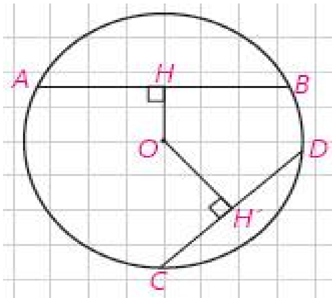
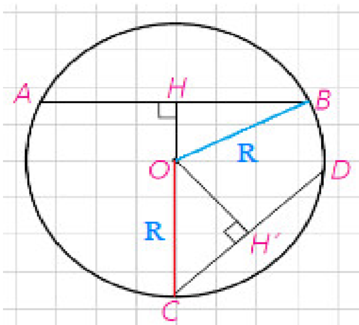
۱- در دایره‌ی $C(O\,,\,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$ ($OH$ و $OH'$ فاصله‌ی $O$ از دو وتر $AB$ و $CD$ هستند.)
راهنمایی: $O$ به $B$ و $C$ وصل، و از قضیه‌ی فیثاغورس استفاده کنید.




« **پاسخ** »




فرض : $AB > CD$ حکم : $OH < OH'$

$$OB = OC = R \quad , \quad BH = \frac{AB}{۲} \quad , \quad CH = \frac{CD}{۲} \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{OBH} : H = ۹۰^{\circ} \Rightarrow BH^{۲} = R^{۲} - OH^{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OCH'} = H' = ۹۰^{\circ} \Rightarrow CH'^{۲} = R^{۲} - OH'^{۲}$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{۲} > \frac{CD}{۲} \xrightarrow{(۱)} BH > CH' \Rightarrow BH^{۲} > CH'^{۲} \Rightarrow R^{۲} - OH^{۲} > R^{۲} - OH'^{۲}$$

$$\Rightarrow -OH^{۲} > -OH'^{۲} \xrightarrow{\times(-۱)} OH^{۲} < OH'^{۲} \xrightarrow[OH' > ۰]{OH > ۰} OH < OH'$$

فرض : $OH < OH'$ حکم : $AB > CD$

$$OB = OC = R \quad , \quad ۲BH = AB \quad , \quad ۲CH = CD \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{OBH} : H = ۹۰^{\circ} \Rightarrow OH^{۲} = R^{۲} - BH^{۲}$$

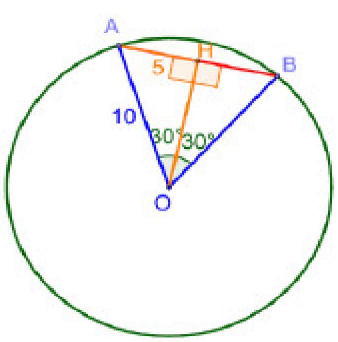
$$\overset{\triangle}{OCH'} : H' = ۹۰^{\circ} \Rightarrow OH'^{۲} = R^{۲} - CH'^{۲}$$

$$OH < OH' \Rightarrow R^{۲} - BH^{۲} < R^{۲} - CH'^{۲} \Rightarrow -BH^{۲} < -CH'^{۲} \xrightarrow{\times(-۱)} BH^{۲} > CH'^{۲}$$

$$\xrightarrow[CH' > ۰]{BH > ۰} BH > CH' \xrightarrow{(۱)} AB > CD$$

۲- در دایره‌ی $C(O\,,\,R)$، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^{\circ}$ و $AB = ۱۰$ فاصله‌ی $O$ از وتر $AB$ را به دست آورید.

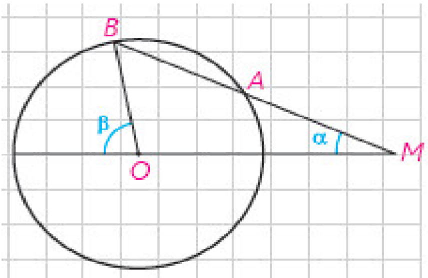
« **پاسخ** »




می‌دانیم که مثلث $OAB$ متساوی‌الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله‌ی وتر از مرکز باید نقطه‌ی $O$ را بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره‌خط $OH$ را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند بنابراین $AH = ۵$ پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OAH$ داریم:

$$OH = \sqrt{OA^{۲} - AH^{۲}} \Rightarrow OH = \sqrt{۱۰^{۲} - ۵^{۲}}$$

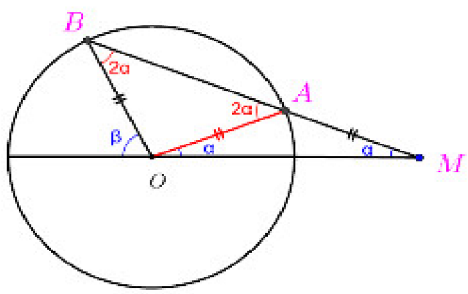
$$= \sqrt{۷۵} = ۵\sqrt{۳}$$



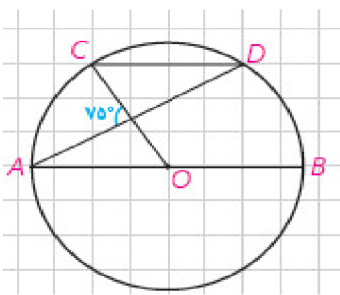

۳- دایره‌ی $C(O\ ,\ R)$ مفروض است. از نقطه‌ی M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است و $MA = R$؛ نشان دهید: $\beta = ۳\alpha$

« **پاسخ** »

با توجه به فرض مسئله، مثلث‌های OAM و OAB متساوی‌الساقین هستند.
در مثلث OBM داریم:

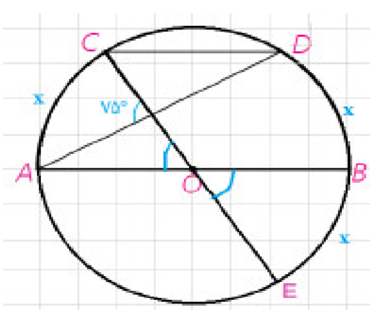



$$\beta = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$$




۴- در دایره رسم شده شکل مقابل $AB \parallel CD$، اندازه کمان CD را به دست آورید.

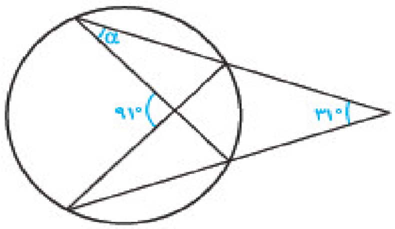
« **پاسخ** »



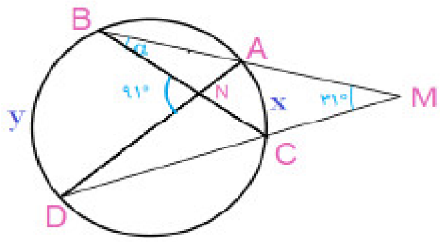

$$۷۵° = \frac{(x + x) + x}{۲} \Rightarrow ۱۵۰° = ۳x \Rightarrow x = ۵۰°$$

$$\overparen{CD} = ۱۸۰° - ۲x \Rightarrow \overparen{CD} = ۱۸۰° - ۱۰۰° = ۸۰°$$

۵- در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی $\alpha$ را به دست آورید.




**« پاسخ »**

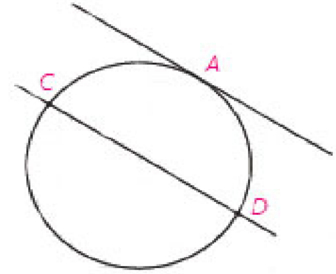


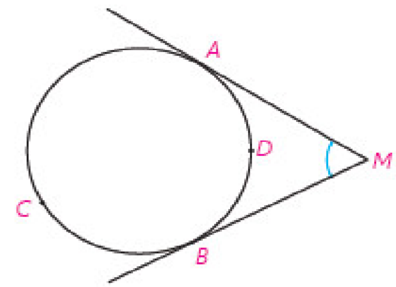

$$\widehat{M} = \frac{y - x}{۲} \Rightarrow ۲ \times ۳۱^\circ = y - x$$

$$\widehat{N} = \frac{y + x}{۲} \Rightarrow ۲ \times ۹۱^\circ = y + x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = ۶۲^\circ \\ y + x = ۱۸۲^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲y = ۲۴۴^\circ \Rightarrow y = ۱۲۲^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

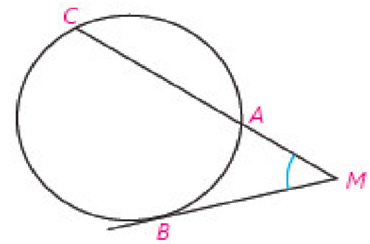
۶- در شکل‌های زیر ثابت کنید:
راهنمایی: از نقطه‌ی B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.




الف) $d_۲ \parallel d_۱$، ثابت کنید $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$

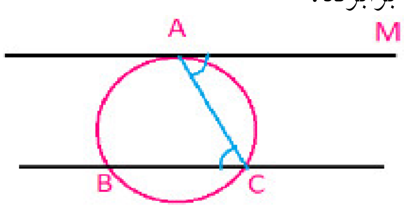
ب) $\widehat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$




پ) $\widehat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

« **پاسخ** »

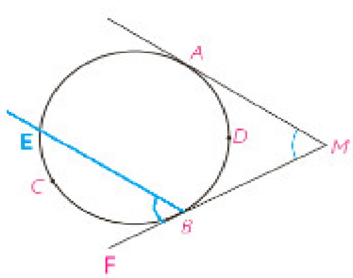
ثابت می‌شود که کمان‌های محصور بین یک مماس و وتر موازی در یک دایره با هم برابرند.




در شکل مقابل بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{MAC} = \widehat{BCA}$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ظلی } \widehat{MAC} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC} \\ \text{محاطی } \widehat{ACB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB} \end{array}\right\} \xrightarrow{\widehat{MAC} = \widehat{ACB}} \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB}$$

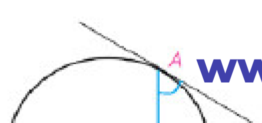
الف) $\widehat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$




راه اول: بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{AMB} = \widehat{EBF}$

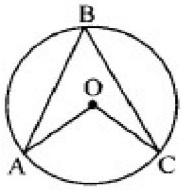
$$\widehat{AMB} = \widehat{EBF} = \frac{\overset{\frown}{EB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{ACD} - \overset{\frown}{AE}}{۲} \xrightarrow{\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ADB}} \widehat{AMB} = \widehat{EBF} = \frac{\overset{\frown}{ACD} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$$

راه دوم: از نقطه‌ی A به B وصل می‌کنیم. در مثلث AMB زاویه $E\widehat{B}A$ خارجی است پس:



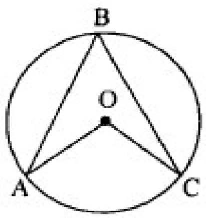

$$\widehat{EBA} = \widehat{MAB} + \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{EBA} - \widehat{MAB}$$

۷- در دایره به مرکز $O$ ، اگر $A\hat{O}C = (۳\alpha + ۱۲)^\circ$ و $A\hat{B}C = (\alpha + ۱۶)^\circ$ باشد، مقدار $\alpha$ و اندازه زاویه مرکزی




AOC و محاطی ABC را محاسبه کنید.

« **پاسخ** »




$$\begin{cases} A\hat{B}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ A\hat{O}C = \overset{\frown}{AC} \end{cases} (۰/۵) \Rightarrow \alpha + ۱۶ = \frac{۳\alpha + ۱۲}{۲} \Rightarrow \alpha = ۲۰ (۰/۲۵)$$

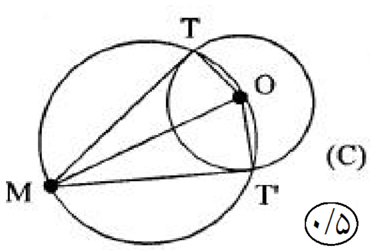
$$\Rightarrow \begin{matrix} A\hat{B}C = ۳۶^\circ \\ A\hat{O}C = ۷۲^\circ \end{matrix} \quad (۰/۲۵)$$

ص ۶۷

۸- دایره ی $C\ (O\ ,\ R)$ و نقطه‌ی $M$ واقع در خارج این دایره داده شده‌اند، از نقطه‌ی $M$ بر این دایره دو مماس رسم کنید. (مراحل رسم را تو ضیح دهید.)

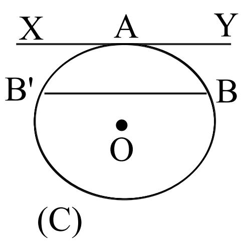
« **پاسخ** »

نقطه‌ی $M$ را به $O$ مرکز دایره‌ی $(C)$ وصل کرده، دایره‌ی به قطر $OM$ را رسم می‌کنیم. تا دایره‌ی $(C)$ را در نقاط $T$ و $T'$ قطع کند. زاویه‌های $O\hat{T}M = O\hat{T'}M = ۹۰^\circ$ (۰/۲۵) زیرا زاویه‌های محاطی و روبه‌رو قطر هستند (۰/۲۵) پس در نتیجه $MT$ در نقطه‌ی $T$ و $MT'$ در نقطه‌ی $T$ بر دایره‌ی $(C)$ مماسند. (۰/۲۵)

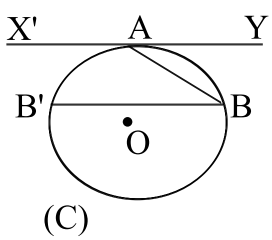



رسم شکل (۰/۵)

۹- خط $XY$ در نقطه‌ی $A$ بر دایره‌ی $(C)$ مماس است، وتر $BB'$ از دایره را موازی $XY$ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'}$




**« پاسخ »**



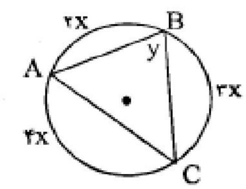

$A$ را $B$ وصل می‌کنیم زاویه‌ی $BAY$ ظلی و زاویه‌ی $ABB'$ محاطی هستند بنابراین:

$$A\hat{B}B' = \frac{\overset{\frown}{AB'}}{۲} \ \text{۰/۲۵}, \quad B\hat{A}Y = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \ \text{۰/۲۵}$$

با توجه به فرض $XY \parallel BB'$ و $AB$ مورب، پس:

$$A\hat{B}B' = B\hat{A}Y \ \text{۰/۲۵} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'} \ \text{۰/۲۵}$$

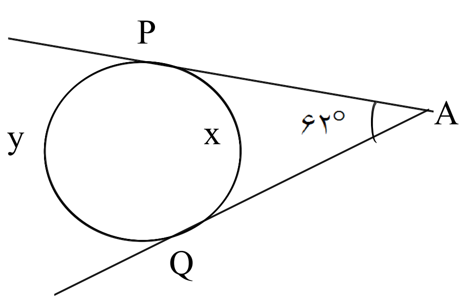
۱۰- با توجه به شکل زیر اندازه‌ی $x$ و $y$ را تعیین کنید.




**« پاسخ »**

$$\begin{cases} ۲x + ۳x + ۴x = ۳۶۰ \ \text{۰/۲۵} \Rightarrow x = ۴۰ \ \text{۰/۲۵} \\ y = \frac{۴x}{۲} \ \text{۰/۲۵} \Rightarrow y = ۲x \Rightarrow y = ۸۰ \ \text{۰/۲۵} \end{cases}$$

۱۱- با توجه به شکل $x$ و $y$ را بیابید.

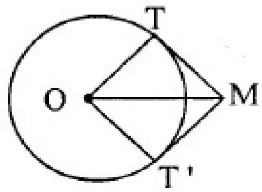



**« پاسخ »**

$$\frac{y-x}{۲} = ۶۲° \ \text{۰/۲۵}$$

$$\rightarrow y = ۲۴۲° , x = ۱۱۸° \ \text{۰/۲۵}$$

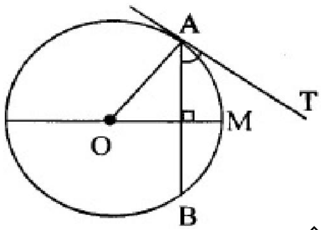
$$x + y = ۳۶۰° \ \text{۰/۲۵}$$




۱۲- زاویه‌ی ظلی $TAB$ در دایره‌ای به مرکز $O$ داده شده است.

با استفاده از ویژگی قطر عمود بر وتر، ثابت کنید که $T\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

**« پاسخ »**



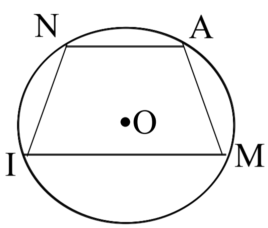

زاویه‌ی ظلی $B\hat{A}T$ را در دایره‌ای به مرکز $O$ در نظر می‌گیریم، شعاع $OA$ از این دایره را رسم می‌کنیم. می‌دانیم شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، پس:

$$O\hat{A}B + B\hat{A}T = ۹۰^\circ \quad (۱)$$ ۰/۲۵

قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. پس $\overset{\frown}{AM} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ ۰/۲۵ و اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی $(۲)$ $A\hat{O}M = \overset{\frown}{AM} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ ۰/۲۵ از طرفی

$$O\hat{A}B + A\hat{O}M = ۹۰^\circ \quad (۳)$$ ۰/۲۵

از روابط (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $B\hat{A}T = A\hat{O}M$ ۰/۲۵ و با توجه به (۲) نتیجه می‌شود $B\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ ۰/۲۵.

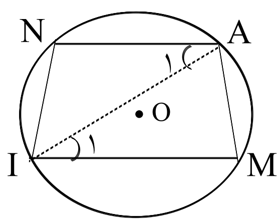



۱۳- در دایره‌ی $(O)$ چهار ضلعی $AMIN$ محاط شده است و داریم $NI = AM$

نشان دهید: $AN \parallel MI$

**« پاسخ »**

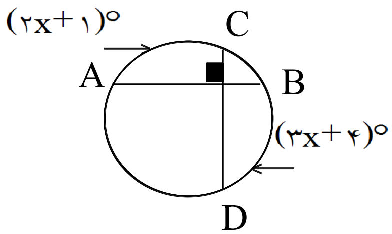
از $A$ به $I$ وصل می‌کنیم ۰/۲۵ با توجه به رابطه‌ی $AM = NI$ نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{NI}$ ۰/۲۵




داریم: ۰/۲۵ $\begin{cases} \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{NI}}{۲} \\ \hat{I}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AM}}{۲} \end{cases} \rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{I}_۱$ زاویه محاطی ۰/۵

طبق عکس قضیه خطوط موازی و خط مورب $AM \parallel NI$ ۰/۲۵

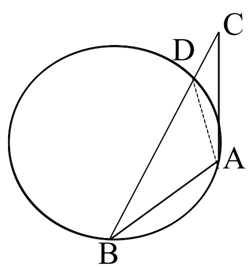
۱۴- مقدار x را در شکل زیر به دست آورید.




« **پاسخ** »

$\frac{۲x+۱+۳x+۴}{۲}=۹۰°$ ۰/۲۵ $\rightarrow ۵x+۵=۱۸۰ \Rightarrow x=۳۵°$ ۰/۲۵

۱۵- در دایره $(O , R)$ C مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند خط BC دایره را در نقطه‌ی D قطع کرده‌است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الساقین است.

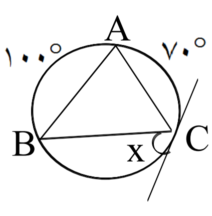



« **پاسخ** »

$$\begin{cases} AC = AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \quad ۰/۲۵ \\ \hat{B} = D\hat{A}C = \frac{AD}{۲} \quad ۰/۲۵ \end{cases} \Rightarrow D\hat{A}C = \hat{C} \Rightarrow DC = DA \quad ۰/۲۵$$

محاطی ظلی

۱۶- مقدار x را به‌دست آورید.

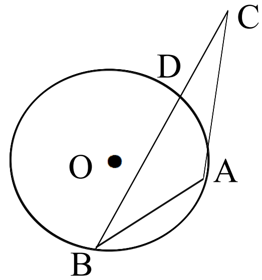



« **پاسخ** »

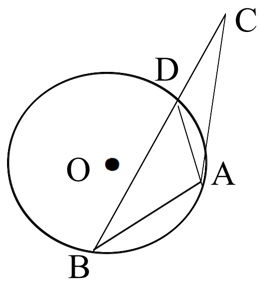
$$\overset{\frown}{BC} + ۱۰۰° + ۷۰° = ۳۶۰° \xrightarrow{۰/۲۵} \overset{\frown}{BC} = ۱۹۰°$$

$$\text{(زاویه ظلی)}\ \hat{x} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \xrightarrow{۰/۲۵} \frac{۱۹۰°}{۲} = ۹۵° \quad ۰/۲۵$$

۱۷- در دایره‌ی $(O)$ مماس $AC$ و وتر $AB$ با یک‌دیگر مساوی‌اند.
خط $BC$ دایره را در نقطه‌ی $D$ قطع کرده است.
ثابت کنید مثلث $ACD$، متساوی الساقین است.



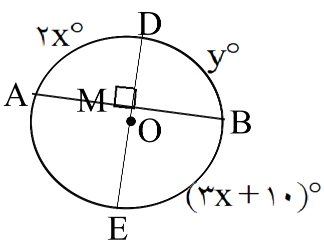

« **پاسخ** »




$$\overset{\triangle}{ABC}: \begin{cases} AC = AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \ \text{۰/۲۵} \\ \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{\text{۲}} \ \text{محاطی} \ \text{۰/۲۵} \Rightarrow D\hat{A}C = \hat{C} \Rightarrow DC = DA \ \text{۰/۲۵} \\ D\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{\text{۲}} \ \text{ظلی} \ \text{۰/۲۵} \end{cases}$$

۱۸- در شکل روبه‌رو اگر قطر $ED$ در نقطه‌ی $M$ بر وتر $AB$ از دایره‌ی $C(O,R)$ عمود باشد، مقادیر $x$ و $y$ را بیابید.

$\overset{\frown}{AD} = \text{۲}x^\circ$ $\qquad$ $\overset{\frown}{DB} = y^\circ$ $\qquad$ $\overset{\frown}{BE} = (\text{۳}x + \text{۱۰})^\circ$



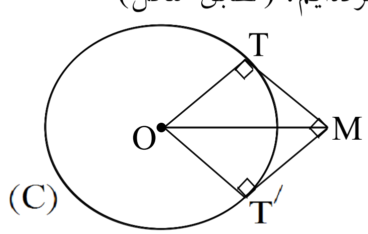

« **پاسخ** »

$$\hat{M} = \frac{(\text{۲}x + \text{۳}x + \text{۱۰})^\circ}{\text{۲}} \ \text{۰/۲۵} \Rightarrow \text{۹۰}^\circ = \frac{(\text{۵}x + \text{۱۰})^\circ}{\text{۲}} \ \text{۰/۲۵}$$

$$\text{۵}x = \text{۱۸۰} - \text{۱۰} \Rightarrow \text{۵}x = \text{۱۷۰}^\circ \ \text{۰/۲۵} \Rightarrow x = \text{۳۴}^\circ \ \text{۰/۲۵}$$

$$y = \text{۲}x \ \text{۰/۲۵} \Rightarrow y = \text{۲}(\text{۳۴}^\circ) = \text{۶۸}^\circ \ \text{۰/۲۵}$$

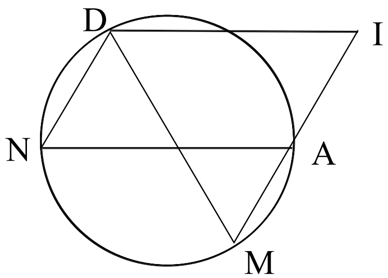
۱۹- از نقطه‌ی $M$ خارج دایره‌ی $C(O,\text{۷})$ دو مماس عمود بر هم بر دایره‌ی $(C)$ رسم کرده‌ایم. (مطابق شکل)
اگر $T$ و $T'$ نقاط تماس دو مماس با دایره باشند، اندازه‌ی $MT$ را بیابید.



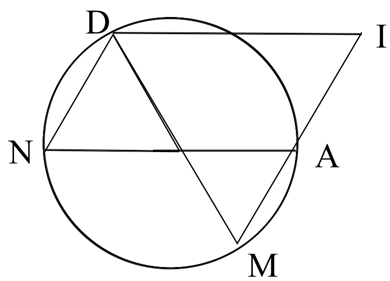

« **پاسخ** »

چون از $M$ دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم شده است پس $OT$ عمود بر $MT$ بوده ۰/۲۵ بنابراین چهارضلعی $OTMT'$ مربع است ۰/۲۵ پس $MT = R = \text{۷}$ ۰/۲۵.

۲۰- در شکل روبرو چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است، و نقطه‌های I و A و M روی یک خط راست قرار دارند، ثابت کنید: $DM = DI$



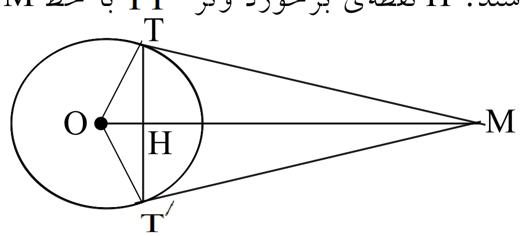

« **پاسخ** »




در متوازی‌الاضلاع DINA : $\hat{N} = \hat{I}$ (۰/۲۵)

از طرف دیگر $\hat{N}$ و $\hat{M}$ محاطی ، $\hat{N} = \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$ (۰/۲۵) در نتیجه $\hat{M} = \hat{I}$ (۰/۲۵) پس مثلث MDI متساوی‌الساقین است. (۰/۲۵) پس داریم $DM = DI$

۲۱- دو خط MT و $MT'$ در نقطه‌های T و $T'$ بر دایره‌ی $C(O,R)$ مماسند. H نقطه‌ی برخورد وتر $TT'$ با خط OM است. ثابت کنید:




الف) خط OM نیمساز زاویه‌های $T\hat{O}T'$ و $T\hat{M}T'$ است.

ب) $TT' \,.\, OM = ۲R \,.\, MT$

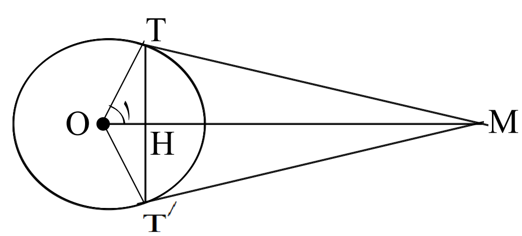
« **پاسخ** »

الف)

$$\left.\begin{array}{l} MT = MT' \text{ مماس} \\ OM = OM \\ OT = OT' = R \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\triangle}{M}T \approx O\overset{\triangle}{M}T' \Rightarrow T\hat{M}O = T'\hat{M}O \,,\, T\hat{O}M = T'\hat{O}M$$

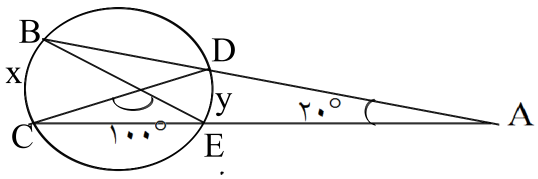
ب)

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۱ \\ \hat{H} = \hat{T} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\triangle}{T}M \sim O\overset{\triangle}{T}H \Rightarrow \frac{TH}{MT} = \frac{OT}{OM}$$

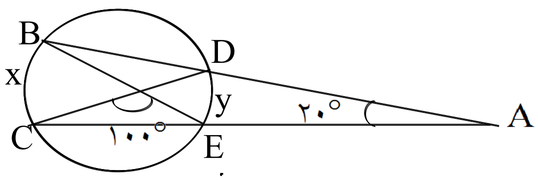



$$\left.\begin{array}{l} TH \times OM = MT \times OT \\ OT = R \\ TH = \frac{TT'}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow TT' \times OM = ۲MT \times R$$

۲۲- در شکل زیر مقادیر x و y را بدست آورید.




« **پاسخ** »

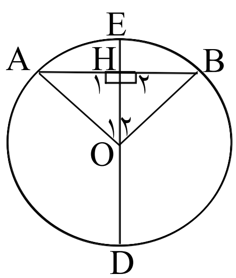



$$\begin{cases} x + y = 2(180^\circ - 100^\circ) = 160^\circ \\ x - y = 2 \times 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 200^\circ \Rightarrow x = 100^\circ \Rightarrow y = 60^\circ$$

۲۳- قضیه: ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

« **پاسخ** »



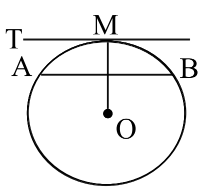

فرض: DE قطر و $\hat{H} = 90^\circ$ حکم: $\begin{cases} AH = HB \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \text{ و } \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB} \end{cases}$

برهان: از O مرکز دایره به A و B وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = R \\ OH = OH \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} A\overset{\triangle}{O}H \approx B\overset{\triangle}{O}H \Rightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \widehat{O_1} = \widehat{O_1} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB} \\ \overset{\frown}{AD} = 180^\circ - \overset{\frown}{AE} \text{ و } \overset{\frown}{DB} = 180^\circ - \overset{\frown}{EB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$$

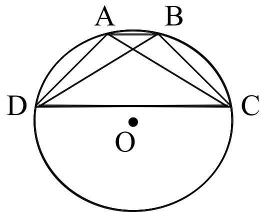
۲۴- ثابت کنید مماسی که بر وسط کمانی از دایره رسم شود با وتر آن کمان موازی می‌باشد.




« **پاسخ** »

اگر از نقطه O مرکز دایره به نقطه M وصل کنیم OM بر مماس MT عمود است و چون نقطه M وسط کمان AB است پس OM بر AB عمود است یعنی AB و MT متوازیند.

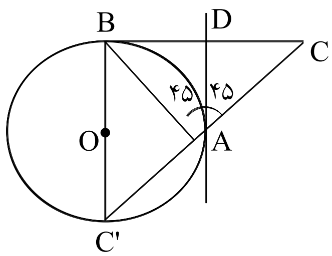
۲۵- ثابت کنید در هر دایره دو وتر متقاطع متساوی قطرهای یک ذوزنقه متساوی‌الساقین هستند.




« **پاسخ** »

چون $AC = DB$ است پس $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$. اگر کمان $\overset{\frown}{AB}$ را از دو کمان متساوی $\overset{\frown}{AC}$ و $\overset{\frown}{BD}$ کم کنیم خواهیم داشت: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ و چون کمان‌ها برابرند پس وترهای AD و BC متساویند. از تساوی کمان‌های $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AD}$ نتیجه می‌شود AB با CD موازی است یعنی چهارضلعی ABCD ذوزنقه متساوی‌الساقین می‌باشد.

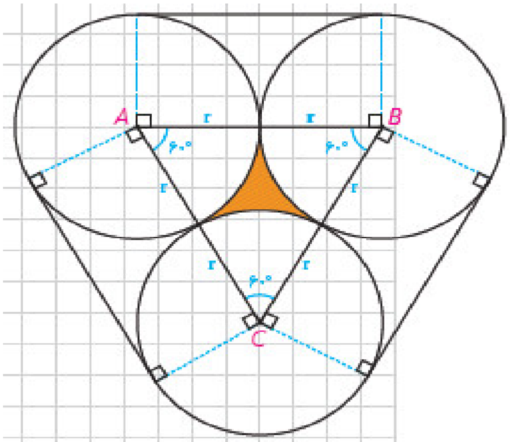
۲۶- کمان AB را مساوی ۹۰ درجه روی محیط دایره انتخاب کرده‌ایم و از نقطه A مماس AD را بر دایره رسم کرده و AC را عمود بر وتر AB و مساوی آن در خارج دایره رسم و BC را وصل می‌کنیم. اولاً ثابت کنید BC بر AD عمود است ثانیاً AC را امتداد داده‌ایم تا دایره را در C' قطع کند ثابت کنید BC' قطری از دایره است.



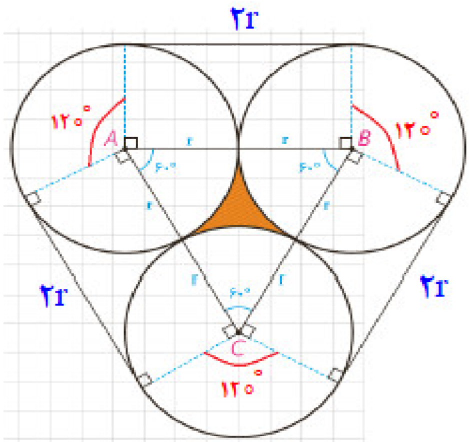

« **پاسخ** »

زاویه‌ی $\widehat{BAD}$ زاویه ظلی است پس $\widehat{BAD} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ$ در نتیجه $\widehat{DAC} = ۴۵^\circ$ است مثلث ABC متساوی‌الساقین است پس نیمساز AD بر ارتفاع مثلث منطبق بوده یعنی AD بر BC عمود است زاویه $\hat{C}$ زاویه بیرونی است. داریم: $\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BC'} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$ و یا $۴۵^\circ = \frac{\overset{\frown}{BC'} - ۹۰^\circ}{۲}$ پس $\overset{\frown}{BC'} = ۱۸۰^\circ$ بوده یعنی خط BC' قطر دایره است.

۲۷- سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله‌ی نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $۶r + ۲\pi r$ . همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^{۲}\left(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}\right)$ است.




**« پاسخ »**




مجموع سه قطاع با زاویه‌ی ۱۲۰ درجه تشکیل یک دایره کامل می‌دهد بنابراین داریم:

طول نخ = $۲r + ۲r + ۲r +$ محیط یک دایره = $۶r + ۲\pi r$

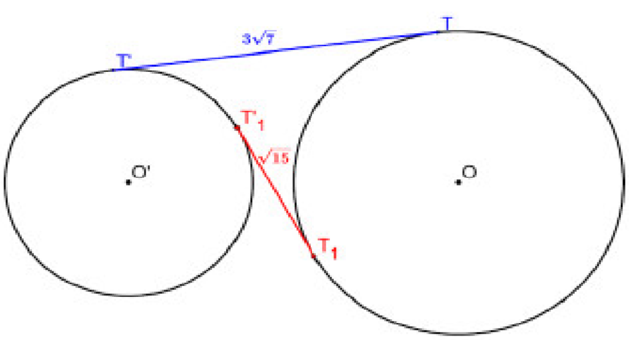
مجموع سه قطاع با زاویه ۶۰ درجه تشکیل یک نیم‌دایره می‌دهد بنابراین داریم:

مساحت ناحیه هاشور خورده =
مساحت نیم‌دایره - مساحت مثلث ABC
مساحت ناحیه هاشور خورده =

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^{۲} - \frac{\pi r^{۲}}{۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۴}r^{۲} - \frac{\pi r^{۲}}{۲} = r^{۲}\left(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳}\right)$$

۲۸- طول شعاع‌های دو دایره‌ی متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط المرکزین آن‌ها مساوی ۸ واحد است.

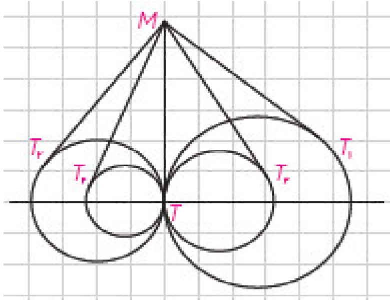
**« پاسخ »**




$$\begin{cases} TT'^{۲} = d^{۲} - \left(R^{۲} - R'\right)^{۲} \\ TT'^{۲} = d^{۲} - (R + R')^{۲} \end{cases}$$

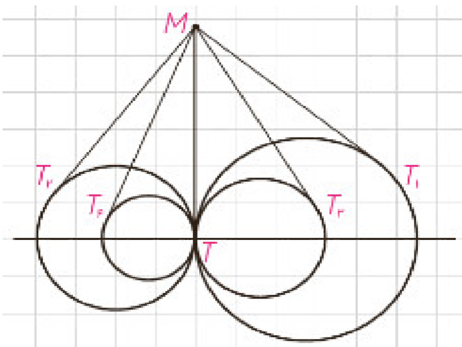
$$\Rightarrow \begin{cases} ۶۳ = ۶۴ - (R - R')^{۲} \\ ۱۵ = ۶۴ - (R + R')^{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = ۱ \\ R + R' = ۷ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۸ \Rightarrow R = ۴ \Rightarrow R' = ۳$$



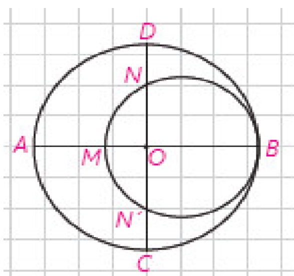

۲۹- مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T بر هم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آن‌ها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم ؛ ثابت کنید
$MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴ = \ldots$

« **پاسخ** »



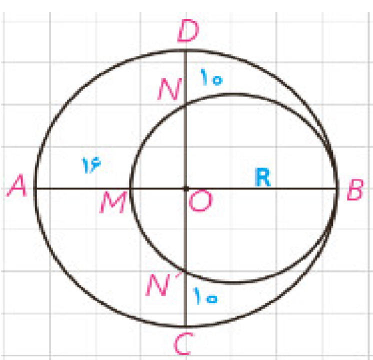

از هر نقطه خارج دایره طول مماس‌های رسم شده با هم برابرند. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MT = MT_۲ \\ MT = MT_۴ \\ MT = MT_۱ \\ MT = MT_۲ \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow MT = MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴$$




۳۰- در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.

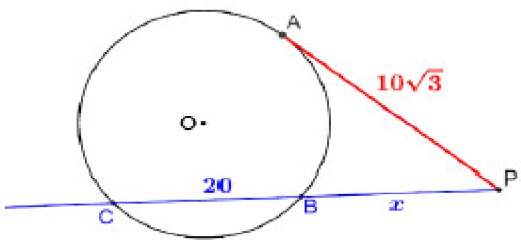
« **پاسخ** »




$$OB \, . \, OM = ON \, . \, ON' \Rightarrow R(R - ۱۶) = (R - ۱۰)(R - ۱۰)$$
$$R^۲ - ۱۶R = R^۲ - ۲۰R + ۱۰۰ \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$
$$R' = \frac{MB}{۲} \Rightarrow R' = \frac{۲R - ۱۶}{۲} \Rightarrow R' = \frac{۵۰ - ۱۶}{۲} = ۱۷$$

۳۱- از نقطه‌ی P در خارج دایره‌ای مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). هم‌چنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی B و C قطع کرده است و $BC = ۲۰$. طول‌های PB و PC را به دست آورید.

« **پاسخ** »



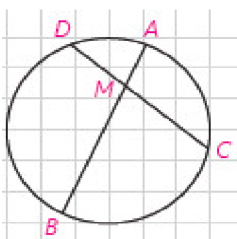

$$PA^{۲} = PB.PC \rightarrow \left(۱۰\sqrt{۳}\right)^{۲} = x(x + ۲۰)$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۲x - ۳۰۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۱۰)(x + ۳۰) = ۰$$

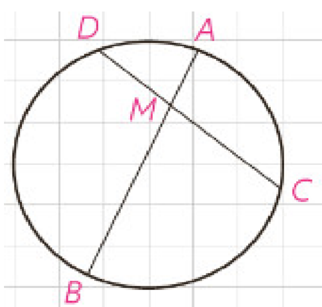
$$\Rightarrow x = ۱۰ \quad , \quad x = -۳۰ \ \text{غ ق ق}$$

$$\Rightarrow PB = ۱۰ \quad , \quad PC = ۳۰$$

۳۲- در دایره‌ی $C(O , R)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = ۱۱\,cm$، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟




« **پاسخ** »




$$\frac{DM}{MC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{DM}{DC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{DM}{۹} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow DM = ۳ \Rightarrow MC = ۶$$

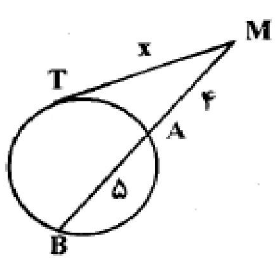
$$DM.MC = AM.BM \xrightarrow{AM = x} ۳ \times ۶ = x(۱۱ - x)$$

$$x^{۲} - ۱۱x + ۱۸ = ۰ \Rightarrow (x - ۹)(x - ۲) = ۰$$

$\Rightarrow x = ۲ \quad , \quad x = ۹$ با توجه به شکل غ ق ق

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{۲}{۹}$$

۳۳- در شکل زیر مقدار x را به دست آورید.




« **پاسخ** »

$MT^{۲} = MA \times MB$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^{۲} = ۴ \times ۹$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = ۶$ (۰/۲۵)

۳۴- دو دایره به شعاع ۱ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۳x + ۱$ باشد.

« **پاسخ** »

$$\begin{matrix} R = ۴ \\ R' = ۱ \end{matrix} \Rightarrow d = ۵ \quad (۰/۲۵) \qquad TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \qquad (۰/۲۵)$$

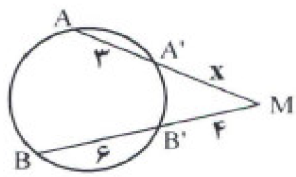
$$۳x + ۱ = \sqrt{۵^۲ - (۴ - ۱)^۲}$$

$$۳x + ۱ = \sqrt{۲۵ - ۹} = \sqrt{۱۶} = ۴ \qquad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x = ۱ \qquad (۰/۲۵)$$

ص ۸۲

۳۵- در شکل زیر مقدار x را محاسبه کنید.




« **پاسخ** »

با توجه به رابطهٔ طولی در مثلث داریم:

$$MA' \times MA = MB' \times MB$$

$$x(x + ۳) = ۴(۴ + ۶)$$

$$x^۲ + ۳x - ۴۰ = ۰ \Rightarrow (x + ۸)(x - ۵) = ۰ \Rightarrow x = ۵$$

۳۶- مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط المرکزین $d = ۱۳$، برابر $۵x - ۸$ باشد.

« **پاسخ** »

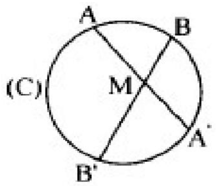
ص ۸۲

$$\begin{matrix} R = ۲ \\ R' = ۳ \\ d = ۱۳ \end{matrix} \qquad TT' = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲} \quad (۰/۲۵)$$

$$۵x - ۸ = \sqrt{۱۳^۲ - (۲ + ۳)^۲}$$

$$۵x - ۸ = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \qquad (۰/۲۵) \Rightarrow x = ۴ \quad (۰/۲۵)$$

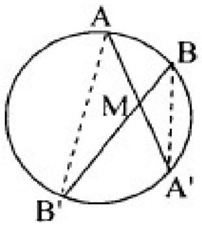
۳۷- قضیه: از نقطه M واقع در داخل دایره (C) دو وتر دلخواه 'AA و 'BB رسم شده‌اند، ثابت کنید:




$$MA \times MA' = MB \times MB'$$

« **پاسخ** »

برهان: از A به 'B و از B به 'A وصل می‌کنیم، دو مثلث 'AMB و 'BMA متشابه‌اند. (۰/۲۵) زیرا:

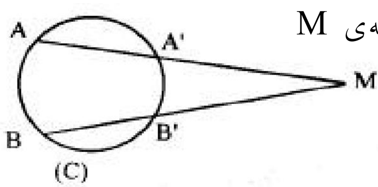



$$\begin{cases} A\widehat{M}B' = A'\widehat{M}B \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \end{cases} (۰/۵) \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow MA \times MA' = MB \times MB'$$

ص ۷۴

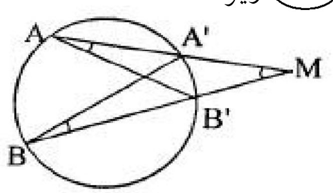
۳۸- ثابت کنید اگر امتداد وترهای 'AA و 'BB از دایره‌ی (C) یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند. آن‌گاه:




$$MA \times MA' = MB \times MB'$$

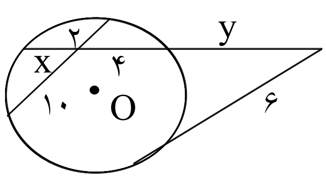
« **پاسخ** »

ابتدا A را به 'B و B را به 'A وصل می‌کنیم. دو مثلث 'AMB و A'MB متشابه‌اند (۰/۲۵) زیرا:



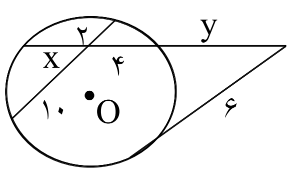

$$\begin{cases} \text{زاویه ی محاطی } \widehat{A} = \widehat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \; (۰/۵) \\ \text{مشترک } \widehat{M} \end{cases} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} \; (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow MA \times MA' = MB \times MB'$$




۳۹- در شکل مقابل مقدارهای x و y را به‌دست آورید.

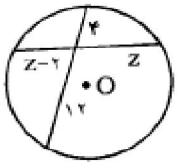
« **پاسخ** »




$$۴ \times x = ۲ \times ۱۰ \; (۰/۲۵) \Rightarrow x = ۵ \quad (۰/۲۵)$$

$$۶^۲ = y(y+۹) \; (۰/۲۵) \Rightarrow y^۲ + ۹y - ۳۶ = ۰ \Rightarrow y = ۳ \; (۰/۲۵)$$

۴۰- با توجه به شکل زیر اندازه‌ی z را تعیین کنید.

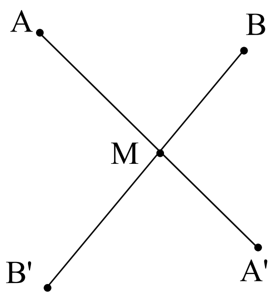



« **پاسخ** »

$۴ \times ۱۲ = z(z-۲)$ ۰/۵

$z^{۲} - ۲z - ۴۸ = ۰ \Rightarrow (z-۸)(z+۶) = ۰$ ۰/۲۵ $\Rightarrow z = ۸ \; , \; z = -۶ \Rightarrow z = ۸$ ق ق ۰/۲۵

۴۱- قضیه: ثابت کنید اگر دو پاره‌خط $AA'$ و $BB'$ در نقطه‌ی $M$ یکدیگر را طوری قطع کنند که $MA \, . \, MA' = MB \, . \, MB'$ ، آنگاه چهار نقطه‌ی $A$ , $A'$ , $B$ و $B'$ روی یک دایره‌اند.

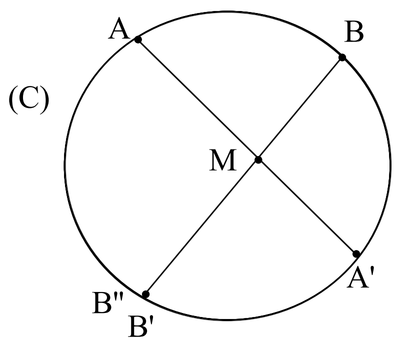



« **پاسخ** »

برهان: بر سه نقطه‌ی $A$، $B$ و $A'$ یک دایره می‌گذرانیم. ۰/۲۵ (دایره‌ی $C$) اگر این دایره از نقطه‌ی $B'$ بگذرد، حکم ثابت است. ۰/۲۵ اما اگر این دایره از $B'$ نگذرد، خط $MB$ را در نقطه‌ی دیگری مانند $B''$ قطع خواهد کرد، در این صورت خواهیم داشت:

$MA \, . \, MA' = MB \, . \, MB''$ ۰/۲۵

از مقایسه‌ی این رابطه با فرض قضیه، نتیجه می‌شود $MB' = MB''$ ۰/۲۵ و این نشان می‌دهد که $B''$ بر $B'$ منطبق است. ۰/۲۵ یعنی دایره‌ای که بر سه نقطه $A$ ، $B$ و $A'$ گذشته‌است، از نقطه‌ی $B'$ نیز می‌گذرد، پس چهار نقطه $A, A', B$ و $B'$ روی یک دایره واقع‌اند.




۴۲- دو دایره به شعاع‌های ۲ سانتی‌متر و ۷ سانتی‌متر و خط‌المرکزین برابر $۲x + ۱$ سانتی‌متر مفروضند. اگر اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۲x$ سانتی‌متر باشد، مقدار $x$ را محاسبه کنید.

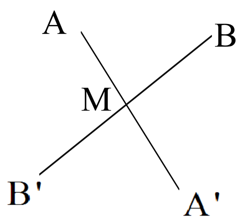
« **پاسخ** »

مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}}$

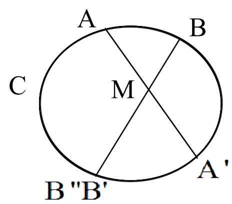
$۲x = \sqrt{(۲x+۱)^{۲} - (۷-۲)^{۲}}$

$\rightarrow ۴x^{۲} = ۴x^{۲} + ۴x + ۱ - ۲۵ \rightarrow x = ۶$

۴۳- عکس قضیه (رابطه طولی در دایره): ثابت کنید اگر دو پاره خط $AA'$ و $BB'$ در نقطه $M$ یکدیگر را طوری قطع کنند که $MA\times MA'=MB\times MB'$ آنگاه چهار نقطه‌ی $A$ , $A'$ , $B$ و $B'$ روی یک دایره‌اند.




« **پاسخ** »




بر سه نقطه‌ی $A$ , $B$ و $A'$ یک دایره می‌گذرانیم ۰/۲۵ (دایره $C$) اگر این دایره از نقطه‌ی $B'$ بگذرد، حکم ثابت است ۰/۲۵. اما اگر این دایره از $B'$ نگذرد، خط $MB$ را در نقطه‌ی دیگری مانند $B"$ قطع خواهد کرد. در این صورت خواهیم داشت:

۰/۲۵ $\quad MA \,.\, MA' = MB \,.\, MB"$

از مقایسه‌ی این رابطه با فرض قضیه، نتیجه می‌شود $MB'=MB"$ ۰/۲۵ و این نشان می‌دهد که $B"$ بر $B'$ منطبق است ۰/۲۵ یعنی دایره‌ای که بر سه نقطه‌ی $A$ و $B$ و $A'$ گذشته است، از نقطه‌ی $B'$ نیز می‌گذرد. پس چهار نقطه‌ی $A$, $A'$, $B$ و $B'$ روی یک دایره واقع هستند.

۴۴- دو دایره‌ی $C\ (O\ ,\ ۶)$ و $C'\ (O'\ ,\ ۴)$ مفروضند. اگر $OO' = d$ باشد، اوضاع دایره را در حالت‌های زیر بنویسید. (با ذکر دلیل)

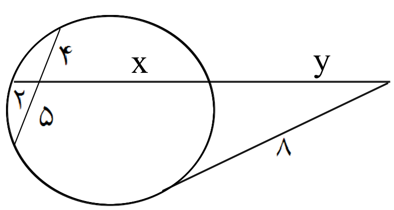
۱) $d = ۲$ $\qquad\qquad$ ۲) $d = ۷$

« **پاسخ** »

۱) ۰/۲۵ دو دایره مماس درون ۰/۲۵ $d = ۲\ ,\ R = ۶\ ,\ R' = ۴ \rightarrow d = R - R'$

۲) ۰/۲۵ دو دایره متقاطع ۰/۲۵ $d = ۷\ ,\ R = ۶\ ,\ R' = ۴ \rightarrow R - R' < d < R + R'$

۴۵- با توجه به شکل مقدار $x$ و $y$ را بیابید.



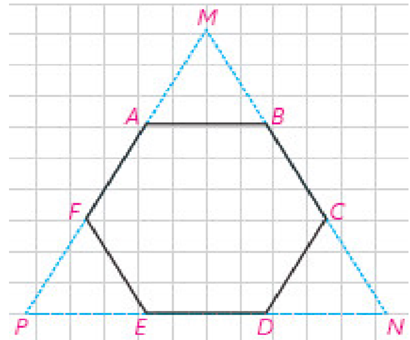

« **پاسخ** »

$۲x = ۲۰ \Rightarrow x = ۱۰$ ۰/۲۵

$y(y + ۱۰ + ۲) = ۶۴$ ۰/۲۵ $\Rightarrow y^۲ + ۱۲y - ۶۴ = ۰$

$\Rightarrow (y+۱۶)(y-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۴ & ۰/۲۵ \\ y = -۱۶ & \text{غ ق ق} \quad ۰/۲۵ \end{cases}$

۴۶- شش‌ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی. مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.




الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

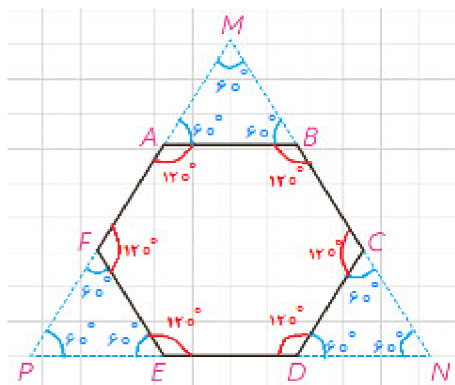
ب) نشان دهید مساحت شش‌ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

پ) از نقطه‌ی دلخواه T درون شش‌ضلعی عمودهای TH، 'TH و "TH را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید: $S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$

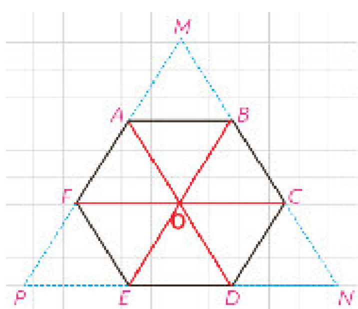
**« پاسخ »**

الف) اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم $۱۲۰^\circ$ است. بنابراین زاویه‌های خارجی $۶۰^\circ$ است. با توجه به شکل و مجموع زوایای داخلی هر مثلث نتیجه می‌گیریم که $\widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{P} = ۶۰^\circ$ و در نتیجه مثلث MNP متساوی‌الساقین است.

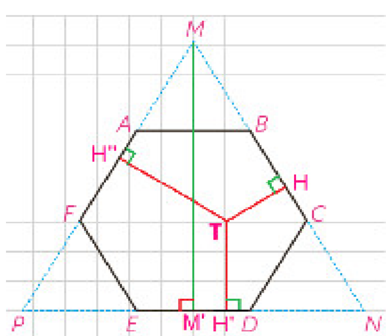



ب) اگر قطرهای شش‌ضلعی منتظم را رسم کنیم آن‌را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌کنیم و در مثلث MNP، ۹ مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شود.

$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{MNP}} = \frac{۶S_{MAB}}{۹S_{MAB}} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

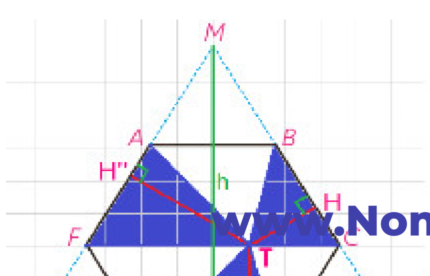



پ) مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع مقداری ثابت است و این مقدار با طول ارتفاع مثلث برابر است:




$$TH + TH' + TH'' = MM'$$

ت)

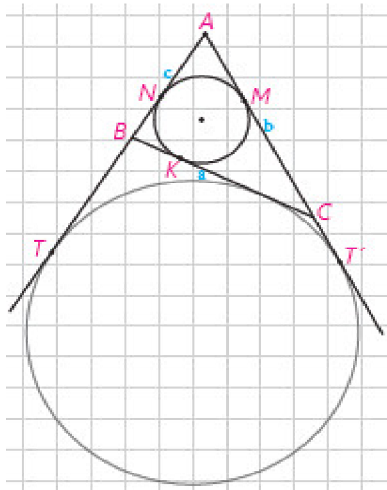



$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

$$S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}$$

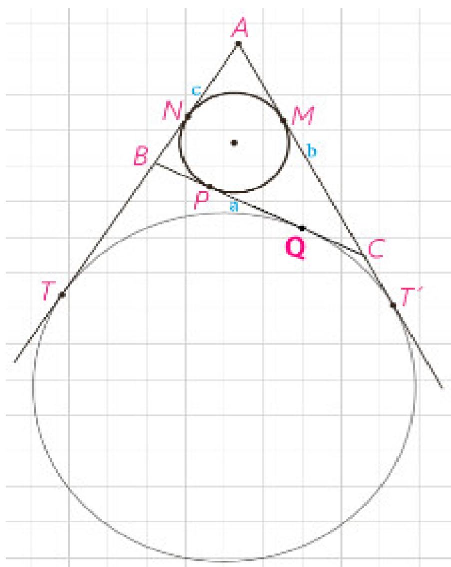
$$\frac{۱}{۲}AF \cdot TH'' + \frac{۱}{۲}DE \cdot TH' + \frac{۱}{۲}BC \cdot TH$$

۴۷- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و K باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:




$AM = AN = P - a$
$BN = BK = P - b\ ,\ CM = CK = P - c$
$AT = AT' = P$

« **پاسخ** »




$$AM = AN = P - a$$

$$\left.\begin{array}{l} AN = c - BN \\ AM = b - CM \end{array}\right\} \Rightarrow AM + AN$$

$$= b + c - (BN + CM) \xrightarrow[CM = CP\ ,\ BN = BP]{AM = AN}$$

$$۲AM = b + c - \underbrace{(BP + CP)}_{a} = b + c - a$$

$$۲AM = ۲p - ۲a \Rightarrow AM = AN = p - a$$

$$BN = BP = P - b$$

$$\left.\begin{array}{l} BN = c - AN \\ BP = a - CP \end{array}\right\} \Rightarrow BN + BP = a + c - (AN + CP) \xrightarrow[AN = AM\ ,\ CP = CM]{BP = BN}$$

$$۲BN = a + c - \underbrace{(AM + CM)}_{b} = a + c - b$$

$$۲BN = ۲p - ۲b \Rightarrow BN = BP = p - b$$

$$CM = CP = P - C$$

$$\left.\begin{array}{l} CM = b - AM \\ CP = a - BP \end{array}\right\} \Rightarrow CM + CP = b + A - (AM + BP) \xrightarrow[AN = AM\ ,\ BP = BN]{CM = CP}$$

$$۲CM = b + a - \underbrace{(AN + BN)}_{c} = b + a - c$$

$$۲CM = ۲p - ۲c \Rightarrow CM = CP = p - c$$

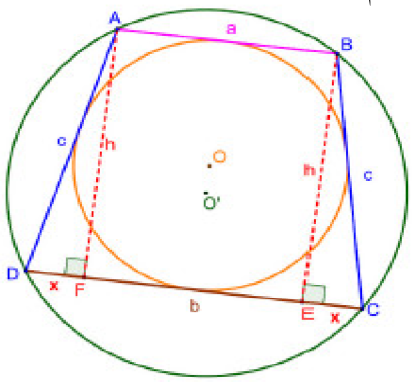
$$AT = AT' = P$$

$$AT + AT' - c + BT + b + CT' \xrightarrow[BT = BQ\ ,\ CT' = CQ]{AT = AT'} ۲AT = c + b + BQ + CQ$$

۴۸- یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها

**« پاسخ »**

چون ذوزنقه‌ی ABCD محاطی است پس متساوی‌الساقین است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است. در نتیجه: $2c = a + b$ و مثلث ADF قائم‌الزاویه است.




$$2c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}\ ,\ b = 2x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}$$

$$h^2 = c^2 - x^2 \Rightarrow h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{4ab}{4} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b) \times h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)\sqrt{ab}$$

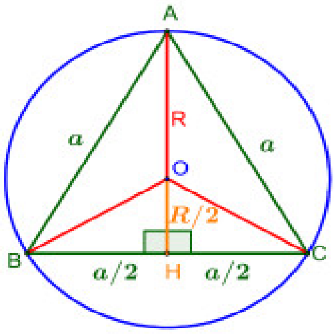
۴۹- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

« **پاسخ** »

مرکز دایره‌ی محیطی نقطه‌ی O محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی‌الاضلاع است نقطه‌ی O محل برخورد میانه‌ها هم هست. بنابراین:

راه اول:

$$AB = BC = AC = a \quad , \quad BH = CH = \frac{a}{۲}$$

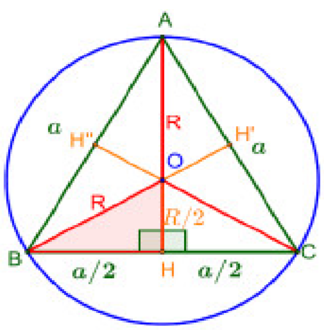



$$\left.\begin{array}{l} OH = \frac{OA}{۲} \Rightarrow OH = \frac{R}{۲} \Rightarrow AH = R + \frac{R}{۲} = \frac{۳}{۲}R \\ \overset{\triangle}{ACH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow AH = \sqrt{AC^۲ + CH^۲} \\ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۳}{۲}R \Rightarrow a = \frac{۳R}{\sqrt{۳}} \Rightarrow a = R\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\left(R\sqrt{۳}\right)^۲ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

راه دوم: با توجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث همنهشت ساخته شده است. این مثلث‌های به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند.




$$\overset{\triangle}{OBA} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow BH = \sqrt{R^۲ - \left(\frac{R}{۲}\right)^۲} = \frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = ۶S_{OBH} \Rightarrow S_{ABC} = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{R}{۲} \times \frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

۵۰- در سوالات زیر گزینه درست را انتخاب کنید:

الف) مرکز دایره محاطی داخلی هر مثلث، محل برخورد ....... آن مثلث است.

۱) ارتفاع‌های اضلاع
۲) عمود منصف‌های اضلاع
۳) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی
۴) میانه‌های اضلاع

ب) مرکز دایره محیطی هر مثلث، محل برخورد ....... آن مثلث است.

۱) ارتفاع‌های اضلاع
۲) عمودمنصف‌های اضلاع
۳) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی
۴) میانه‌های اضلاع

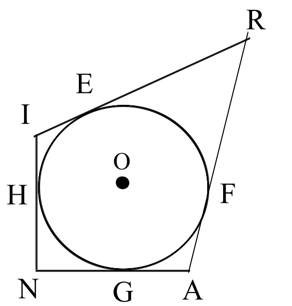
**« پاسخ »**

الف) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۰/۲۵) ص ۵۳

ب) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۰/۲۵) ص ۵۹

۵۱- ضلع‌های چهارضلعی محیطی IRAN بر دایره مماس‌اند. (شکل روبه‌رو)
ثابت کنید:

$$IR + AN = RA + NI$$




**« پاسخ »**

می‌دانیم اگر از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آن‌گاه اندازه‌های دو مماس برابرند، بنابراین:

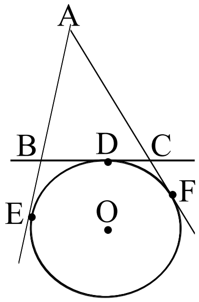
$$\begin{cases} RE = RF \\ IE = IH \\ NG = NH \\ AG = AF \end{cases}$$

رابطه‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\Rightarrow RE + IE + NG + AG = RF + IH + NH + AF$$

$$\Rightarrow IR + AN = RA + NI$$

۵۲- خط های $AE$ ، $AF$ و $BC$ به ترتیب در نقطه‌های $E$ ، $F$ و $D$ بر دایره $(O)$ مماس هستند. مماس $BC$، خط های $AE$ و $AF$ را به ترتیب در نقطه‌های $B$ و $C$ قطع کرده است. ثابت کنید که با تغییر مکان نقطه‌ی $D$ روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت $E$ و $F$، محیط مثلث $ABC$ ثابت می‌ماند.



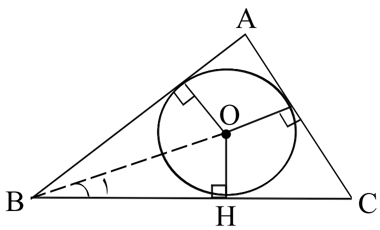

« **پاسخ** »

می‌دانیم که طول مماس‌های رسم شده از نقطه‌ای خارج از یک دایره با هم برابر است.

$$\text{محیط مثلث} = AB + AC + BC = AB + AC + BD + DC = AB + AC + BE + CF \quad ۰/۷۵$$
$$= AE + AF = ۲AE \quad ۰/۲۵$$

بنابراین محیط مثلث $ABC$ مستقل از نقطه‌ی $D$ بوده و مقدار آن ثابت است.

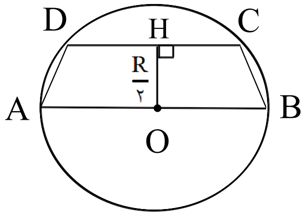
۵۳- مثلثی رسم کنید که از آن طول یک ضلع و زاویه مقابل به آن و شعاع دایره محاطی معلوم باشد.




« **پاسخ** »

چون مرکز دایره محاطی در محل تلاقی نیمسازهای مثلث است پس اگر زاویه‌ی $B$ معلوم باشد مثلث $OHB$ را با معلوم بودن $OH$ و $\hat{H} = ۹۰$ و $\hat{B}_۱$ که معلوم است رسم می‌کنیم به مرکز $O$ به شعاع $r = OH$ دایره محاطی رسم کرده از $B$ مماس بر دایره رسم می‌کنیم به اندازه‌ی زاویه $\frac{B}{۲}$ و همچنین مثلث $OHC$ نیز قابل رسم است از $C$ خطی رسم می‌کنیم که با آن زاویه $\frac{C}{۲}$ بسازد تا این دو خط همدیگر را در نقطه‌ی $A$ قطع کند مثلث $ABC$ مثلث مطلوب است.

۵۴- ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ در دایره‌ای به شعاع $R$ چنان محاط است که $AB$ قطر دایره و ارتفاع این ذوزنقه $\frac{R}{۲}$ می‌باشد. محیط و مساحت این ذوزنقه را بر حسب $R$ تعیین کنید.

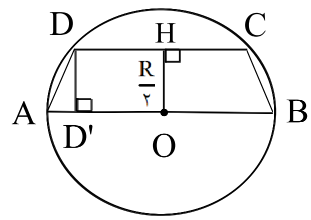



**« پاسخ »**

از $O$ به $D$ وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه $OHD$ داریم:

$$HD^{۲} = OD^{۲} - OH^{۲} = R^{۲} - \frac{R^{۲}}{۴} = \frac{۳R^{۲}}{۴} \Rightarrow HD = \frac{R\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow CD = ۲HD = R\sqrt{۳}$$

در مثلث قائم‌الزاویه $ADD'$ داریم:




$$AD' = AO - OD' = R - \frac{R\sqrt{۳}}{۲} = R\left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$DD' = OH = \frac{R}{۲}$$

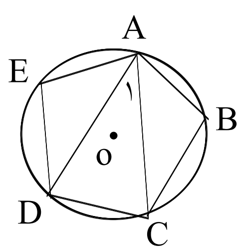
$$\Rightarrow AD^{۲} = AD'^{۲} + DD'^{۲} \Rightarrow AD^{۲} = R^{۲}\left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲} + \frac{R^{۲}}{۴} = R^{۲}\left(۲ - \sqrt{۳}\right)$$

$\Rightarrow AD = R\sqrt{۲ - \sqrt{۳}} = BC$ اندازه هر ساق ذوزنقه

محیط ذوزنقه $= ۲R + ۲R\sqrt{۲ - \sqrt{۳}} + R\sqrt{۳} = R\left(۲ + \sqrt{۳} + ۲\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}\right)$

مساحت ذوزنقه $= \frac{۱}{۲}\, OH\,(AB + CD) = \frac{۱}{۲} \times \frac{R}{۲}\left(۲R + R\sqrt{۳}\right) = \frac{R^{۲}}{۴}\left(۲ + \sqrt{۳}\right)$

۵۵- در دایره $C(O\,,\,R)$ یک پنج‌ضلعی منتظم محاط شده است. زاویه بین دو قطر مرسوم از یک رأس را به دست آورید.



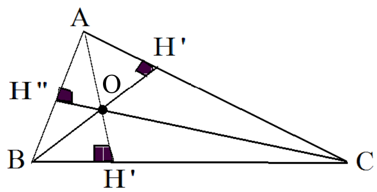

**« پاسخ »**

پنج‌ضلعی منتظم دایره را به پنج قسمت مساوی تقسیم می‌کند به طوری‌که اندازه‌ی هر کمان آن $\frac{۳۶۰}{۵}$ می‌باشد.

زاویه محاطی $\hat{A}_{۱} = \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} = \frac{\frac{۳۶۰}{۵}}{۲} = ۳۶$

۵۶- ثابت کنید شعاع دایره محاطی داخلی هر مثلث از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید. که در آن S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث می‌باشد. $R = \frac{S}{P}$

**« پاسخ »**




راه‌حل: فرض کنیم O مرکز دایره محاطی درونی مثلث ABC باشد.
در این صورت نقطه‌ی O از سه ضلع مثلث ABC باشد.
در این صورت نقطه‌ی O از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله خواهد بود، داریم:

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC}$$

$$S = \frac{۱}{۲}OH'' \times AB + \frac{۱}{۲}OH' \times AC + \frac{۱}{۲}OH \times BC$$

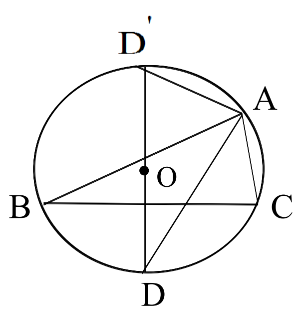
$$S = \frac{۱}{۲}r.\ AB + \frac{۱}{۲}r.AC + \frac{۱}{۲}r.BC$$

$$S = \frac{۱}{۲}r(AB + AC + BC)$$

$$S = \frac{۱}{۲}\ r(۲P) \Rightarrow R = \frac{S}{P}$$

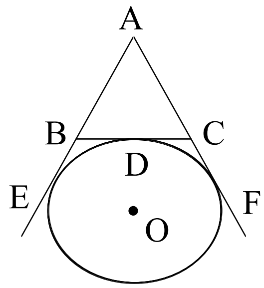
۵۷- مثلث ABC در دایره به مرکز O محاط است. نیمساز داخلی زاویه‌ی A دایره O را در نقطه‌ی D و نیمساز خارجی آن دایره را در نقطه‌ی $D'$ قطع می‌کند. ثابت کنید $DD'$ بر BC عمود است.

**« پاسخ »**

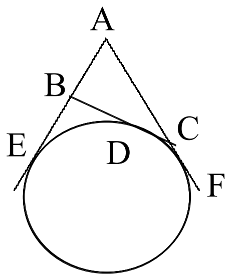



می‌دانیم نیمساز داخلی و خارجی یک رأس مثلث بر هم عموداند پس $AD \perp AD'$. به عبارتی $D\hat{A}D' = ۹۰$ بنابراین $DD'$ قطر دایره است. از طرفی D وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ است و قطر $DD'$ از وسط کمان BC عبور کرده بنابراین $DD'$ از وسط وتر BC گذشته و بر آن عمود است یعنی $DD'$ عمودمنصف BC است.

۵۸- در شکل مقابل خطهای $AE$ و $AF$ بر دایره مماس هستند.
نشان دهید با تغییر مکان نقطه‌ی $D$ روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت $E$ و $F$ محیط مثلث $ABC$ ثابت می‌ماند.




« **پاسخ** »




فرض: $AE$ و $AF$ بر دایره مماس هستند.

حکم: محیط $\overset{\triangle}{ABC}$ ثابت است.

برهان: می‌دانیم اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره بکشیم طول دو مماس با هم برابرند.

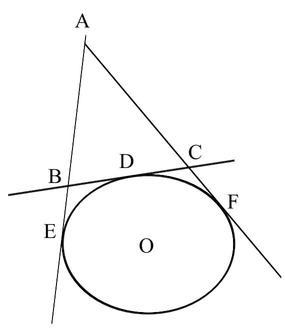
$CD = CF\ ,\ BC = BE \quad (۱)$

$AB$ محیط $= AB + Ac + BC$

$= AB + AC + BC + DC \xrightarrow{\text{از } (۱)} AB + AC + BE + CF = AE + AF = ۲AF$

پس محیط مثلث بستگی به تغییر نقطه‌ی $D$ روی دایره ندارد.

۵۹- خطهای $AE$، $AF$ و $BC$ به ترتیب در نقطه‌های $E$، $F$ و $D$ بر دایره‌ی $(O)$ مماس هستند.
مماس $BC$، خطهای $AE$ و $AF$ را به ترتیب در نقطه‌های $B$ و $C$ قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه‌ی $D$ روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت $E$ و $F$، محیط مثلث $ABC$ ثابت می‌ماند.



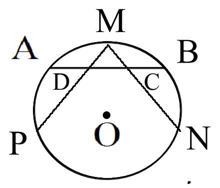

« **پاسخ** »

اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند. پس $BD = BE$ و $CD = CF$

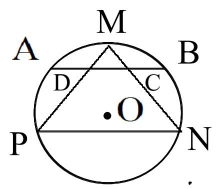
داریم: $\widehat{ABC}$ محیط $= AB + BC + AC \rightarrow \widehat{ABC}$ محیط $= AB + BD + DC + AC$

$\widehat{ABC}$ محیط $= AB + BE + CF + AC \rightarrow \widehat{ABC}$ محیط $= AE + AF \rightarrow \widehat{ABC}$ محیط $=$ مقدار ثابت

۶۰- از نقطه M وسط کمان AB دو وتر دلخواه MN و MP را رسم می‌کنیم تا وتر AB را در نقاط C و D قطع کند. ثابت کنید چهارضلعی CDPN محاطی است.




**« پاسخ »**




$\begin{matrix} C(O\ ,\ R) \\ AM = BM \end{matrix} \Rightarrow$ CDPN محاطی است        حکم:

با توجه به شرط محاطی بودن چهارضلعی باید ثابت کرد:

$$\begin{cases} \hat{P} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \\ \hat{C} + \hat{N} = ۱۸۰^\circ \end{cases}$$

محاطی است $\hat{P} = \dfrac{\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{BN}}{۲}$ و $\hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{PN}}{۲} \Rightarrow$

$$\hat{P} + \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{BN}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{PN}}{۲}$$

$\hat{P} + \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{BN} + \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{PN}}{۲} = \dfrac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$ و به همین ترتیب : $\hat{C} + \hat{N} = ۱۸۰^\circ$