9/6$$

۲۶ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت ۶ ضلعی $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع اصلی است.



$$S = \frac{2}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{36\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$$

۲۷ - گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$OA = OB = \sqrt{۲}$$

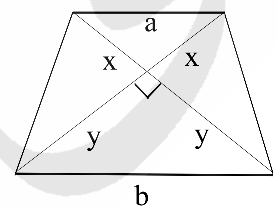
$$AB^{۲} = ۲ + ۲ = ۴ \Rightarrow AB = ۲$$

$$S_{O\hat{M}B} = \frac{OM \times BH}{۲} = \frac{\sqrt{۲} \times ۱}{۲} = ۴\sqrt{۲}$$

مساحت ۸ ضلعی منتظم $= ۸\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۴\sqrt{۲}$

مساحت ناحیه بین ۸ ضلعی و مربع $= ۴\sqrt{۲} - ۴ = ۴\left(\sqrt{۲} - ۱\right)$

۲۸ - گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$a^{۲} = x^{۲} + x^{۲} = ۲x^{۲} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{۲}}$$

$$b^{۲} = y^{۲} + y^{۲} = ۲y^{۲} \Rightarrow y = \frac{b}{\sqrt{۲}}$$

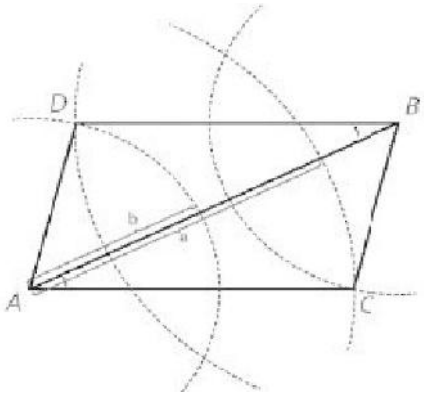
در نتیجه: مساحت ذوزنقه $= \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۲}y^{۲} + \frac{۱}{۲}x.y + \frac{۱}{۲}x.y$

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} \text{مساحت ذوزنقه} = \frac{۱}{۴}(a+b)^{۲} \\ \frac{a+b}{۲} = ۳ \Rightarrow a + b = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۴}(۶)^{۲} = ۹$$

۲۹ - گزینه‌ی ۲ صحیح است. می‌دانیم میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است پس اندازه‌ی وتر ۱۶ می‌باشد.

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\ ,\ a^{۲} + b^{۲} = ۲۵۶\right) \Rightarrow b = a\sqrt{۳}\ ,\ a^{۲} + ۳a^{۲} = ۲۵۶ \Rightarrow a = ۸$$



۴۰ - گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

برای اینکه ACBD متوازی الاضلاع به اضلاع $a = ۷$ و $b = ۳$ تولید شود، باید شرط مثلث بودن ABD ایجاد شود.

$$a - b < AB < a + b \Rightarrow ۷ - ۳ < AB < ۳ + ۷$$

$$۴ < AB < ۱۰$$

پس: AB می‌تواند ۸ باشد.