

درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

قبل از ورود به مفهوم احتمال شرطی، مفاهیم مقدماتی مربوط به احتمال را یادآوری می کنیم.

قسمت اول: یادآوری مفاهیم احتمال

مفاهیم مربوط به احتمال که در پایه های قبل با آنها آشنا شده اید به شرح زیر می باشند.

۱: پدیدهی تصادفی

هر پدیده یا آزمایش که نتیجهی آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش بینی کرد را پدیدهی تصادفی می نامند.

۲: فضای نمونه ای

مجموعه ای همه ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای می نامند و آن را با S نمایش می دهند.

۳: برآمد

هر یک از اعضای فضای نمونه ای را برآمد می گویند.

۴: پیشامد تصادفی

هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را پیشامد تصادفی نامیده می شود و آنرا نیز با یک حرف بزرگ لاتین مانند E نمایش می دهند.

۵: اعمال روی پیشامدها

الف: اجتماع دو پیشامد A و B که با نماد $A \cup B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهد.

ب: اشتراک دو پیشامد A و B که با نماد $A \cap B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن هر دو پیشامد A و B رخ دهد.

ج: تفاضل پیشامد B از پیشامد A که با نماد $A - B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن A و رخ ندادن B رخ دهد.

د: اگر S فضای نمونه‌ای و E یک پیشامد تصادفی از آن باشد، پیشامدی را که متناظر با رخ ندادن E می

باشد، مکمل E می نامند و آن را با E' یا E^c نمایش می دهند. بدیهی است که $E' = S - E$

۶: پیشامدهای ناسازگار

دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند، هرگاه هر دو با هم رخ ندهند. به عبارت دیگر اشتراک آنها تهی است.

$$A \cap B = \Phi$$

۷: احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی

اگر E یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد. در این صورت، خارج قسمت تعداد اعضای پیشامد تصادفی E

بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای نظیر آن یعنی S را احتمال وقوع پیشامد تصادفی E می نامند.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد حالت های ممکن}}$$

مثال ۱: در پرتاب یک تاس، احتمال آن را حساب کنید که مضرب ۳ بیاید.

حل:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(S) = 6$$

$$E = \{3, 6\} \rightarrow n(E) = 2$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

احتمال آمدن مضرب ۳

مثال ۲: از بین اعداد طبیعی از ۱۰ تا ۱۰۰ به تصادف یک عدد انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که

عدد انتخاب شده مضرب ۸ باشد.

حل:

$$S = \{10, 11, 12, \dots, 100\} \rightarrow n(S) = b - a + 1 = 100 - 10 + 1 = 91$$

$$E = \{16, 24, \dots, 96\} \rightarrow n(E) = \frac{b - a}{k} + 1 = \frac{96 - 16}{8} + 1 = 11$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{11}{91}$$

مثال ۳: تاسی را پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد رخ دادن عدد بزرگتر از ۵ و B پیشامد رخ دادن عدد کمتر

از ۳ باشد. نشان دهید که این دو پیشامد ناسازگارند.

حل :

$$\text{فضای نمونه ای} \quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(S) = 6$$

$$\text{عدد کمتر از ۳} \quad B = \{1, 2\} \quad \text{عدد بزرگتر از ۵} \quad A = \{6\}$$

و چون $A \cap B = \{\}$ این دو پیشامد ناسازگارند.

۸: اصول احتمال

برای هر پیشامد مانند E از فضای نمونه ای S ، احتمال وقوع E ، عددی حقیقی از بازه $[0, 1]$ می باشد و

آن را با $P(E)$ نمایش می دهند. اصول احتمال عبارتند از :

$$\text{اصل ۱:} \quad P(S) = 1$$

$$\text{اصل ۲:} \quad \text{برای هر دو پیشامد } A \text{ و } B \text{ که } A \cap B = \Phi \text{ داریم،} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{اصل ۳:} \quad \text{برای هر دو پیشامد } A \text{ و } B \text{ که } A = B \text{ داریم،} \quad P(A) = P(B)$$

نتیجه :

$$\text{الف:} \quad \text{برای هر پیشامد مانند } E \text{ از فضای نمونه ای } S \text{، ثابت کنید که} \quad P(E') = 1 - P(E)$$

$$\text{ب:} \quad P(\Phi) = 0$$

۹: روابط اساسی احتمال

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S می توان روابط زیر را نوشت:

$$\text{الف)} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{ب)} \quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

مثال: اعداد طبیعی از ۱۱ تا ۱۰۰ را روی صد کارت می نویسیم و یک کارت به تصادف از میان آنها

استخراج می کنیم. مطلوبست احتمال اینکه عدد روی این کارت:

الف: بر ۴ یا بر ۶ بخش پذیر باشد.

ب: بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نباشد.

حل :

$$S = \{11, 12, \dots, 100\} \rightarrow n(S) = b - a + 1 = 100 - 11 + 1 = 90$$

$$\text{بخش پذیر بر } 4 \text{ } A = \{12, 16, \dots, 96, 100\} \rightarrow n(A) = \frac{b-a}{k} + 1 = \frac{100-12}{4} + 1 = 23$$

$$\text{بخش پذیر بر } 6 \text{ } B = \{12, 18, \dots, 96\} \rightarrow n(B) = \frac{b-a}{k} + 1 = \frac{96-12}{6} + 1 = 15$$

$$\text{بخش پذیر بر } 12 \text{ } (A \cap B) = \{12, 24, \dots, 96\} \rightarrow n(A \cap B) = \frac{b-a}{k} + 1 = \frac{96-12}{12} + 1 = 8$$

م م ۴ و ۶)

الف :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{23}{90} + \frac{15}{90} - \frac{8}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

ب :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{23}{90} - \frac{8}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

تمرین برای حل :

۱: احتمال اینکه دانش آموزی در درس آمار و احتمال قبول شود، $0/34$ و در درس حسابان قبول شود، $0/23$ و احتمال اینکه دست کم در یکی از این دو درس قبول شود، $0/38$ است. احتمال اینکه این دانش آموز در هر دو درس قبول شود، چقدر است؟

۲: احتمال آن که خانه ای یخچال داشته باشد، برابر $0/85$ و احتمال اینکه هم یخچال و هم تلویزیون باشد برابر $0/40$ و احتمال آن که حداقل یکی از این دو وسیله باشند $0/96$ می باشد. احتمال آن را بیابید که در این خانه :

الف : تلویزیون باشد. ب : فقط یخچال باشد.

۳: عددی به تصادف از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ انتخاب کنیم، احتمال اینکه :

الف : عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد، اما بر ۵ بخش پذیر نباشد، چقدر است؟

ب : عدد انتخابی نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد، چقدر است؟

قسمت دوم: احتمال شرطی

نتایج بسیاری از آزمایش ها و اتفاق هایی که در آینده رخ می دهند، مشروط به نتایج آزمایش های دیگر می باشند. احتمال این چنین رخداد هایی را احتمال شرطی می نامند. برای مثال احتمال آسیب دیدن یک راننده در یک تصادف به شرط اینکه از کمربند ایمنی استفاده کرده باشد. یک احتمال شرطی است. در واقع در احتمال شرطی با دو پیشامد مختلف سروکار داریم و فرض می کنیم یکی از آنها رخ داده است و می خواهیم بدانیم احتمال رخ دادن دیگری چه تغییری کرده است.

تعریف: فرض کنید A و B دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B) > 0$ در این صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را با نماد $P(A|B)$ نشان می دهیم و آنرا احتمال شرطی A به شرط وقوع B (یعنی B قبل از A رخ داده باشد) می گوییم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال: در یک مسابقه ای اتومبیل رانی، احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر $0/7$ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر $0/8$ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل: اگر A پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل و B پیشامد رسیدن به خط پایان تعریف کنیم. در این صورت داریم: $P(A \cap B) = 0/7$ و $P(B) = 0/8$ لذا:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0/7}{0/8} = \frac{7}{8}$$

نتیجه ۱: فرض کنید A و B دو پیشامد باشند، به قسمی که $B \neq \Phi$ در این صورت طبق تعریف احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

نتیجه ۲: در حالتی که فضای نمونه ای احتمال هم شانس است، شرطی کردن یک پیشامد مانند A نسبت به پیشامد دیگر مثل B این است که فضای نمونه ای یعنی S را کنار گذاشته و B را فضای نمونه ای تلقی می کنیم. احتمال روی این فضای نمونه ای نیز هم شانس است. به این رویکرد « کاهش فضای نمونه ای » گفته می شود.

مثال: دو تاس پرتاب می شوند، اگر مجموع شماره ها ۶ باشد، احتمال آنکه اقل از یکی از دو تاس ۲ باشد را حساب کنید.

حل:

$$A = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$$

یکی از دو عدد ۲ باشد.

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

$$A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{5}$$

مثال: سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. می دانیم که دست کم یک بار رو آمده است. در این صورت، احتمال اینکه هر سه بار رو آمده باشد، چقدر است؟

حل: سه بار رو آمدن سکه را A و دست کم یک بار رو آمدن سکه را B می نامیم. در این صورت:

$$S = \{RRR, RRP, RPR, PRR, PPR, PRP, RPP, PPP\}$$

$$B = \{RRR, RRP, RPR, PRR, PPR, PRP, RPP\}$$

$$A = \{RRR\}$$

$$A \cap B = \{RRR\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{7}$$

مثال: اعداد ۱ تا ۹ را روی نه کارت می نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوب است

احتمال اینکه هر سه عدد زوج باشند، به شرط اینکه مجموع آنها زوج باشد.

حل : برای اینکه مجموع سه عدد زوج باشند یا هر سه باید زوج باشند و یا اینکه دو عدد فرد و یکی زوج باشند. اما اعداد زوج در این مسئله چهارتا و اعداد فرد پنج تا هستند. حال اگر A پیشامد اینکه هر سه عدد زوج و B پیشامد زوج بودن مجموع اعداد سه کارت، تعریف کنیم. داریم.

$$n(A \cap B) = \binom{4}{3} = 4 \quad \text{و} \quad n(B) = \binom{5}{2} \binom{4}{1} + \binom{5}{0} \binom{4}{3} = 40 + 4 = 44$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{44} = \frac{1}{11}$$

تمرین ۳: دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده است باشد، چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ باشد، چقدر است؟

حل :

الف :

$$A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$$

$$A \cap B = \{(6, 4)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

ب :

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$$

$$B = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$A \cap B = \{(6, 4)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{6}$$

مثال: فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی ترین رقیبش را ببرد، $\frac{1}{6}$. احتمال قهرمانی این تیم

در حال حاضر $\frac{1}{4}$ و در صورتی که اصلی ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به $\frac{1}{3}$ افزایش خواهد یافت. با چه

احتمالی حداقل یکی از دو اتفاق « قهرمان شدن » یا « بردن اصلی ترین رقیب » برای این تیم اتفاق خواهد

افتاد؟

حل: اگر A پیشامد قهرمان شدن و B پیشامد بر اصلی ترین رقیب تعریف کنیم. در این صورت داریم.

$$P(A) = \frac{1}{4} \text{ و } P(B) = \frac{1}{6} \text{ و } P(A|B) = \frac{1}{3}$$

واضح است که هدف این مسئله تعیین $P(A \cup B)$ است. لذا بر اساس اطلاعات داده شده داریم.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{9 + 6 - 2}{36} = \frac{13}{36}$$

مثال: اگر $P(A - B) = \frac{1}{4}$ و $P(A) = \frac{3}{4}$ باشد. مقدار $P(B|A)$ را بدست آورید.

حل:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

تمرین برای حل:

۴: تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A|A) = 1$ ب) $P(A|A') = 0$

۵: اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{6}$ و $P(A|B) = \frac{1}{3}$ باشد. $P(A \cup B)$ را بدست آورید.

۶: یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به دست آورید، به شرط

قسمت سوم: پیشامد های مستقل و وابسته

گاهی نتایج یک آزمایش تصادفی وابسته به نتیجه‌ی یک آزمایش دیگر است و گاهی مستقل از آن می باشد. در این درس به معرفی پیشامد های مستقل و وابسته می پردازیم.

تعریف: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، بطوری که $P(A), P(B) > 0$ ، آنگاه این دو پیشامد را **مستقل** گوییم، هرگاه احتمال وقوع یکی از آنها بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. اگر دو پیشامد A و B مستقل نباشند، آنها را **وابسته** می گوییم.

نتیجه:

(۱) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، در این صورت:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

(۲) اگر A و B دو پیشامد وابسته باشند، در این صورت:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

$$= P(B).P(A|B)$$

توجه: اگر حداقل یکی از دو پیشامد A و B تهی باشد، این دو پیشامد مستقل هستند.

توجه: مستقل بودن دو پیشامد، در بسیاری از موارد، نیاز به بررسی ندارد. به عنوان مثال قبولی در درس فیزیک برای دو دانش آموز، دو پیشامد مستقل می باشند، زیرا قبولی یا عدم قبولی یکی هیچ تأثیری روی دیگری ندارد و لذا نیازی به بررسی مستقل بودن این دو پیشامد نیست.

مثال: جعبه ای محتوی ۱۲ لامپ است و می دانیم که ۳ تای آنها معیوب اند. از این جعبه به تصادف یک لامپ بر می داریم، سپس بدون جایگذاری لامپ اول، لامپ دیگری به تصادف بر می داریم. احتمال اینکه هر دو لامپ معیوب باشند، چقدر است؟

حل: تعریف می کنیم:

$$A = \text{پیشامد لامپ اول معیوب} \quad \text{و} \quad B = \text{پیشامد لامپ دوم معیوب}$$

چون معیوب یا غیر معیوب بودن لامپ اول هیچ تأثیری بر معیوب یا غیر معیوب بودن لامپ دوم ندارد، پس

دو پیشامد A و B مستقل هستند. در این صورت:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{22}$$

مثال: ۷۵ درصد افراد جامعه ای چشم میخی و ۴۰ درصد گروه خونی A دارند، یک فرد به تصادف انتخاب

می کنیم. احتمال آنکه این فرد چشم میخی یا گروه خونی A داشته باشند، کدام است؟

$$0.78(1) \quad 0.82(2) \quad 0.85(3) \quad 0.95(4)$$

حل: دو پیشامد چشم میخی بودن و گروه خونی A داشتن مستقل هستند، پس:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A).P(B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{17}{20} = 0.85$$

مثال: اگر $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A|B) = \frac{1}{6}$ و دو پیشامد B و A مستقل باشند. $P(A \cup B)$ را بدست

آورید.

حل:

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{3}{8}$$

تمرین ۷: اگر دو پیشامد A و B ناتپی و مستقل باشند، نشان دهید که:

الف) دو پیشامد A' و B' نیز مستقل هستند.

ب) دو پیشامد A و B نیز مستقل هستند.

ج) دو پیشامد A و B' نیز مستقل هستند.

حل:

الف:

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A).P(B)$$

$$= (1 - P(A)) - P(B)(1 - P(A)) = P(A') - P(B).P(A')$$

$$= P(A')(1 - P(B)) = P(A').P(B')$$

$$P(A' | B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A') \times P(B')}{P(B')} = P(A')$$

$$P(B' | A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{P(A') \times P(B')}{P(A')} = P(B')$$

ب:

$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(B)(1 - P(A)) \\ &= P(B) \cdot P(A') \end{aligned}$$

$$P(A' | B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A') \times P(B)}{P(B)} = P(A')$$

$$P(B | A') = \frac{P(A' \cap B)}{P(A')} = \frac{P(A') \times P(B)}{P(A')} = P(B)$$

ج: مانند ب حل می شود و حل آن به فراگیران محترم واگذار می شود.

تمرین برای حل :

۸: در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج ، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب

۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲ باشد. مستقل بودن یا نبودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۹: یک سکه و یک تاس را پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که سکه پشت و تاس عددی زوج

بیاید.

۱۰: احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه ۷۰ درصد است، احتمال اینکه

حداقل یکی از آنها در این درس قبول شود را به دست آورید.

۱۱: خانواده ای دارای دو فرزند است. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه هر دو فرزند آنها پسر باشند.

۱۲: فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر $0/5$ و احتمال قهرمانی تیم

ملی والیبال ایران در آسیا برابر $0/8$ باشد. تعیین کنید با چه حداقل یکی از این تیم ها قهرمان خواهد شد.

۱۳: احمد به احتمال $0/7$ در تیم کوهنوردی مدرسه شان و به احتمال $0/8$ در تیم ملی فوتبال نوجوانان

انتخاب می شود. احتمال های زیر را محاسبه کنید.

الف: در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب: در هیچکدام از تیم ها انتخاب نشود.

پ: فقط در تیم فوتبال انتخاب شود.

ت: فقط در یکی از تیم ها انتخاب شود.

ث: حداقل در یکی از تیم ها انتخاب شود.

۱۴: احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال قبول شدن دوستش در این درس می

باشد. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند برابر $0/625$ باشد. حساب کنید با چه

احتمالی رؤیا در این درس قبول خواهد شد.

۱۵: اگر A و B دو پيشامد مستقل باشند، ثابت کنید که: $P(A \cup B) = 1 - P(A') \cdot P(B')$

تهیه کننده: جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت: www.mathtower.ir

کانال تلگرام: @mathameri

درس دوم: آمار توصیفی

آمار توصیفی به خلاصه کردن داده ها در قالب نمودار و جدول و یا با محاسبه ی معیارهای مختلف گرایش به مرکز یا معیارهای پراکندگی می پردازد. به عبارتی دیگر، آمار به کمک معیارهای عددی و هندسی، اطلاعاتی مناسب از داده های جمع آوری شده از نمونه یا جامعه برای نتیجه گیری می دهد.

قسمت اول: معیارهای گرایش به مرکز

هر عدد که معرف مرکز مجموعه داده ها باشد را معیار مرکزی یا شاخص مرکزی (پارامتر مرکزی) می نامند. به کمک معیار های مرکزی می توان موقعیت کلی داده ها را تعیین کرد، لذا برای مقایسه ی دو یا چند جامعه یک روش مناسب، محاسبه ی معیار های مرکزی آنها است. معیار های مرکزی دارای سه نوع مهم هستند. در اینجا فقط به دو نوع از آنها یعنی ، میانگین (\bar{x}) و میانه (\tilde{x}) می پردازیم. میانگین مهمترین معیار مرکزی محسوب می شود.

میانگین

در یک مجموعه ی داده های آماری، عدد متمایل به وسط آنها را میانگین (میانگین حسابی) می نامند. میانگین یا متوسط داده ها، با خارج قسمت مجموع اندازه ی داده ها بر تعداد آنها برابر است.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

مثال: میانگین داده های زیر را بدست آورید.

$$x_i : 5 \text{ و } 8 \text{ و } 10 \text{ و } 12 \text{ و } 14 \text{ و } 17$$

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{5 + 8 + 10 + 12 + 14 + 17}{6} = \frac{66}{6} = 11$$

تمرین برای حل :

۱: میانگین نمرات یک کلاس ۱۶ نفری در درس ریاضی برابر $12/5$ است. جمع نمرات دانش آموزان این کلاس را بدست آورید.

۲: میانگین دادهای زیر برابر ۲۲ است. مقدار a را بدست آورید.

$$15 \text{ و } 20 \text{ و } 21 \text{ و } 24 \text{ و } 25 \text{ و } a \text{ و } 22 \text{ و } 30 \text{ و } 25 \text{ و } 20$$

۳: میانگین ۵ داده‌ی آماری ۱۷ است. اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم. میانگین جدید

چه عددی خواهد شد؟

۴: ثابت کنید که مجموع تفاضل هر یک از داده‌های یک مجموعه آماری از میانگین آنها برابر صفر است.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

خواص میانگین

اگر $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ و $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ دو مجموعه‌ی عددی و k یک عدد حقیقی باشد. در این صورت خواص زیر را می‌توان برای میانگین بررسی کرد.

الف: میانگین حاصل جمع داده‌های یک مجموعه‌ی آماری با یک عدد ثابت با حاصل جمع آن عدد و میانگین آن داده‌ها برابر است.

$$z_i = x_i + k \rightarrow \bar{z} = \bar{x} + k$$

ب: میانگین حاصل ضرب داده‌های یک مجموعه‌ی آماری در یک عدد ثابت با حاصل ضرب آن عدد و میانگین آن داده‌ها برابر است.

$$z_i = k \cdot x_i \rightarrow \bar{z} = k \cdot \bar{x}$$

ج: میانگین حاصل جمع داده‌های متناظر از دو مجموعه داده‌های آماری با حاصل جمع میانگین‌های آنها برابر است.

$$z_i = x_i + y_i \rightarrow \bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$$

مثال: داده‌های زیر وزن پنج نفر از دوستان نیلوفر برحسب کیلوگرم می‌باشند.

۵۵ و ۶۱ و ۵۷ و ۵۵ و ۶۲

الف: میانگین داده‌ها را به دست آورید.

ب: به هر کدام از این داده‌ها ۳ واحد اضافه کنید، سپس میانگین داده‌های جدید را به دست آورده و با میانگین داده‌های اصلی مقایسه کنید.

ج: هر کدام از این داده‌ها را در ۲ ضرب کنید، سپس میانگین داده‌های جدید را به دست آورده و با میانگین

حل :

الف :

x_i : ۶۲ و ۵۵ و ۵۷ و ۶۱ و ۵۵

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۶۲ + ۵۵ + ۵۷ + ۶۱ + ۵۵}{۵} = \frac{۲۹۰}{۵} = ۵۸ \text{ kg}$$

ب :

y_i : ۶۵ و ۵۸ و ۶۰ و ۶۴ و ۵۸

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{۶۵ + ۵۸ + ۶۰ + ۶۴ + ۵۸}{۵} = \frac{۳۰۵}{۵} = ۶۱ \text{ kg}$$

نتیجه : میانگین نیز ۳ واحد افزایش یافت .

ج :

z_i : ۱۲۴ و ۱۱۰ و ۱۱۴ و ۱۲۲ و ۱۱۰

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{n} = \frac{۱۲۴ + ۱۱۰ + ۱۱۴ + ۱۲۲ + ۱۱۰}{۵} = \frac{۵۸۰}{۵} = ۱۱۶ \text{ kg}$$

نتیجه : میانگین نیز در ۲ ضرب شده است.

تمرین برای حل :

۴ : هر یک از خواص فوق را اثبات کنید.

۵ : ثابت کنید که میانگین داده های مساوی، برابر هر یک از آنها است.

۶ : اگر میانگین وزن دوستان محسن بر حسب کیلوگرم برابر ۵۸ باشد. این میانگین بر حسب گرم، چقدر است؟

۷ : دمای هوای اهواز در یک هفته از شهریور سال ۹۶ برابر ۴۵ سانتی گراد باشد. این میانگین را بر حسب

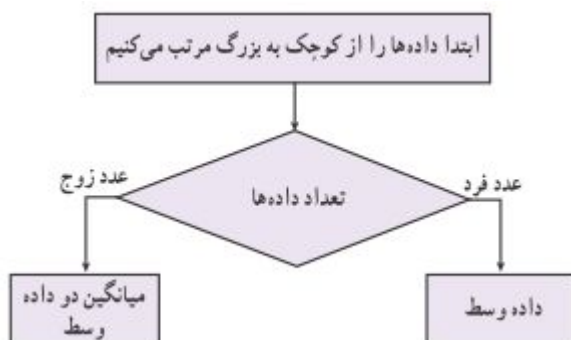
$$\text{فارنهایت بدست آورید. } (F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲)$$

۸ : هرگاه میانگین داده های آماری (x_1 و x_2 و x_3 و ... و x_n) برابر ۱۷ باشد. میانگین داده های

($۲x_1 + ۱$ و $۲x_2 + ۱$ و $۲x_3 + ۱$ و ... و $۲x_n + ۱$) را بدست آورید.

میانہ

در یک مجموعه از داده های آماری، میانہ داده ای است که نصف داده از آن بیشتر و نصف داده ها از آن کمتر است. به عبارت دیگر در یک مجموعه ی داده های آماری که به صورت غیر نزولی (از کوچک به بزرگ)



مرتب شده باشند، عدد وسط این داده ها را میانہ می نامند. برای محاسبه ی میانہ ابتدا داده ها را به

صورت غیر نزولی مرتب می کنیم، آنگاه

الف) اگر تعداد داده ها فرد باشد، داده ی وسط میانہ است.

ب) اگر تعداد داده ها زوج باشد، میانگین دو داده ی وسط میانہ است.

مثال: میانہ ی هریک از مجموعه های زیر را بیابید.

الف) ۵ و ۸ و ۵ و ۱۰ و ۹ و ۸ و ۷ و ۵ و ۳

ب) ۶۰ و ۲۲ و ۲۱ و ۲۰ و ۱۹ و ۱۷ و ۱۷ و ۱۶ و ۱۵ و ۱۳

حل: ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

الف:

۳ و ۵ و ۵ و ۵ و ۷ و ۸ و ۸ و ۹ و ۱۰



چون تعداد داده ها فرد است، پس داده ی وسط میانہ است. لذا میانہ برابر $\bar{x} = 7$ می باشد.

ب:

۱۳ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۷ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و ۶۰



چون تعداد داده ها زوج است، میانگین دو داده ی وسط میانہ است. لذا میانہ برابر $\bar{x} = \frac{17 + 19}{2} = 18$ می باشد.

نتیجه:

اگر تمام داده های یک مجموعه ی داده های آماری برابر باشند، میانہ نیز برابر هر یک از آنها است.

توجه: اگر در یک مجموعه‌ی داده‌های آماری داده‌ی دور افتاده‌ای وجود داشته باشند. چون میانه تحت تأثیر داده‌های دور افتاده قرار نمی‌گیرد، نسبت به میانگین، معیار مناسبتری محسوب می‌شود. داده‌ی دور افتاده، داده‌ای است که نسبت به سایر داده‌ها تفاوت بسیار دارد.

تمرین برای حل :

۹: تعداد حمله‌های یک تیم فوتبال در شش ماه گذشته به صورت ۴۲ و ۴۴ و ۴۷ و ۱۰ و ۴۳ و ۴۸ است. میانگین و میانه‌ی تعداد حملات این تیم را در این شش ماه به دست آورید. به نظر شما کدام معیار با معنا تر است؟ چرا؟

۱۰: میانگین و میانه‌ی داده‌های زیر را تعیین کنید.

۱۵ و ۱۸ و ۲۲ و ۱۶ و ۹ و ۱۱ و ۵ و ۴

قسمت دوم: معیارهای پراکندگی

در فعالیت آماری، گاهی لازم می‌شود که میزان پراکندگی (دوری و نزدیکی) داده را نسبت به همدیگر یا نسبت به میانگین محاسبه شود. برای اینکار از معیارهای پراکندگی استفاده می‌شود.

هر عدد که میزان پراکندگی داده‌ها نسبت به همدیگر یا نسبت به میانگین را نشان دهد، را معیار پراکندگی یا شاخص پراکندگی (پارامتر پراکندگی) می‌نامند. مهمترین معیارهای پراکندگی عبارتند از، دامنه‌ی تغییرات، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات می‌باشند.

از بین این معیارها، دامنه‌ی تغییرات پراکندگی داده‌ها را نسبت به همدیگر و بقیه، پراکندگی را نسبت به میانگین نشان می‌دهند.

دامنه‌ی تغییرات

در یک مجموعه‌ی داده‌های آماری تفاضل کمترین داده از بیشترین آنها را دامنه‌ی تغییرات می‌نامند. به عبارتی دیگر دامنه‌ی تغییرات، طول بازه‌ای است که داده‌ها در آن قرار دارند. در این صورت، اگر a کوچکترین و b بزرگترین داده یک مجموعه‌ی داده‌های آماری باشند. دامنه‌ی تغییرات به شکل زیر است.

$$R = b - a$$

دامنه‌ی تغییرات را می‌توان به بیشترین اختلاف بین داده‌های یک مجموعه‌ی داده‌های آماری تعبیر کرد.

مثال: دامنه‌ی تغییرات داده‌های زیر را حساب کنید و تعبیر آن را بنویسید.

۱۳ و ۸ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۰

حل:

$$R = b - a = 15 - 8 = 7$$

تعبیر: بیشترین اختلاف بین داده‌های این مجموعه برابر ۷ است.

نتیجه:

۱: بزرگی دامنه‌ی تغییرات نشان دهنده‌ی تفاوت زیاد در جامعه است، هر چه قدر این دامنه بیشتر باشد، تفاوت بین داده‌ها زیاد است و هر چه قدر این دامنه کمتر باشد، داده‌ها به هم نزدیک‌ترند. اگر دامنه‌ی تغییرات صفر باشد، تمام داده‌های برابر هستند و جامعه همگون است.

۲: دامنه‌ی تغییرات ضعیف‌ترین شاخص پراکندگی است و معرف خوبی برای پراکندگی داده‌ها نمی‌باشد، زیرا برای محاسبه‌ی آن فقط از بزرگترین و کوچکترین داده استفاده می‌شود و تعداد یا مقادیر بقیه‌ی داده‌ها تأثیری بر مقدار آن ندارند.

واریانس و انحراف معیار

میانگین توان دوم تفاضل داده‌ها از میانگین آنها را واریانس (پراش) می‌نامند. در این صورت

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

توجه داشته باشید که واریانس در ضمن داشتن اهمیت زیاد دارای دو اشکال عمده است.

الف: تحت تأثیر داده‌های بزرگ قرار می‌گیرد.

ب: واحد اندازه‌گیری واریانس مجذور واحد اصلی متغیر داده‌ها است. مثلاً اگر واحد اندازه‌گیری داده‌ها سانتی متر باشد، واحد اندازه‌گیری واریانس سانتی متر مربع خواهد بود.

برای رفع این دو اشکال از انحراف معیار استفاده می شود. ریشه‌ی دوّم واریانس را انحراف معیار (انحراف استاندارد) می نامند.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

بنابراین طبق این تعریف بدیهی است که انحراف معیار دارای همان واحدی خواهد بود که داده ها بر حسب آن محاسبه شده اند.

مثال : واریانس و انحراف معیار داده های زیر را بدست آورید.

۲ و ۳ و ۷ و ۴ و ۹

حل:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۲	-۳	۹
۳	-۲	۴
۷	۲	۴
۴	-۱	۱
۹	۴	۱۶
جمع = ۲۵	-	۳۴

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{34}{5} = 6.8$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{6.8} = 2.6$$

تمرین برای حل :

۱۱ : واریانس و انحراف معیار داده های زیر را محاسبه کنید.

۳ و ۵ و ۶ و ۹ و ۷

خواص واریانس

اگر $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ یک مجموعه‌ی عددی و k یک عدد حقیقی باشد. در این صورت خواص زیر را می‌توان برای واریانس آنها بررسی کرد.

۱: واریانس حاصل جمع داده‌ها با یک عدد ثابت، با واریانس آن داده‌ها برابر است.

$$y_i = x_i + k \rightarrow \sigma_y^2 = \sigma_x^2$$

۲: واریانس حاصل ضرب داده‌ها در یک عدد ثابت، با حاصل ضرب مربع آن عدد در واریانس آن داده‌ها برابر است.

$$y_i = k \cdot x_i \rightarrow \sigma_y^2 = k^2 \cdot \sigma_x^2$$

خواص انحراف معیار

مشابه آنچه که برای واریانس داشتیم. می‌توان نوشت خواص زیر را برای انحراف معیار نیز بیان کرد.

۱: انحراف معیار حاصل جمع داده‌ها با یک عدد ثابت با انحراف معیار آن داده‌ها برابر است.

$$y_i = x_i + k \rightarrow \sigma_y = \sigma_x$$

۲: انحراف معیار حاصل ضرب داده‌ها در یک عدد ثابت، با حاصل ضرب قدر مطلق آن عدد در انحراف معیار آن داده‌ها برابر است.

$$y_i = k \cdot x_i \rightarrow \sigma_y = |k| \cdot \sigma_x$$

تمرین برای حل:

۱۳: اگر واریانس داده‌های یک مجموعه‌ی داده‌های آماری برابر ۱۸ و میانگین آنها ۸ باشد و تمام داده‌ها را دو برابر کنیم. میانگین و واریانس داده‌های جدید را تعیین کنید.

۱۴: هرگاه واریانس داده‌های آماری $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ برابر ۱۶ باشد. انحراف معیار داده‌های $(1 + 2x_1, 1 + 2x_2, 1 + 2x_3, \dots, 1 + 2x_n)$ را محاسبه کنید.

ضریب پراکندگی

خارج قسمت انحراف معیار داده های یک مجموعه ی داده های آماری بر میانگین آنها را ضریب پراکندگی (ضریب تغییرات) گویند.

$$CV_x = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

توجه کنید که طبق تعریف ، ضریب پراکندگی داده ها فاقد واحد اندازه گیری می باشد، لذا اغلب در موارد زیر استفاده می شود.

الف : برای مقایسه ی دو یا چند جامعه ی آماری که واحد اندازه گیری داده های آنها متفاوت باشد.

مثلاً: مقایسه ی سود دو شرکت که سود یکی برحسب ریال و سود دیگری بر حسب دلار باشد.

ب : برای مقایسه ی دو یا چند جامعه ی که واریانس های آنها برابر باشند ولی میانگین های متفاوت دارند.

مثلاً: با توجه به اطلاعات زیر دو شرکت x و y دارای انحراف معیار برابر هستند ولی میانگین مساوی دارند،

لذا شرکت y از پراکندگی شرکت بهتری در مقایسه با شرکت x محسوب می شود.

-	میانگین	انحراف معیار	ضریب پراکندگی
شرکت x	۱۰	۲	۰/۲
شرکت y	۲۰	۲	۰/۱

مثال : ضریب پراکندگی داده های زیر را محاسبه کنید.

۴ و ۸ و ۳ و ۹ و ۶

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۴	-۲	۴
۹	۳	۹
۳	-۳	۹
۸	۲	۴
۶	۰	۰
جمع = ۳۰	---	۲۶

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۳۰}{۵} = ۶$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{26}{5} = 5.2$$

$$\sigma = \sqrt{5.2} = 2.28$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2.28}{6} = 0.38$$

نتیجه: اگر تمام داده های آماری برابر باشند، ضریب تغییرات آنها صفر است.

تمرین برای حل :

۱۵: برای داده های زیر ضریب تغییرات را محاسبه کنید.

۱۲ و ۱۵ و ۳ و ۶ و ۹

۱۶: اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده برابر ۲ و میانگین آنها برابر ۴ باشد، واریانس داده ها را به دست آورید.

۱۷: نشان دهید که اگر تمام داده های یک مجموعه ی داده های آماری را در عدد مثبت k ضرب کنیم، ضریب تغییرات آنها تغییری نمی کند.

۱۸: توضیح دهید که اگر تمام داده های یک مجموعه ی داده های آماری را با عدد مثبت k جمع کنیم، ضریب تغییرات آنها چه تغییری می کند؟

۱۹: داده های یک مجموعه ی داده های آماری بر حسب متر اندازه گیری شده اند. واحد اندازه گیری معیارهای میانگین، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات را مشخص کنید.

۲۰: اگر همه ی داده های یک مجموعه ی داده های آماری مساوی باشند. درباره ی میانگین و واریانس آن مجموعه چه می توان گفت؟

۲۱: اگر تمام داده های یک مجموعه ی آماری مساوی و میانگین آنها ۵ باشد. مقدار هر یک از شاخص های زیر را بنویسید. الف : میانه ب: انحراف معیار

۲۲: میانگین یک مجموعه ی داده های آماری ۵ و واریانس آنها ۱۲ است. در صورتی که تمام داده ها را سه برابر کنیم، میانگین و واریانس داده های جدید را بنویسید.

۲۳: امتیازات مهارت کاری دو نفر از پرسنل یک آزمایشگاه در ۵ روز کاری به صورت زیر است. تعیین کنید که دقت عمل کدام یک بیشتر است.

A: ۲۰ و ۲۳ و ۲۴ و ۲۶ و ۲۷ و B: ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ و ۲۶ و ۲۸

۲۴: نمرات ریاضی و هندسه یک تیم پنج نفره از دانش آموزان برای شرکت در یک آزمون علمی به شرح جدول زیر است. خانه های جدول را کامل کنید و سپس تعیین کنید که این تیم در کدام آزمون ریاضی یا هندسه بهتر است شرکت نماید. چرا؟

ردیف	نام دانش آموز	ریاضی	هندسه
۱	محسن احمدی	۱۵	۱۲
۲	علی رضایی	۱۱	۱۶
۳	رضا اکبری	۱۲	۱۰
۴	احمد علوی	۱۸	۱۷
۵	حسین صادقی	۱۹	۲۰

چارک ها

در یک مجموعه‌ی داده‌های آماری که داده‌های آن به صورت غیر نزولی مرتب شده باشند، عدد وسط این داده‌ها را میانه یا چارک دوم می‌نامند و آنرا با Q_2 نمایش می‌دهند. از طرفی میانه‌ی نیمه‌ی اول داده‌ها را چارک اول (Q_1) و میانه‌ی نیمه‌ی دوم آنها را چارک سوم (Q_3) می‌نامند.

مثال: چارک‌های اول تا سوم داده‌های زیر را تعیین کنید.

۱۹ و ۳۱ و ۲۵ و ۱۸ و ۳۲ و ۴۳ و ۴۱ و ۳۴ و ۱۸ و ۲۷ و ۱۴ و ۲۳ و ۱۵ و ۱۰ و ۱۲

حل:

۱۰ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۸ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۳ و ۲۵ و ۲۷ و ۳۱ و ۳۲ و ۳۴ و ۴۱ و ۴۳



Q_1

Q_2

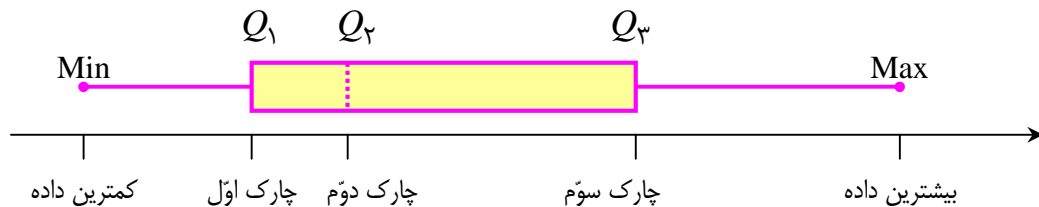
Q_3

لذا چارک اول $Q_1 = 15$ و چارک دوم (میانه) $Q_2 = 23$ و چارک سوم $Q_3 = 32$

توجه: برای تعیین چارک‌ها، ابتدا میانه را محاسبه می‌کنیم ولی برای تعیین چارک‌های اول و سوم، میانه شرکت داده نمی‌شود.

نمودار جعبه‌ای و دامنه‌ی میان چارکی

نموداری که معیارهای پراکندگی داده‌ها را می‌توان به کمک آن تعیین کرد. نموداری موسوم به نمودار جعبه‌ای است. این نمودار پراکندگی داده‌ها را در اطراف میانه و قبل و بعد از چارک اول و سوم را به تصویر می‌کشد. این نمودار به کمک کمترین و بیشترین داده و چارک‌های اول تا سوم داده‌های یک مجموعه‌ی آماری ترسیم می‌شود.



در نمودار جعبه‌ای ممکن است، میانه وسط جعبه نباشد. میانه به هر سمت متمایل شود، در آن سمت داده‌ها به هم نزدیک‌ترند و در سمت دیگر داده‌ها پراکنده‌تر هستند.

یک معیار دیگر که در صورت وجود داده های دور افتاده (پرت) مورد استفاده قرار می گیرد. دامنه ی میان چارکی است. تفاضل چارک اول از چارک سوم را دامنه ی میان چارکی می نامند و آن را با IQR نمایش می دهند.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

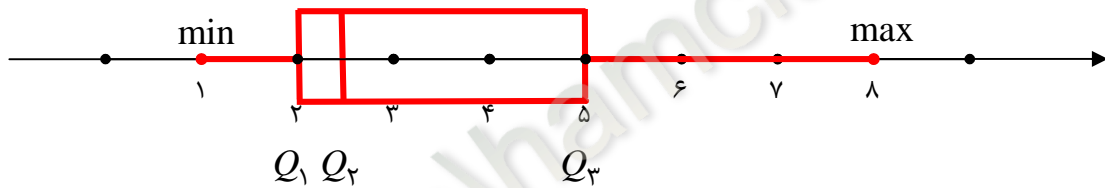
مثال: حسین تعداد گل‌های ۲۲ بوته ی گل قرمز یک باغ را شمرده است. نمودار جعبه ای این داده ها را ترسیم نموده و دامنه ی میان چارکی را محاسبه کنید.

۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۴ و ۴ و ۴ و ۴ و ۵ و ۵ و ۶ و ۷ و ۷ و ۸

حل:

۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۴ و ۴ و ۴ و ۴ و ۵ و ۵ و ۶ و ۷ و ۷ و ۸

$$\min = 1 \text{ و } Q_1 = 2 \text{ و } Q_2 = \frac{2+3}{2} = 2.5 \text{ و } Q_3 = 5 \text{ و } \max = 8$$



$$IQR = Q_3 - Q_1 = 5 - 2 = 3$$

دامنه ی میان چارکی

تمرین برای حل:

۲۴: داده های زیر را در نظر بگیرید.

۱۲ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۳ و ۱۴ و ۲۷ و ۱۶ و ۳۴ و ۴۱ و ۴۳ و ۳۲ و ۱۸ و ۲۵ و ۳۱ و ۱۹

الف: چارک های اول تا سوم داده های زیر را تعیین کنید.

ب: دامنه ی میان چارکی را محاسبه کنید.

ج: نمودار جعبه ای ترسیم کنید.

۲۵: چارک های اول تا سوم و دامنه ی میان چارکی داده های زیر را محاسبه کنید.

۱۷ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۸ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۹ و ۱۶ و ۱۷ و ۴۱

۲۶: داده های زیر را در نظر بگیرید.

۲۶ و ۲۲ و ۴۱ و ۳۱ و ۲۵ و ۲۲ و ۲۸ و ۳۰ و ۲۴ و ۲۰

الف: میانگین، میانه را محاسبه کنید.

ب: دامنه ی میان چارکی را تعیین کنید.

ج: نمودار جعبه ای مربوط به این داده ها را رسم کنید.

۲۷: در هر مورد جای خالی را کامل کنید.

الف: تفاضل بیشترین و کمترین داده را گویند.

ب: در نمودار جعبه ای ۵۰ درصد داده ها قبل از و ۵۰ درصد داده ها بعد از قرار دارند.

پ: در نمودار یک مجموعه ی داده های آماری درصد داده ها قبل از چارک اول و درصد داده ها

قبل از چارک دوم و درصد داده ها قبل از چارک سوم قرار می گیرند.

ت: معیارهای پراکندگی که میانگین در آنها نقش دارد و هستند.

ث: اگر داده های آماری k برابر شوند، ضریب تغییرات (عدد k مثبت است).

ج: واحد اندازه گیری واریانس ، واحد اندازه گیری داده ها است.

ح: هر قدر انحراف معیار کمتر باشد، میزان داده ها، کمتر است.

