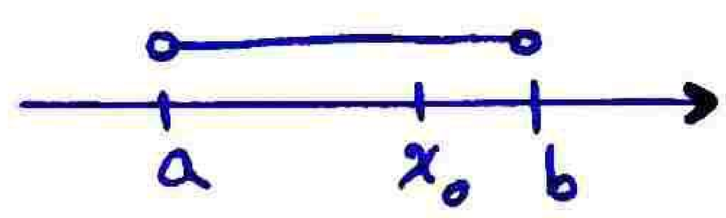
فصل ۵ : حد و پیوستگی

1 : همسایگی و همسایگی محذوف :

بازه‌ی $(1,5)$ را در نظر بگیرید، واضح است که ۲ عضوی از این بازه می‌باشد، بنابراین گوییم $(1,5)$ یک همسایگی برای عدد ۲ است.

همچنین ۳٫۷ نیز درون بازه‌ی $(1,5)$ است پس این بازه یک همسایگی برای ۳٫۷ نیز است.

در حالت کلی: اگر x_0 یک عدد حقیقی متعلق به بازه‌ی (a,b) باشد، گوییم (a,b) یک همسایگی برای عدد x_0 است:



مثال: سه همسایگی برای عدد ۱٫۵- بنویسید.

بازه‌هایی همچون $(-2,1)$ ، $(-2,100)$ و $(-1000,5)$ و ... همسایگی‌هایی برای ۱٫۵- هستند زیرا ۱٫۵- عضو هر کدام از آنهاست.

توجه: همسایگی یک عدد، به صورت بازه‌ی باز همچون (a,b) می‌باشد که a و b هیچکدام $+\infty$ یا $-\infty$ نمی‌باشند بنابراین بازه‌های $[-1,2)$ ، $(-1,2]$ ، $[-1,2]$ ، $(-\infty,3)$ و $(2,+\infty)$ همسایگی محسوب نمی‌شوند.

مثال: کدامیک از موارد زیر نمایشگر یک همسایگی است؟

الف) $x > x^2 \longrightarrow x - x^2 > 0$

$-\infty$		0		1		$+\infty$
	$-$		$+$		$-$	

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= (0,1)$ یک همسایگی است.

ب) $|x-3| < 2 \longrightarrow -2 < x-3 < 2 \xrightarrow{+3} 1 < x < 5 \Rightarrow$ مجموعه جواب $= (1,5) \rightarrow$ همسایگی است

پ) $|x+1| > 3 \longrightarrow \begin{cases} x+1 > 3 \Rightarrow x > 2 \\ x+1 < -3 \Rightarrow x < -4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ مجموعه جواب $= (-\infty,-4) \cup (2,+\infty)$ همسایگی نیست

ت) $|x-2| \leq 5 \longrightarrow -5 \leq x-2 \leq 5 \xrightarrow{+2} -3 \leq x \leq 7 \Rightarrow$ مجموعه جواب $= [-3,7]$ همسایگی نیست

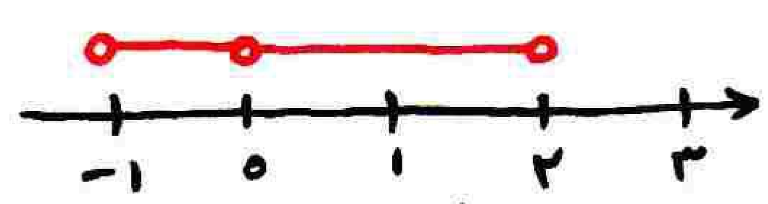
مثال: به ازای چه مقادیری از x ، بازه‌ی $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ است؟

$$2 \in (x-1, 2x+3) \Rightarrow \begin{cases} x-1 < 2 \Rightarrow x < 3 \\ 2x+3 > 2 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow -\frac{1}{2} < x < 3$$

نکته: اجتماع دو همسایگی یک عدد، یک همسایگی برای آن عدد می باشد. همچنین اشتراک آنها نیز یک همسایگی برای آن عدد است.

توجه: اگر از همسایگی (a,b) عددی مانند x_0 را حذف کنیم، آن را به عنوان یک همسایگی محذوف x_0 معرفی می کنیم و به صورت $(a,b)-\{x_0\}$ یا $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ نمایش می دهیم.

به عنوان نمونه $(-1,2)-\{0\}$ یک همسایگی محذوف صفر است، که به صورت $(-1,0)\cup(0,2)$ نیز نمایش می دهیم:



مثال: کدام یک از موارد زیر نمایشگر یک همسایگی محذوف است؟

الف) $0<|x-4|<5$

می دانیم، همواره قدر مطلق نامنفی است یعنی $|x-4|\geq 0$ است پس از $0<|x-4|$ نتیجه می شود که:

$|x-4|\neq 0 \Rightarrow x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4$

از طرفی: $|x-4|<5 \Rightarrow -5<x-4<5 \xrightarrow{+4} -1<x<9$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-1,9)-\{4\}$

همسایگی محذوف 4 است.

ب) $\frac{1}{|x-2|}>1$

$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$

$\frac{1}{|x-2|}>1 \xrightarrow{\times|x-2|} 1>|x-2| \Rightarrow -1<x-2<1 \xrightarrow{+2} 1<x<3$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(1,3)-\{2\}$

همسایگی محذوف 2 است

پ) $\frac{x+1}{x^2}>0$

$-\infty$		-1		0		$+\infty$
	$-$	0	$+$	ت.ن	$+$	

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-1,+\infty)-\{0\}$

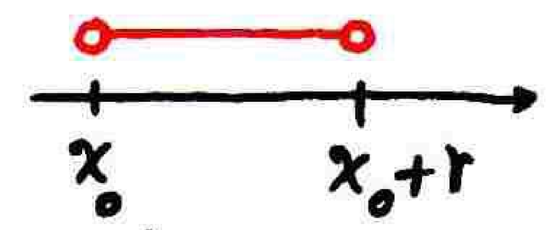
همسایگی محذوف نیست

مثال: به ازای چه مقدار از m، اجتماع روبرو، یک همسایگی محذوف است؟ $(2,2m-1)\cup(m+2,11)$

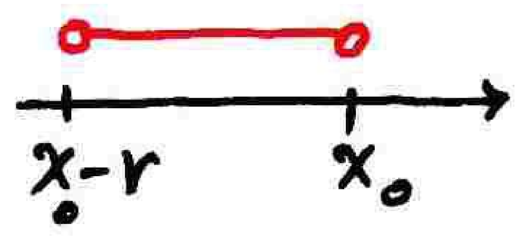
به شرطی $(a,x_0)\cup(x_1,b)$ یک همسایگی محذوف است که $x_1=x_0$ باشد، بنابراین:

$2m-1=m+2 \Rightarrow m=3$

توجه: اگر x_0 عدد حقیقی دلخواه و ۲ عدد مثبتی باشد آنگاه بازه‌ی (x_0, x_0+2) یک همسایگی راست x_0 معرفی می‌شود:



همچنین بازه‌ی (x_0-2, x_0) یک همسایگی چپ x_0 است:



به طور مثال بازه‌ی $(2, 5)$ یک همسایگی راست عدد ۲ و یک همسایگی چپ عدد ۵ است.

مثال: k را چنان بیابید که بازه‌ی $(3k-1, k+4)$ یک همسایگی راست عدد ۴ باشد.

$$3k-1=4 \Rightarrow k=\frac{5}{3}$$

مثال: درصورتی که مجموعه جواب نامعادله $x^2+ax+b<0$ یک همسایگی راست ۱ و یک همسایگی چپ ۴ باشد، a و b را بیابید.

واضح است که آن همسایگی به صورت $(1,4)$ باشد، یعنی مجموعه جواب نامعادله $(1,4)$ است.

پس $x=1$ و $x=4$ ریشه‌های چندجمله‌ای x^2+ax+b هستند. پس این چندجمله‌ای به صورت

$(x-1)(x-4)$ یعنی x^2-5x+4 است، درنتیجه: $a=-5$ و $b=4$

✦حل چند نمونه سوال✦

۱- یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای عدد ۲ بنویسید.

$(1,3)$: همسایگی ✓ $(1,3)-\{2\}$: همسایگی محذوف ✓ $(2,3)$: همسایگی راست ✓ $(1,2)$: همسایگی چپ ✓

۲- به ازای چه مقادیری از m، مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^2+mx-3<0$ یک همسایگی عدد ۳ است؟

باید به ازای $x=3$، نامساوی برقرار باشد پس: $9+3m-3<0 \Rightarrow m<-2$

۳- دامنه‌ی کدام یک از توابع زیر یک همسایگی یا همسایگی محذوف است؟

الف) $y=\frac{x^2+1}{x-1} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty) \Rightarrow$ همسایگی و همسایگی محذوف نیست

ب) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow 1-x^2>0$

$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$-$	0 $+$	0	$-$

$\Rightarrow D=(-1,1) \rightarrow$ همسایگی است ✓

پ) $y = \log_x (4-x^2)$

$$\begin{cases} 4-x^2>0 \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} -\infty & & -2 & & 2 & & +\infty \\ & - & | & + & | & - & \end{array} \Rightarrow -2<x<2 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D=(0,2)-\{1\}$$

همسایگی محذوف 1 است.

۴- به ازای چه مقادیری از m مجموعه‌ی $(m+5, 4) \cup (2, m^2-1)$ یک همسایگی محذوف است؟

ابتدا مجموعه را به صورت $(2, m^2-1) \cup (m+5, 4)$ مرتب می‌کنیم. بنابراین:

$m^2-1 = m+5 \Rightarrow m^2-m-6=0 \Rightarrow (m-3)(m+2)=0$

$m=3 \longrightarrow$ مجموعه $= (2, 8) \cup (8, 4) \longrightarrow$ بازه‌ی $(8, 4)$ غیرمنطقی است $\Rightarrow m=3$ غیرقابل قبول

$m=-2 \Rightarrow$ مجموعه $= (2, 3) \cup (3, 4) \longrightarrow$ همسایگی محذوف عدد 3 است

۵- درصورتی که $(0, m+n) \cup (mn+2, 7)$ همسایگی محذوف عدد 5 باشد مقدار m^2+n^2 را بدست آورید.

مرتب $\Rightarrow (0, m+n) \cup (mn+2, 7) \Rightarrow m+n=5$ و $mn+2=5 \Rightarrow mn=3$

$m^2+n^2 = (m+n)^2 - 2mn = (5)^2 - 2(3) = 25-6 = 19$

۶- a و b را چنان بیابید که بازه‌ی $(2a-b, a+b)$ یک همسایگی راست عدد 3 و یک همسایگی چپ عدد 5 باشد.

بنابراین: $(2a-b, a+b) = (3, 5) \Rightarrow \begin{cases} 2a-b=3 \\ a+b=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=\frac{8}{3}, b=\frac{7}{3}$

۷- با فرض $a<b$، حداقل اختلاف دو مقدار a و b را چنان بیابید که اشتراک همسایگی‌های $(a-1, a+1)$ و $(b-1, b+1)$ برابر تهی باشد.

$(a-1, a+1) \cap (b-1, b+1) = \varnothing \Rightarrow a+1 \leqslant b-1 \Rightarrow 2 \leqslant b-a$

بنابراین حداقل اختلاف دو عدد a و b برابر 2 است.

۲- مفهوم حد و فرایندهای حدی :

وقتی از حد صحبت می‌کنیم مجبور هستیم به جای صحبت از مقادیر مشخص و دقیق، در مورد نزدیک شدن بسیار بسیار زیاد به یک عدد صحبت کنیم. به این مفهوم "میل کردن" گفته می‌شود.

وقتی متغیر x به سمت عددی مانند ۲ میل کرده و بسیار بسیار به آن نزدیک می‌شود، اما به آن نمی‌رسد را با نماد $x \to 2$ نمایش می‌دهیم. در این حالت x ممکن است هر یک از مقادیر همسایگی چپ ۲ یعنی ۱٫۹ ، ۱٫۹۹ ، ۱٫۹۹۹ و ... یا مقادیر همسایگی راست ۲ مانند ۲٫۱ ، ۲٫۰۱ ، ۲٫۰۰۱ و ... را گرفته ولی هیچگاه $x=2$ را نخواهد گرفت.

مفهوم عامیانه‌ی حد این است که وقتی مقدار x به سمت یک عدد خاص مانند a میل کند $(x \to a)$ مقدار L در تابع $f(x)=L$ به چه عددی میل می‌کند؟ جواب این سؤال همان حد تابع $f(x)$ در $x=a$ است که به صورت $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ نوشته می‌شود.

به عنوان نمونه رفتار تابع $f(x) = x+5$ را در همسایگی $x=3$ بررسی می‌کنیم. برای این منظور مقادیر تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچکتر از ۳، که به تدریج از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شوند و نیز برخی مقادیر بزرگتر از ۳، که به تدریج از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شوند، محاسبه می‌کنیم :

x	۲٫۹	۲٫۹۹	۲٫۹۹۹	$\longrightarrow$	۳	$\longleftarrow$	۳٫۰۰۱	۳٫۰۱	۳٫۱
$f(x)$	۷٫۹	۷٫۹۹	۷٫۹۹۹	$\longrightarrow$	۸	$\longleftarrow$	۸٫۰۰۱	۸٫۰۱	۸٫۱

با توجه به جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که، با نزدیک شدن x به عدد ۳ (از راست و چپ) مقادیر $f(x)$ به عدد ۸ نزدیک می‌شوند، بنابراین گوییم حد تابع $f(x)$ در $x=3$ برابر ۸ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 8$$

مثال : با بررسی رفتار تابع $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ در همسایگی $x=2$ ، به کمک جدول مقادیر، حد آن را در $x=2$ بدست آورید.

تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ به ازای هر حقیقی x به جز ۲ تعریف شده است. لذا به ازای هر $x\neq 2$ ،

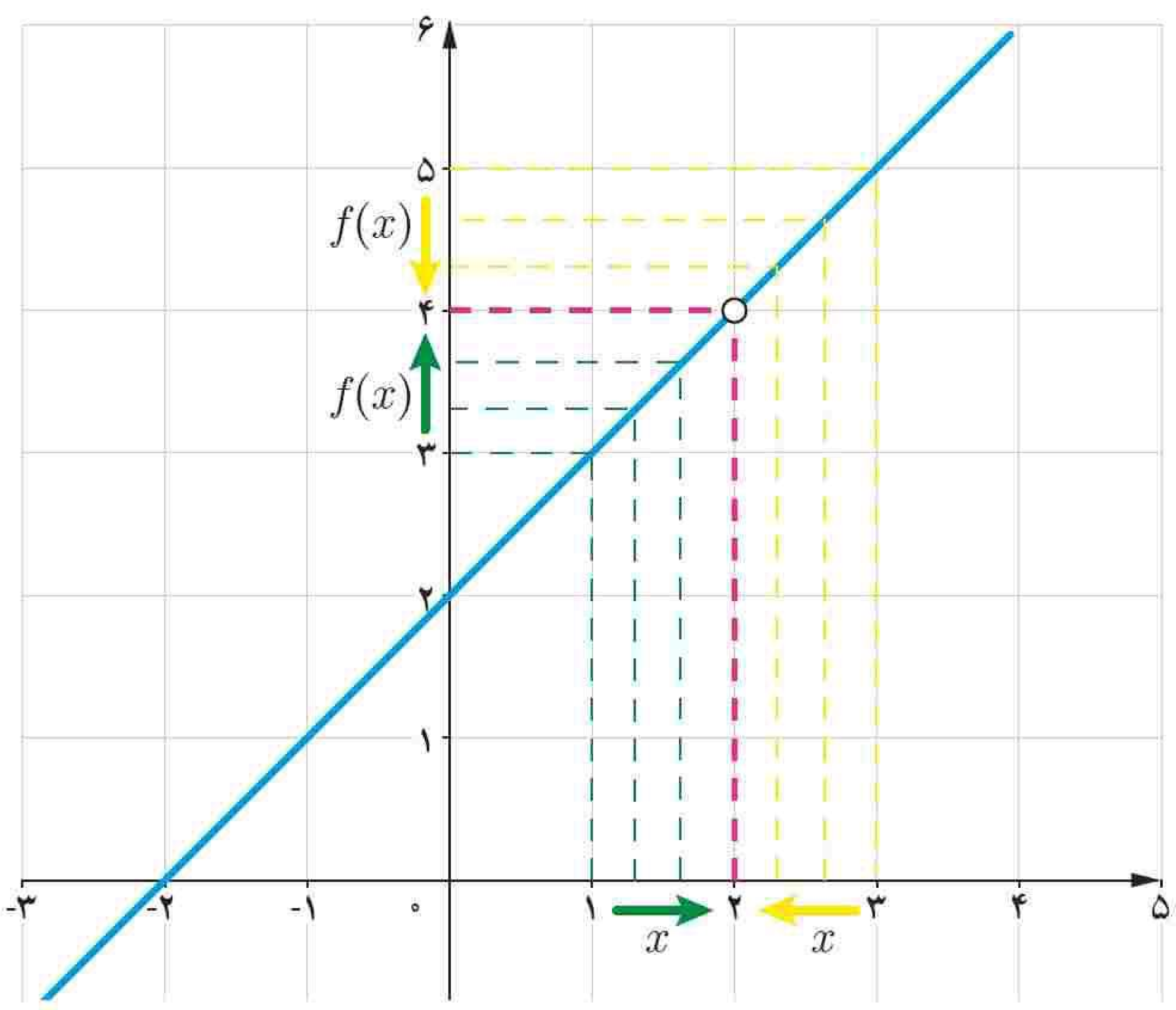
ضابطه‌ی تابع را می‌توان ساده کرد: $f(x)=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=x+2$

بنابراین جدول مقادیر زیر را برای $f(x)=x+2$ در همسایگی محذوف ۲ می‌نویسیم:

x	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹ $\rightarrow$	۲	$\leftarrow$ ۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱
$f(x)$	۳٫۹	۳٫۹۹	۳٫۹۹۹ $\rightarrow$	۴	$\leftarrow$ ۴٫۰۰۱	۴٫۰۱	۴٫۱

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=4$$

توجه: روش دیگر برای بررسی رفتار تابع $f(x)$ در همسایگی $x=a$ ، استفاده از نمودار آن تابع است. به عنوان نمونه، مثال قبل را بررسی می‌کنیم.

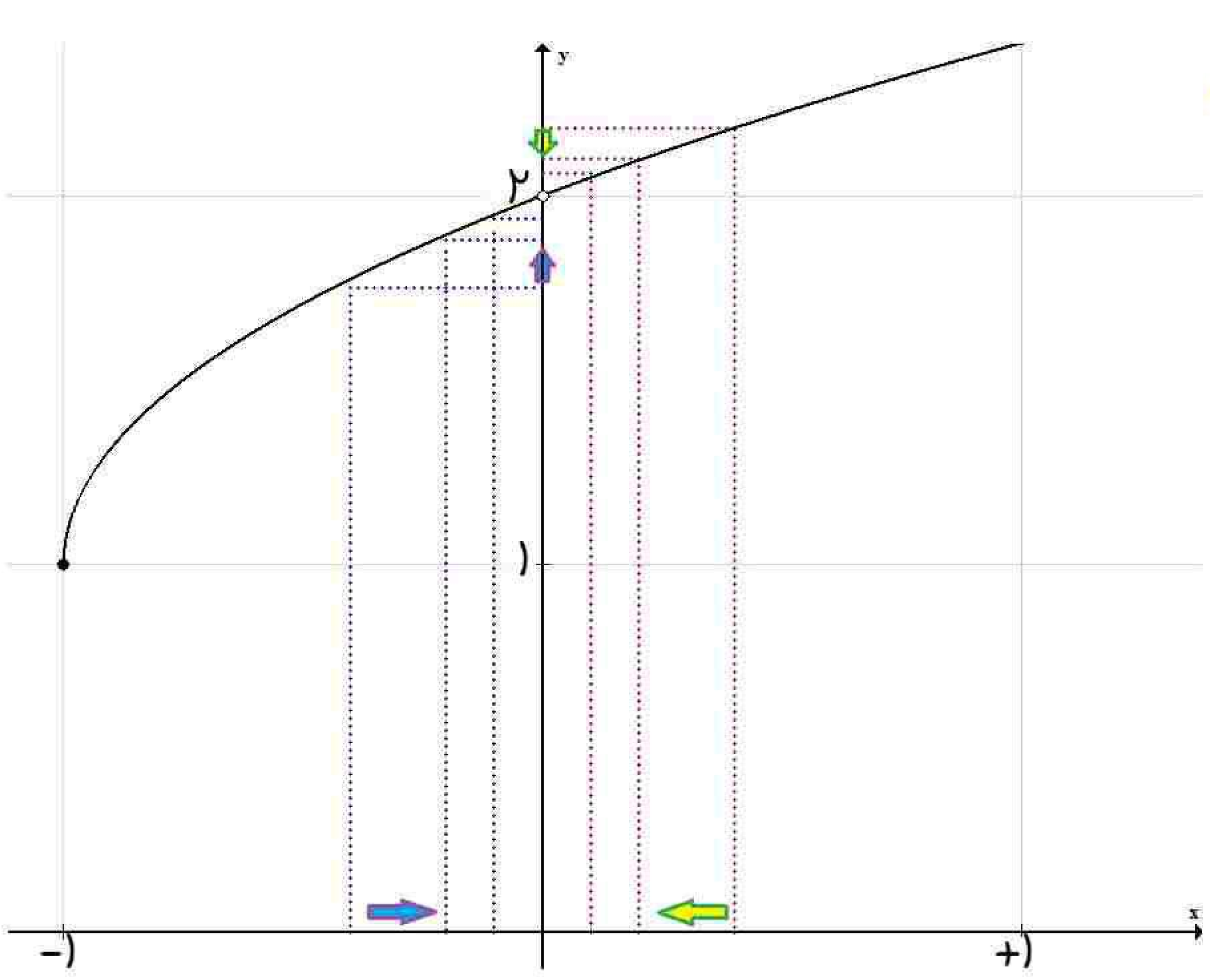


طبق شکل روبرو، نمودار تابع $f(x)=x+2$ ؛ $x\neq 2$ رسم شده و مشاهده می‌شود، وقتی x را با مقادیر بزرگتر یا کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌کنیم، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند بنابراین: $\lim_{x\to 2} f(x)=4$

مثال: با استفاده از نمودار، حد تابع $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ را در $x=0$ بدست آورید.

تابع f به ازای $x=0$ تعریف نشده است. لذا به ازای $x\neq 0$ ، ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}{\cancel{x}}=\sqrt{x+1}+1$$



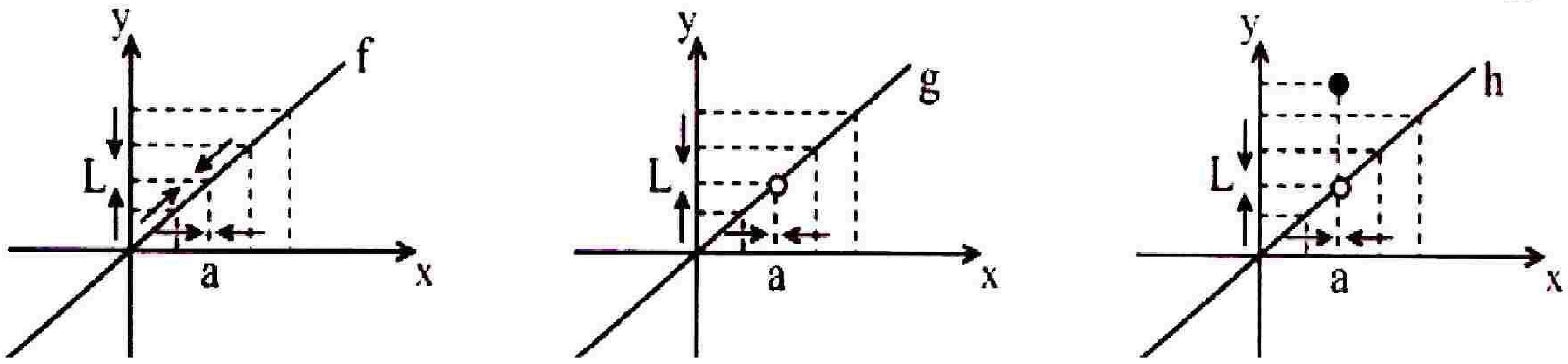
بنابراین نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+1}+1$ ؛ $x\neq 0$ را رسم می‌کنیم.

مطابق شکل، وقتی x را با مقادیر بزرگتر یا کوچکتر از صفر به صفر نزدیک می‌کنیم، مقادیر f به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، بنابراین

$$\lim_{x\to 0} f(x)=2$$

توجه: حد تابع در یک نقطه به مقدار تابع در آن نقطه اصلاً بستگی ندارد. بلکه فقط و فقط

به رفتار تابع در اطراف آن نقطه بستگی دارد. به نمودارهای زیر توجه کنید:



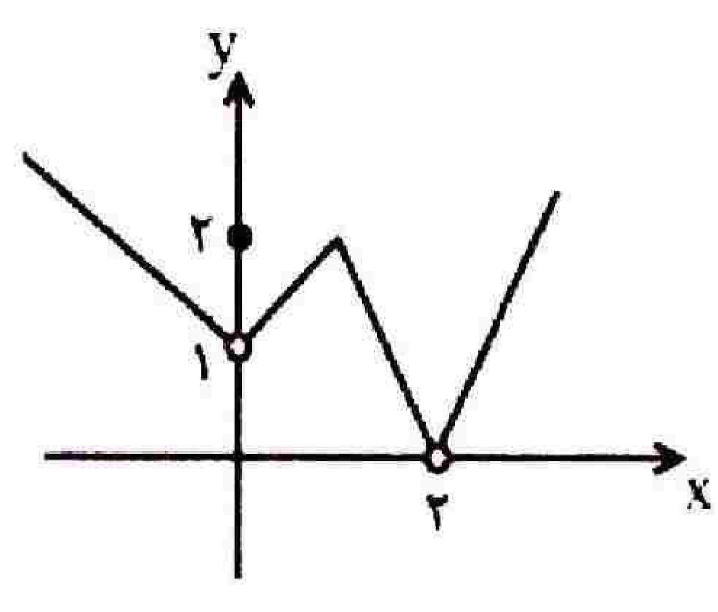
در هر سه تابع f ، g و h ، وقتی مقدارهای متغیر x به عدد a نزدیک می‌شوند، مقدارهای تابع، به عدد L نزدیک می‌شوند و در نتیجه حد هر کدام از توابع در $x=a$ برابر L است.

بنابراین مشاهده می‌شود که:

① حد تابع در یک نقطه به مقدار آن در آن نقطه ارتباطی ندارد (تابع h)

② لزومی ندارد که تابع در آن نقطه تعریف شده باشد (تابع g)

مثال: در شکل مقابل مطلوبست محاسبه‌ی $f(0)$ ، $f(2)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.



$f(0)=2$ ، $f(2)=$ تعریف نشده است

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$

نکته مهم: شرط لازم برای این که تابع f در $x=a$ دارای حد باشد، آن است که، تابع در همسایگی a تعریف شده باشد و اگر حداقل در یکی از همسایگی های راست یا چپ a تعریف نشده باشد، گوییم تابع f در $x=a$ حد ندارد.

مثال: توضیح دهید که چرا توابع زیر در نقطه‌ی تعیین شده حد ندارند.

الف) $f(x)=\sqrt{x+3}$ (نقطه‌ی $x=-3$)

دامنه‌ی تابع: $x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3 \Rightarrow D_f=[-3,+\infty) \Rightarrow$ همسایگی چپ -3 تعریف نشده

$\Longrightarrow$ f در $x=-3$ حد ندارد

ب) $f(x)=\sqrt{2-x}$ (نقطه‌ی $x=2$)

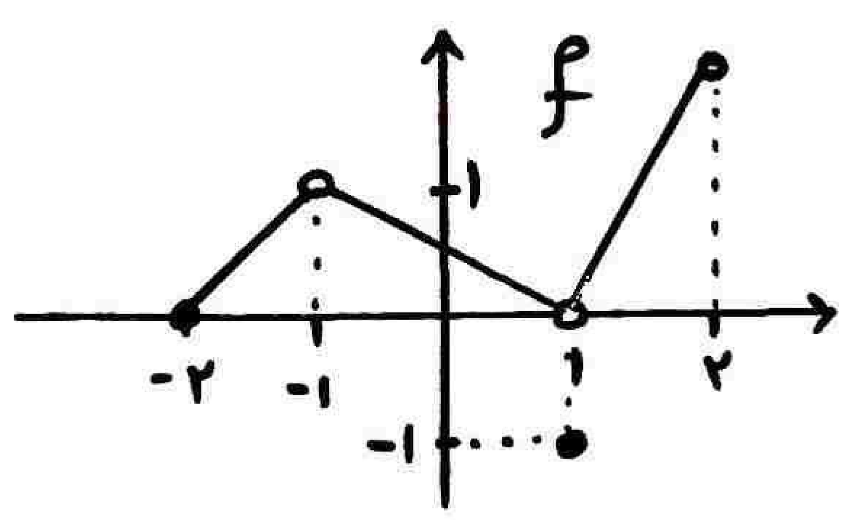
دامنه‌ی تابع: $2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f=(-\infty, 2]$ ⇐ همسایگی راست ۲ تعریف نشده

⇐ f در $x=2$ حد ندارد

پ) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}$ (نقطه‌ی $x=\frac{1}{2}$)

دامنه‌ی تابع: $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ⇐ هیچ همسایگی برای $\frac{1}{2}$ قابل تعریف نیست

⇐ f در $x=\frac{1}{2}$ حد ندارد



مثال: برای تابع f که نمودار آن داده شده است، مقادیر زیر را محاسبه نمایید.

الف) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ ⟵ حد وجود ندارد زیرا همسایگی چپ ۲- تعریف نشده.

ب) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$

پ) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

ت) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ⟵ حد وجود ندارد زیرا همسایگی راست ۲ تعریف نشده است

ث) $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)]$ ⟵ همان طور که از شکل مشخص است، در همسایگی محذوف صفر، f مقادیری بین صفر و یک دارد، که جزء صحیح آنها صفر خواهد بود بنابراین: $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)] = 0$

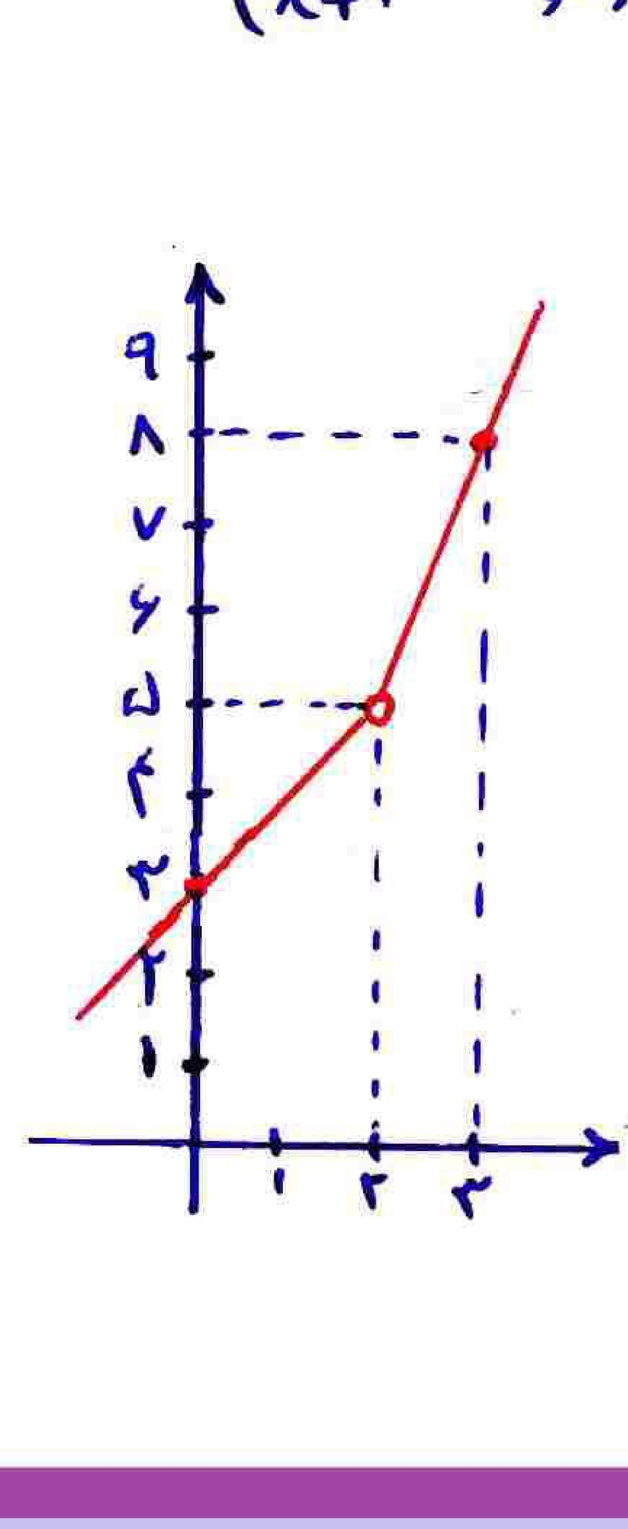
حل چند نمونه سؤال

۱- تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & , x>2 \\ x+3 & , x<2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. با رسم نمودار و با نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲، مقدار $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ را بدست آورید.

$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & , x>2 \\ x+3 & , x<2 \end{cases}$

x	2	3
y	5	8

x	2	0
y	5	3

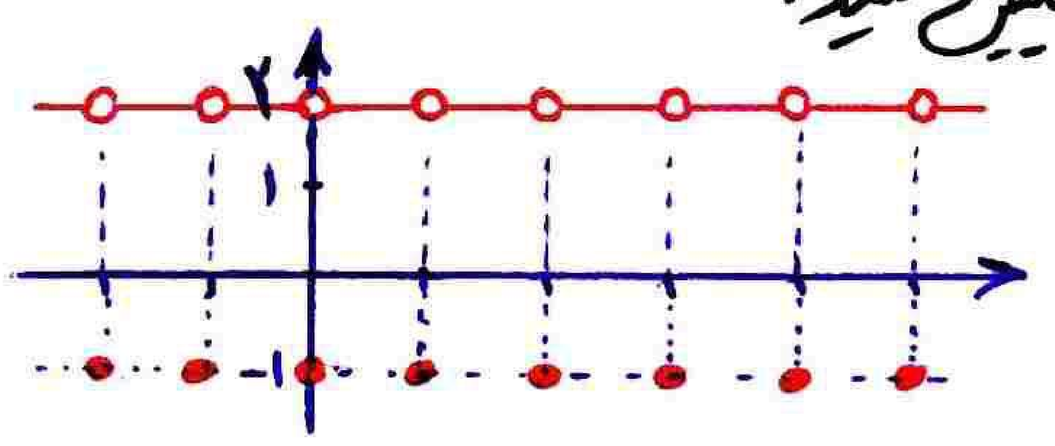


x	1.9	1.99	1.999 →	2	← 2.001	2.01	2.1
y	4.9	4.99	4.999 →	5	← 5.003	5.03	5.3

طبق جدول و همچنین با توجه به شکل نمودار تابع، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

۲- نمودار تابع $g(x)=\begin{cases}-1 , & x\in Z\\ 2 , & x\notin Z\end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن حد تابع را در $x=1$ و $x=\sqrt{2}$ محاسبه نمایید، درصورتی که $a\in \mathbb{R}$، حد تابع در $x=a$ را تعیین کنید.

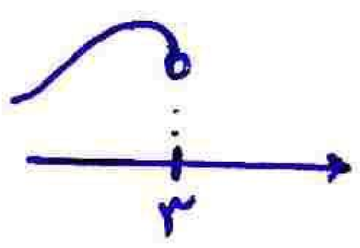


مطابق شکل در همسایگی محذوف اعداد 1 , $\sqrt{2}$ مقادیر تابع g برابر 2 است بنابراین: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=2$, $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} g(x)=2$

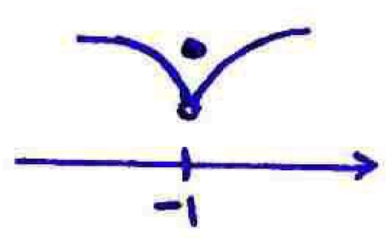
همچنین در همسایگی محذوف هر عدد حقیقی دلخواه همچون a، مقادیر تابع g برابر 2 است، بنابراین:

$$\lim_{x\to a} g(x)=2$$

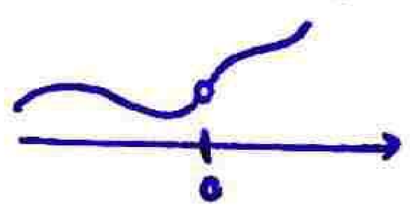
۳- نمودار تابع f را در شرایط زیر رسم کنید.



الف) f در همسایگی چپ 3 تعریف شده ولی در همسایگی راست آن تعریف نشده باشد.



ب) f در $x=-1$ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.



پ) f در $x=0$ دارای حد باشد ولی $f(0)$ موجود نباشد.

۴- به کمک جدول مقادیر، حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}x^2 , & x>0\\ 0 , & x\leq 0\end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=?$

x	-0.1	-0.01	$-0.001 \to$	0	$\leftarrow 0.001$	0.01	0.1
$f(x)$	0	0	$0 \to$	0	$\leftarrow 0.000001$	0.0001	0.01

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} 2[x]+1=? \longrightarrow f(x)=2[x]+1$

x	1.35	1.4	$1.45 \to$	$\frac{3}{2}$	$\leftarrow 1.55$	1.6	1.65
$f(x)$	3	3	$3 \to$	3	$\leftarrow 3$	3	3

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} f(x)=3$

پ) $\lim\limits_{x\to 1} |x-1| = ? \longrightarrow f(x)=|x-1|$

x	0.9	0.99	$0.999 \to$	1	$\leftarrow 1.001$	1.01	1.1
$f(x)$	0.1	0.01	$0.001 \to$	0	$\leftarrow 0.001$	0.01	0.1

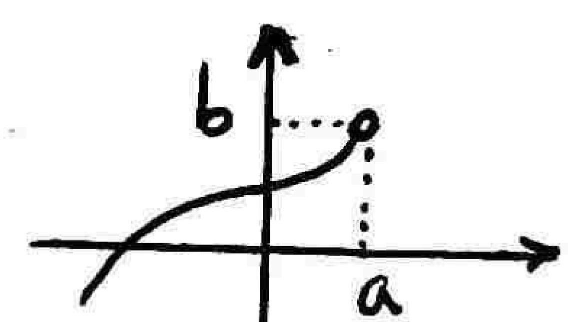
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

۳- حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی راست نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده و با نزدیک شدن متغیر x به a مقدار تابع به L_1 نزدیک شود، در این صورت گوییم حد راست تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a برابر L_1 است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_1$

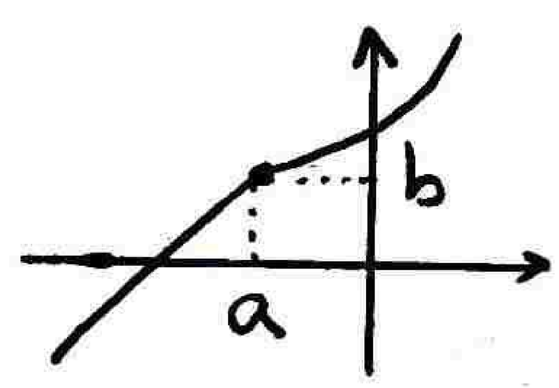
همچنین اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی چپ نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده و با نزدیک شدن متغیر x به a، مقدار تابع به L_2 نزدیک شود، گوییم حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a برابر L_2 است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_2$

مثال: در هر یک از توابع زیر، حدهای راست و چپ را در نقطه‌ی a (در صورت وجود) تعیین کنید.



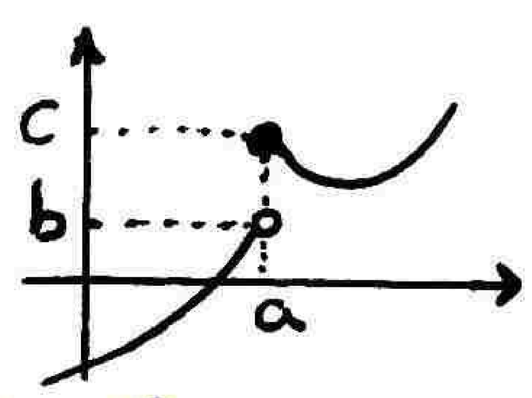
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \to$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=c$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=b$

نکته مهم: حد تابع f در نقطه‌ی $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع در a موجود و برابر باشند.

مثال: با رسم جدول، حد تابع $f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 2\\ 1-x & , x<2\end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

x	1.9	1.99	1.999	$\longrightarrow$	2	$\longleftarrow$	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	-0.9	-0.99	-0.999	$\longrightarrow$ -1		2 $\longleftarrow$	2.001	2.01	2.1

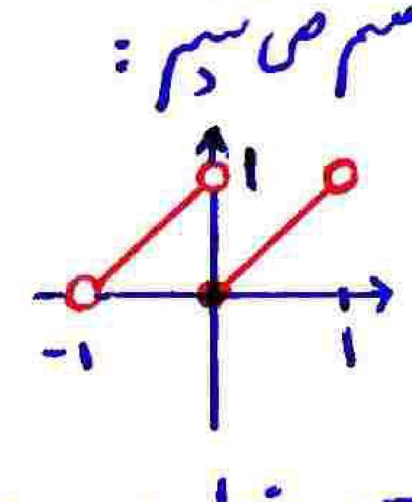
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2 \Rightarrow$ تابع f در $x=2$ حد ندارد

مثال: به کمک رسم نمودار، حد تابع $f(x)=x-[x]$ را در $x=0$ بررسی نمایید.

نمودار تابع را در یک همسایگی صفر مثلاً بازه $(-1,1)$ رسم می‌کنیم:

$-1<x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=x+1$

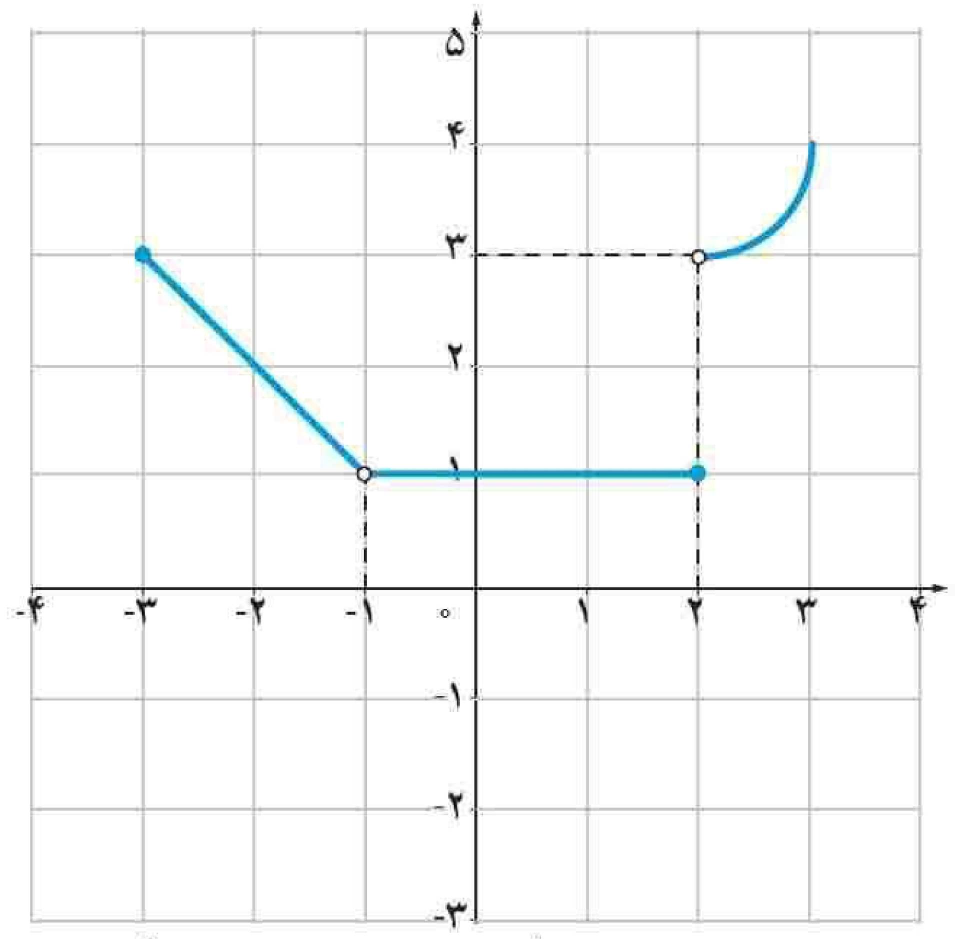
$0<x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=x$



$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\Longrightarrow$ تابع در $x=0$ حد ندارد

مثال: با توجه به نمودار f، حدهای خواسته شده را، درصورت وجود، به دست آورید.



$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=3$ | $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$ | $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \rightarrow$ وجود ندارد

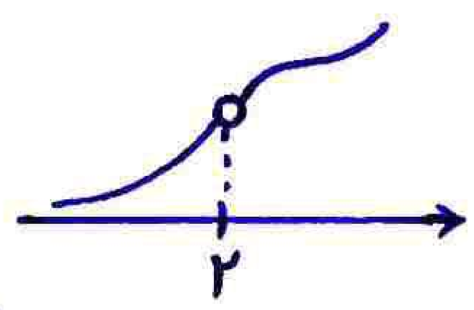
$\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=1$ | $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=1$ | $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to (-3)^+} f(x)=3$ | $\lim\limits_{x\to (-3)^-} f(x) \rightarrow$ وجود ندارد | $\lim\limits_{x\to -3} f(x) \rightarrow$ وجود ندارد

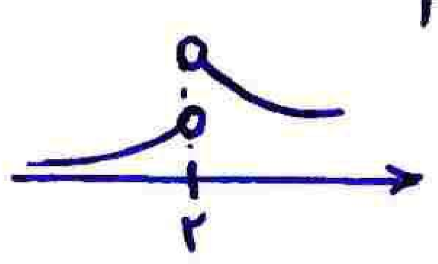
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$ | $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$ | $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

مثال: نموداری از یک تابع رسم کنید که:

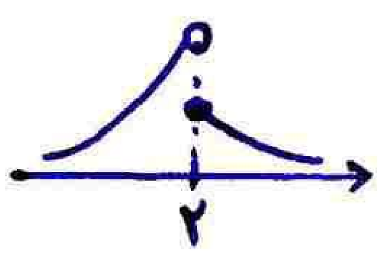
الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد داشته باشد.



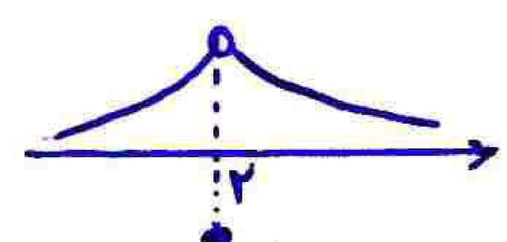
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد نداشته باشد.



پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد نداشته باشد.



ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه‌ی ۲ یکسان نباشد.



نکته: اگر دو تابع در یک همسایگی محذوف a با هم برابر باشند، مقدار حد آنها در نقطه‌ی a، دارای وضعیت یکسان است. یعنی اگر یکی دارای حد باشد، دیگری نیز دارای حد است و اگر یکی از آنها دارای حد نباشد دیگری نیز حد ندارد.

* این نکته برای حدهای راست و چپ نیز صادق است *

مثال: مقدار حد راست تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ را در نقطه‌ی $x=0$ به دست آورید.

همسایگی راست صفر را به صورت بازه‌ی $(0,1)$ درنظر می‌گیریم، می‌دانیم در این بازه $[x]=0$ است و در نتیجه تابع f با تابع ثابت $y=0$ برابر است، بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^+} 0 = 0$$

حل چند نمونه سوال

۱- تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را در نظر بگیرید.

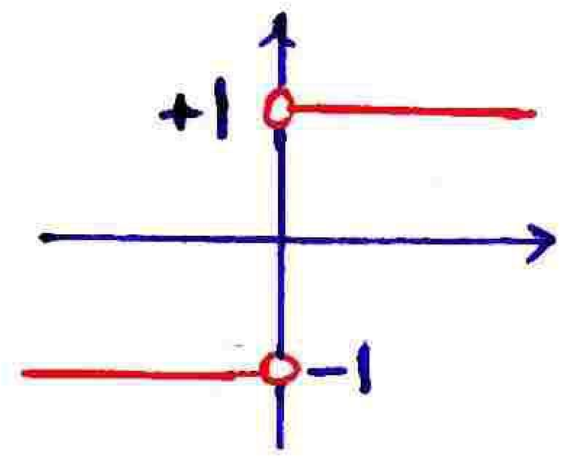
الف) با استفاده از جدول حد تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

x	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001$	$\to 0 \leftarrow$	$0/001$	$0/01$	$0/1$
$f(x)$	-1	-1	-1	$\to -1 \quad 1 \leftarrow$	1	1	1

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x} \to$ وجود ندارد

ب) نمودار تابع f را رسم کرده و به کمک آن، حد تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x} & x>0\\ \frac{-x}{x} & x<0\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



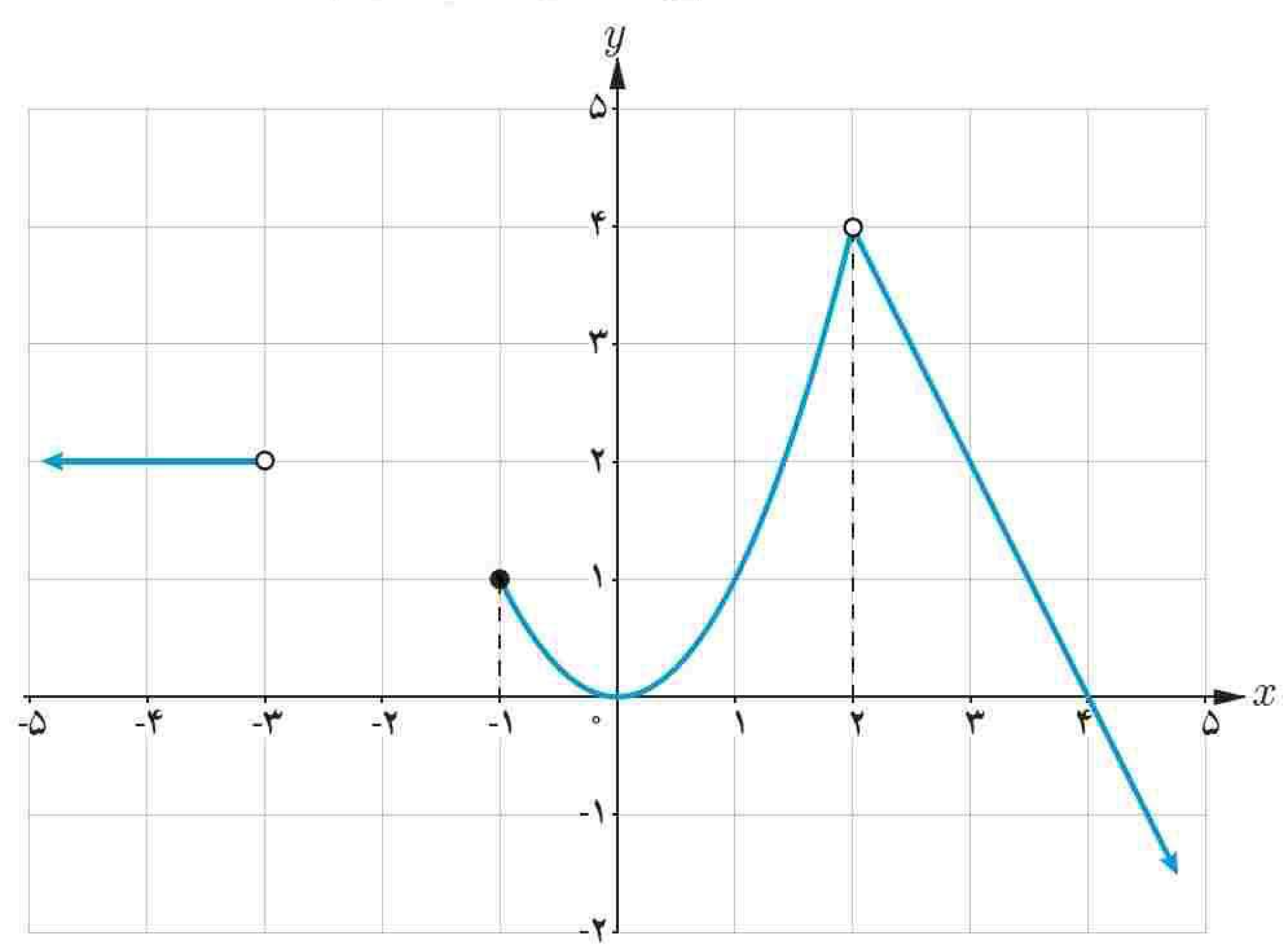
طبق شکل $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \to$ وجود ندارد

۲- نمودار تابع f با ضابطه‌ی زیر را رسم کرده و به کمک آن مقادیر خواسته شده‌ی زیر را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases}-2x+8 & , x>2\\ x^2 & , -1\le x<2\\ 2 & , x<-3\end{cases}$$

x	2	3
y	4	2

x	-1	0	2
y	1	0	4



الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ $f(0)=0$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ $f(2)=$ تعریف نشده

$f(-1)=1$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$ وجود ندارد $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=$ وجود ندارد $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=1$

$f(-3)=$ تعریف نشده $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=$ وجود ندارد $\lim\limits_{x\to (-3)^-} f(x)=2$ $\lim\limits_{x\to (-3)^+} f(x)=$ وجود ندارد

ب) در همسایگی راست ۴، مقدار تابع بین -1 و صفر است، بنابراین جزء صحیح آن -1 می‌باشد $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+}[f(x)]=-1$

در همسایگی چپ ۴، مقدار تابع بین صفر و 1 است، بنابراین جزء صحیح آن صفر می‌باشد $\longrightarrow \lim\limits_{x\to 4^-}[f(x)]=0$

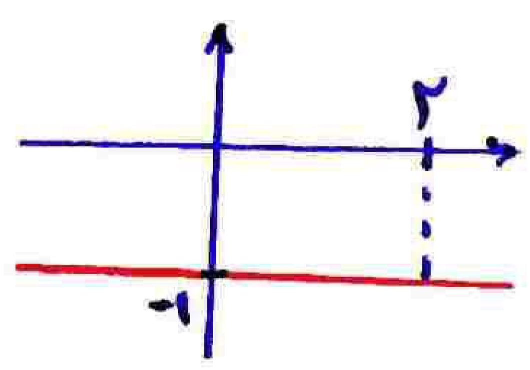
$\lim\limits_{x\to 4}[f(x)]=$ وجود ندارد

ب) در همسایگی ۴- ، مقدار تابع ثابت و برابر ۲ می‌باشد، لذا جزء صحیح آن ۲ است $\longrightarrow$ $\lim_{x\to(-4)}[f(x)]=2$

در همسایگی صفر، مقدار تابع بین دو عدد صفر و یک می‌باشد که جزء صحیح آن صفر است $\longrightarrow$ $\lim_{x\to 0}[f(x)]=0$

در همسایگی ۲ ، مقدار تابع بین دو عدد ۳ و ۴ می‌باشد که جزء صحیح آن ۳ است $\longrightarrow$ $\lim_{x\to 2}[f(x)]=0$

۳- مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه‌ی ۲ مساوی ۱- باشد.



تابع ثابت $f(x)=-1$ در نقطه‌ی $x=2$ دارای حد ۱- است به عبارت دیگر $\lim_{x\to 2}-1=-1$.

۴- در هر یک از توابع زیر، با توجه به دامنه‌ی تابع، وجود یا عدم وجود حد تابع را در نقطه‌ی داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ (نقطه‌ی $x=1$)

دامنه تابع : $x^2-x\geq 0$ $\quad \begin{array}{cccc} -\infty & 0 & 1 & +\infty \\ + & 0\ - & 0 & + \end{array}$ $\Rightarrow D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

همسایگی چپ ۱ برای تابع f تعریف نشده بنابراین تابع f در $x=1$ حد ندارد

ب) $g(x)=\dfrac{x}{[x]-2}$ (نقطه‌ی $x=2$)

دامنه تابع : $[x]-2=0\Rightarrow [x]=2\Rightarrow 2\leq x<3\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-[2,3)$

همسایگی راست ۲ ، برای تابع g تعریف نشده بنابراین تابع g در $x=2$ حد ندارد.

۵- $\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]$ به چه معنی است؟

وقتی $\lim_{x\to a}f(x)=L$ آنگاه $\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]=[L]$ است و هیچ معنی و مفهوم دیگری ندارد.

به عنوان نمونه :

$$\lim_{x\to 2}f(x)=5\Rightarrow\left[\lim_{x\to 2}f(x)\right]=[5]=5$$

$$\lim_{x\to 2}g(x)=5.3\Rightarrow\left[\lim_{x\to 2}g(x)\right]=[5.3]=5$$