

به نام خدا

محمد مهدی

حل فعالیتها، کاردرکلاسها و تمارین

درس چهارم از فصل دوم حسابان 1

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi

صفحه ۴۳

فعالیت

فرض کنید خودرویی با سرعت ثابت در بزرگراهی در حال حرکت است. اگر خودرو با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس العمل» طی می کند از تابع $f(x) = \frac{7}{10}x$ به دست می آید که در آن مقدار تابع بر حسب متر است. همچنین مسافتی که خودرو پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می کند از تابع $g(x) = \frac{1}{100}x^2$ به دست می آید که در آن مقدار تابع بر حسب متر است و x سرعت خودرو بر حسب کیلومتر بر ساعت است.

الف) اگر خودرویی با سرعت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل چه مسافتی طی می شود؟
ب) اگر سرعت خودرو x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی بنویسید که مسافت طی شده توسط خودرو پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x)$ نمایش دهید.



ب) اگر این خودرو پس از بيمودن ۶۰ متر متوقف شود، با چه سرعتی در حال حرکت بوده است؟

الف)

$$f(100) = \frac{7}{10}(100) = 70 \text{ متر}$$

مسافت طی شده در زمان عکس العمل

$$g(100) = \frac{1}{100}(100)^2 = 100 \text{ متر}$$

مسافت طی شده پس از ترمز

دارن پدال

$$70 + 100 = 170 \text{ متر}$$

$$\text{ب) } h(x) = f(x) + g(x) = \frac{7}{10}x + \frac{1}{100}x^2$$

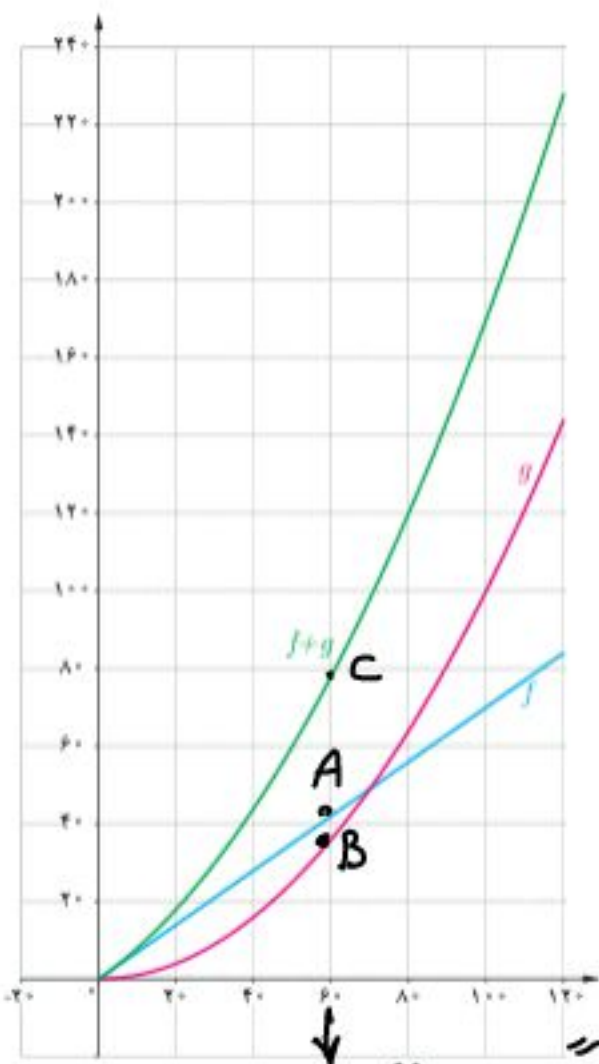
$$\text{ب) } h(x) = 60 \Rightarrow \frac{7}{10}x + \frac{1}{100}x^2 = 60 \rightarrow x^2 + 70x - 6000 = 0$$

$$\Delta = (70)^2 - 4(-6000) = 4900 + 24000 = 28900$$

$$x = \frac{-70 \pm \sqrt{28900}}{2(1)} = \frac{-70 \pm 170}{2} \Rightarrow x_1 = -120, x_2 = 50$$

غیق قبول

کیلومتر بر ساعت



در فعالیت قبل دامنه f و دامنه g در حالت کلی مجموعه \mathbb{R} است، ولی در این مسئله واقعی دامنه تابع مجموعه‌ای مانند $[0, 120]$ است. بنابراین دامنه $f+g$ نیز چنین است. نمودارهای سه تابع f ، g و $f+g$ ، فعالیت قبل، در شکل روبه‌رو رسم شده است. رابطه بین این توابع را به کمک نمودار آنها توضیح دهید.

در نقاط دارای طول مشترک

عرض نقاط روی نمودار $(f+g)$

از جمع عرض نقاط روی نمودار f و g بدست می‌آید

A : $f(40) \approx 4$ $(f+g)(40) \approx 24$: C
 B : $g(40) = 20$

۱ اگر $f(x) = x+2$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ را محاسبه کنید. دامنه تابع $f+g$ را بدست آورید.
 ۲ اگر $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 7)\}$ و $g = \{(1, 5), (2, 4), (0, -1)\}$ ابتدا دامنه $f+g$ را بدست آورید و سپس $f+g$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

$D_f = \mathbb{R}$ $D_g: x-1 \geq 0 \rightarrow D_g: x \geq 1 = [1, +\infty)$

۱

$D(f+g) = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [1, +\infty) = [1, +\infty)$

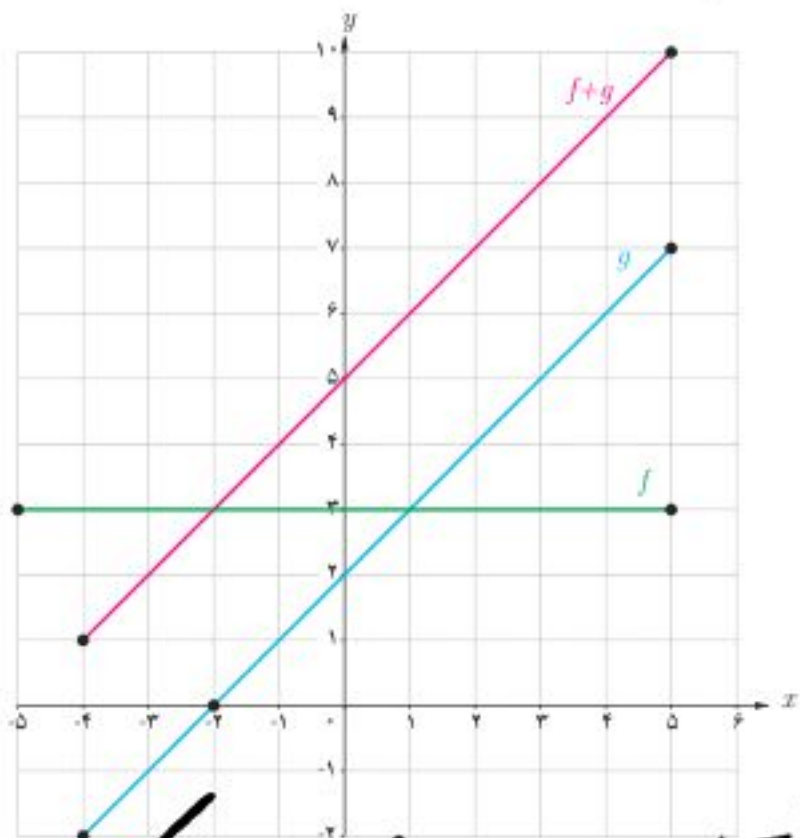
$f+g = x+2 + \sqrt{x-1}$

۲

$D_f = \{1, -2, 0\}$ ، $D_g = \{1, 2, 0\}$

$D(f+g) = D_f \cap D_g = \{0, 1\}$

$f+g = \{(0, 7+(-1)), (1, 2+5)\} = \{(0, 6), (1, 7)\}$



- در شکل روبه‌رو نمودارهای دو تابع f و g داده شده‌اند.

الف) دامنه f و دامنه g و ضابطه‌های f و g را بنویسید.
ب) دامنه و ضابطه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

پ) نمودار $f+g$ در شکل رسم شده است. توضیح دهید چگونه این نمودار را رسم کرده‌ایم.

ت) توضیح دهید بقیه نمودارهای توابع داده شده در قسمت (ب) را چگونه می‌توان رسم کرد.

راه حل دوم پ) g را رسم کنیم و به عرض هر نقطه g واحد f را اضافه کنیم

$D_f = [-5, 5]$

$D_g = [-4, 5]$

الف)

$f(x) = 3$ تابع ثابت

$g(x) = x + 2$ تابع خطی

شیب = ۱، عرض از مبدأ = ۲

ب) $D(f+g) = D(f-g) = D(f \cdot g) = D_f \cap D_g = [-4, 5]$

$D(\frac{f}{g}) = D_f \cap D_g - \{x \mid g=0\} = [-4, 5] - \{-2\} =$

$= [-4, -2) \cup (-2, 5]$
 $x = -2$ صفر تابع g

$f+g = 3 + x + 2 = x + 5$

$f-g = 3 - (x+2) = -x + 1$

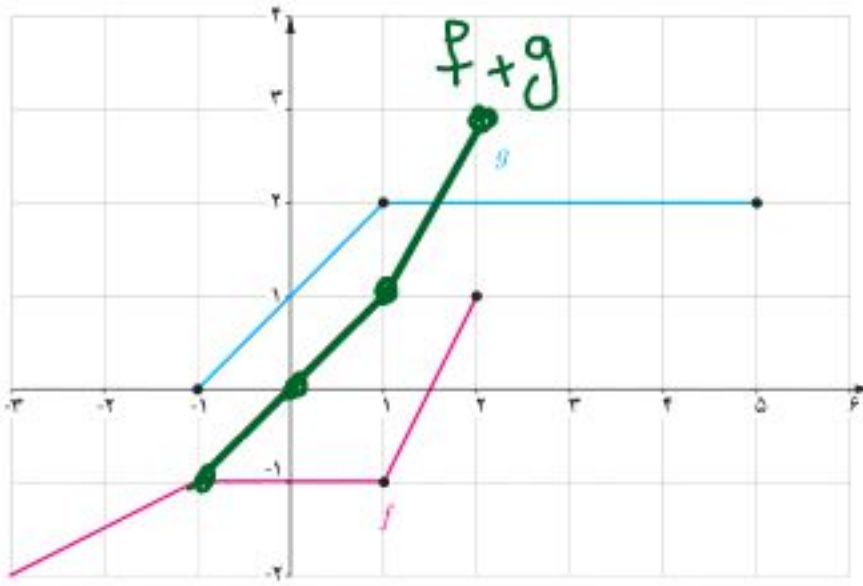
$f \cdot g = 3(x+2) = 3x + 6$

$(\frac{f}{g}) = \frac{3}{x+2}$

پ) در هر نقطه از دامنه مشترک f و g عرض نقاط f را جمع کرده است.

ت) در $f-g$ عرض هر نقطه از g از دامنه مشترک را از عرض همان نقطه

در f کم می‌کنیم. در $f \cdot g$ عرضها را ضرب می‌کنیم و در $\frac{f}{g}$ به هم تقسیم می‌کنیم. همه نقاط مشترک به جز -2



نمودارهای توابع f و g داده شده است.
 الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به دست آورید.
 ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.
 پ) ضابطه توابع f ، g و $f+g$ را به دست آورید.
 ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با ب) مقایسه کنید.

$$Df: [-3, 2] \quad Dg: [-1, 5] \Rightarrow Df \cap Dg = [-1, 2]$$

الف) $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = (-1) + (2) = 1$

$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = (-1) + 0 = -1$

ب) در بازه $[-1, 2]$ نمودار $f+g$ را رسم می‌کنیم رسم شده در شکل

۳ ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & 1 < x < 2 \\ -1 & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & x \leq -1 \end{cases}$ ۲ ضابطه‌ای $g(x) = \begin{cases} 2 & 1 < x < 5 \\ x+1 & -1 < x < 1 \end{cases}$ پ

$h: (f+g)(x) = \begin{cases} x & -1 < x \leq 1 \text{ (1)} \\ 2x-1 & 1 < x \leq 2 \text{ (2)} \end{cases}$

نمودار با نمودار قسمت (ت) یکسان است
 نمودارها (توابع همگنی) نیز در ربع اول رسم
 نمودار با نمودار قسمت (ب) یکسان است
 نمودار با نمودار قسمت (ب) یکسان است

x	1	2
h	1	3

با داشتن دو تابع f و g به شیوه‌ای دیگر هم می‌توان تابع جدیدی ساخت. در فعالیت زیر با این موضوع آشنا می‌شویم.

فعالیت

تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

الف) $f(32) = 0$ به چه معنی است؟ 50° درجه فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟

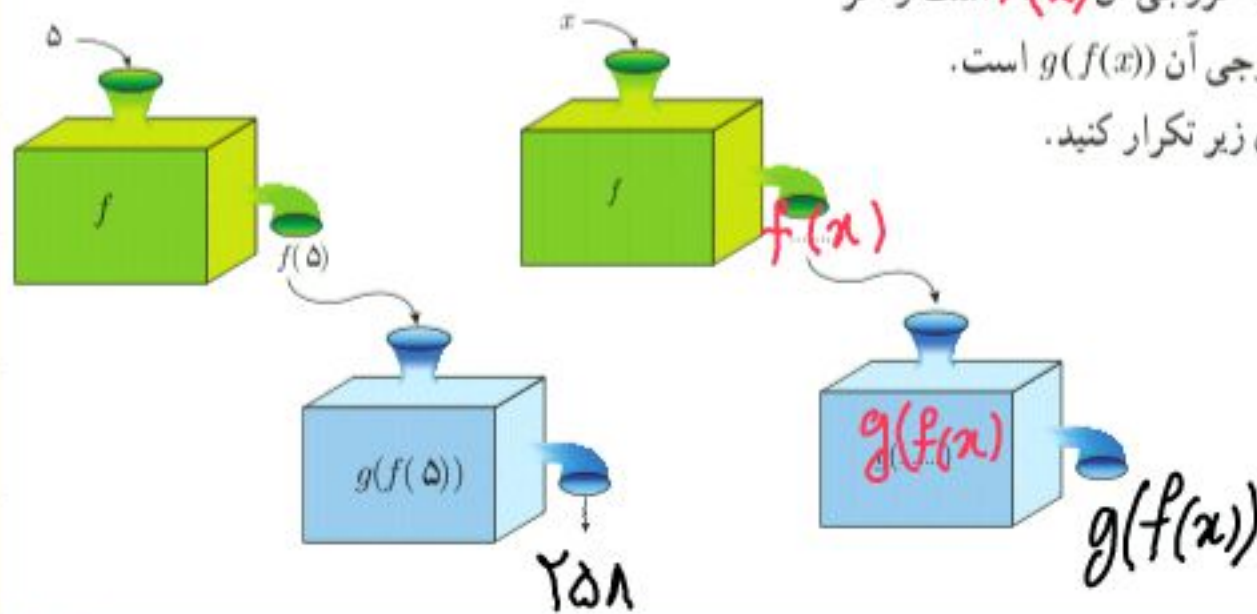
ب) تابع $g(x) = x + 273$ درجه سانتی‌گراد را به درجه کلون تبدیل می‌کند. $g(0) = 273$ به چه معنی است؟

پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین در نظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی‌گراد و دیگری سانتی‌گراد را به کلون تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که 5 درجه فارنهایت معادل چند درجه کلون است؟

$$f(5) = \dots\dots$$

$$g(f(5)) = g(\dots)$$

ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن $f(x)$ است و اگر ورودی تابع g ، $f(x)$ باشد خروجی آن $g(f(x))$ است. ت) را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.



الف

یعنی 32 درجه فارنهایت 0 درجه سانتی‌گراد است $f(32) = 0$
 $f(50) = \frac{5}{9}(50 - 32) = \frac{5}{9}(18) = 10$

ب

یعنی صفر درجه سانتی‌گراد 273 درجه کلون است $g(0) = 273$

پ

$f(5) = \frac{5}{9}(5 - 32) = \frac{5}{9}(-27) = -15$
 $g(f(5)) = g(-15) = -15 + 273 = 258$

$$g(x) = 2x + 3 \text{ و } f(x) = x^2 + 1$$

الف) دامنه و ضابطه تابع های $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

ب) آیا تابع های $f \circ g$ و $g \circ f$ مساوی اند؟

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

الف

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \mathbb{R}$$

$\underbrace{\mathbb{R}} \cap \underbrace{2x+3 \in \mathbb{R}}_{\mathbb{R}}$

$$f \circ g = f(g) = f(2x+3) = (2x+3)^2 + 1$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 12x + 10 \quad *$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\} = \mathbb{R}$$

$\underbrace{\mathbb{R}} \cap \underbrace{x^2+1 \in \mathbb{R}}_{\mathbb{R}}$

$$g \circ f = g(f) = g(x^2+1) = 2(x^2+1) + 3$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 5 \quad *$$

با توجه به * ها

$$f \circ g \neq g \circ f$$

دلی دامنه آنها برابر است

ب

اگر $f = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ ابتدا D_{fog} و سپس توابع fog و gof را محاسبه کنید.

$$D_f = \{11, -2, 3, 2\} \quad D_g = \{2, 4, 6, 3\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{2, 4, 6, 3\}$$

$\{2, 4, 6, 3\} \quad \{11, -2, 3, 2\} \in \{11, -2, 3, 2\}$
 همه اعضای D_g در دامنه f هستند

$$fog = f \circ g$$

	g	f
2	11	7
4	-2	4
6	3	-5
3	2	-5

$$fog = \{(2, 7), (4, 4), (6, -5), (3, -5)\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{-2\}$$

$\{11, -2, 3, 2\} \quad \{7, 4, -5\} \in \{2, 4, 6, 3\}$

$$gof = g \circ f$$

	f	g
11	7	X
-2	4	-2
3	-5	X
2	-5	X

$$gof = \{(-2, -2)\}$$

۱ اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2 - x$ ، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f - g$ و $f \circ g$ را به همراه دامنه آنها به دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D(f - g) = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 4x - (2 - x) = 5x - 2$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \underbrace{D_f \cap D_g}_{\mathbb{R}} - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

\downarrow
 $2 - x = 0$
 $x = 2$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x}{2 - x}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \mathbb{R}$$

\downarrow
 \mathbb{R}

$(2 - x) \in \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2 - x)$$

$$f(2 - x) = 4(2 - x) = 8 - 4x$$

برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آن را به دست آورید.

$$D_f: x-3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$D_g: x \neq 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D(f \circ g) = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \mathbb{R} - \left\{ 0, \frac{4}{3} \right\}$$

$\underbrace{x \neq 0}$ $\frac{4}{x} \neq 3$
 $x \neq \frac{4}{3}$

$$f \circ g = f(g) = f\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 3} = \frac{x}{4 - 3x}$$

کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن گاه $(f \circ g)(4) = 25$

ب) اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$ آن گاه $(\frac{f}{g})(2) = 1$

پ) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $f \circ g = g \circ f$

ث) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = -25$ و $(f \circ g)(x) = -x^2$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$

الف) $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$ نادرست

ب) $(\frac{f}{g})(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2+4}{3(2)} = \frac{6}{6} = 1$ درست

پ) $g(5) = 2(5) - 1 = 9$ | $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(9)$
 $g(2) = 2(2) - 1 = 3$ | $= \sqrt{9} = 3$

درست

۲ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن گاه $(f \circ g)(4) = 35$

ب) اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$ آن گاه $(\frac{f}{g})(2) = 1$

پ) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $f \circ g = g \circ f$

ث) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = -25$ و $(f \circ g)(x) = -x^2$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$

مثال نقض
نادرست (ت)
 $f(x) = x^2 + 1$
 $g(x) = x - 2$

$f \circ g = f(g) = f(x - 2) = (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$ → نیستند

$g \circ f = g(f) = g(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 2 = x^2 - 1$ → ساری

اث) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 4}) = (\sqrt{x^2 - 4})^2 - 4 = x^2 - 8$
نادرست

$f \circ g(5) = f(g(5)) = f(\sqrt{25 - 4}) = f(\sqrt{21}) = \sqrt{21}^2 - 4 = 21 - 4 = 17$

ج) $D_{f \circ g} = D_f \cap D_g$ دامنه‌ها برابر است

درست $D_{g \circ f} = D_g \cap D_f$

$f \circ g = g \circ f$ → $f \circ g = g \circ f$
فرد خاصیت جابجایی ندارد

۴ فرض کنیم $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ و $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,7)\}$ که در آن:

$$g(n) = 2n$$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ توابع $f+g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

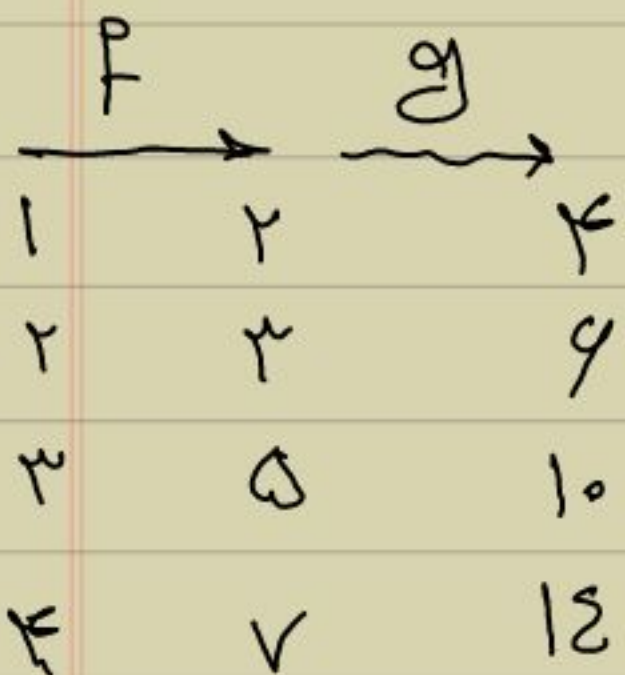
$$D_f = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$D_g = \mathbb{N}$$

$$f+g: \begin{aligned} f(1)+g(1) &= 2+2=4 \\ f(2)+g(2) &= 3+4=7 \\ f(3)+g(3) &= 5+6=11 \\ f(4)+g(4) &= 7+8=15 \end{aligned}$$

$$f+g = \{(1,4), (2,7), (3,11), (4,15)\}$$

$$g \circ f = g(f)$$



ابتدا f

خروجی f وارد g می شود

$$g \circ f = \{(1,4), (2,6), (3,10), (4,14)\}$$

اگر $g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (2, -1), (4, 1), (6, 3), (8, 5)\}$ و $f = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{2}, 0), (3, -5)\}$ ۵

توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

$$D_f = \{-4, -1, 0, \frac{5}{2}, 3\}$$

$$D_g = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$D_f \cap D_g = \{-4, 0, 2\}$$

$$f+g = \left\{ (-4, \underbrace{13+(-7)}_6), (0, \underbrace{5+(-3)}_2), (2, \underbrace{-5+0}_{-5}) \right\}$$

$$f-g = \left\{ (-4, \underbrace{13-(-7)}_{20}), (0, \underbrace{5-(-3)}_8), (2, \underbrace{-5-0}_{-5}) \right\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ (-4, \frac{13}{-7}), (0, \frac{5}{-3}) \right\}$$

$$\hookrightarrow g(2) = 0$$

$$2 \notin D(\frac{f}{g})$$

توجه: $\frac{f}{g}$ را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$\frac{f}{g} = \left\{ (-4, \frac{13}{-7}), (0, \frac{5}{-3}), (\cancel{2, \frac{-5}{-5}}) \right\}$$

غیر ممکن

$$D_f : x^2 + 5 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq -5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g : 4 - x^2 \geq 0 \rightarrow \begin{array}{c} -\infty \quad -2 \quad 2 \quad +\infty \\ \hline | \quad | \quad | \quad | \\ \hline \quad - \quad + \quad + \quad - \\ \hline \end{array}$$

$D_g = [-2, 2]$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = [-2, 2]$$

$[-2, 2] \quad (\sqrt{4-x^2}) \in \mathbb{R}$

$$f \circ g = f(g) = f(\sqrt{4-x^2}) = \sqrt{(\sqrt{4-x^2})^2 + 5}$$

$$= \sqrt{-x^2 + 9}$$

$$D_{g \circ f} : \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \emptyset$$

$\mathbb{R} \quad \sqrt{x^2+5} \in [-2, 2]$

نوبه:

$$g \circ f = g(f) = g(\sqrt{x^2+5}) = \sqrt{4 - (\sqrt{x^2+5})^2}$$

$$= \sqrt{4 - x^2 - 5} = \sqrt{-x^2 - 1}$$

زیرا دامنه $g \circ f$ منفی است. بی معنی فرضه زوج

\Rightarrow اگر برد توابع به هم نرسد دامنه $g \circ f$ را باسیم

اگر $f(x) = x^2 - 9$ و $g(x) = x + 3$ ، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنه آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$

اشتباه این است که $\frac{f}{g}$ تفکیک شده و بعد از ساده کردن دامنه بدست آمده است.

راه حل درست: $D_f = \mathbb{R}$ $D_g = \mathbb{R}$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{x \mid x + 3 = 0\}$$

$x = -3$

نویسنده:

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-3\}$$

ضابطه $\frac{f}{g}$ درست حاصل شده است

ریشه های تابعی که در مخرج قرار میگیرد، باید از اشتراک 2 دامنه کم شود

اگر $f(x) = 2x + 5$ ، $f^{-1}(x)$ ، $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را به دست آورید.

$$f(x) = 2x + 5 \rightarrow y = 2x + 5$$

$$2x = y - 5 \rightarrow x = \frac{y - 5}{2}$$

$$y = \frac{x - 5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

$$f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(x))$$

$$= f\left(\frac{x-5}{2}\right) = 2\left(\frac{x-5}{2}\right) + 5$$

$$= x - 5 + 5 = x$$

$$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x))$$

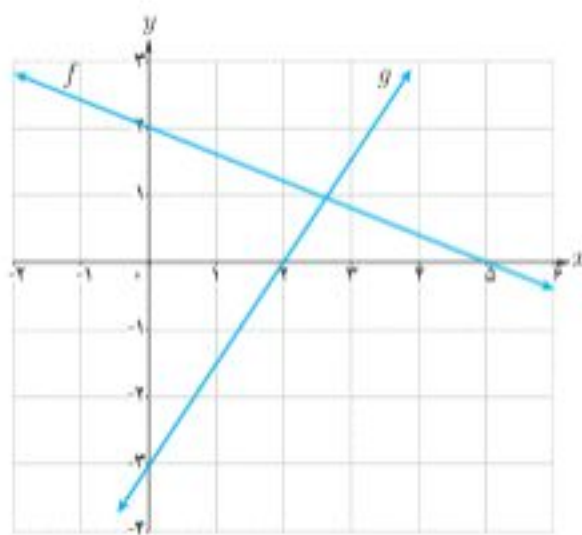
$$= f^{-1}(2x+5) = \frac{2x+5-5}{2}$$

$$= x$$

نتیجه هم: اگر تابع f وارون پذیر و f وارون
آن باشد ترکیب $f^{-1} \circ f$ تابع همانی

است

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$$



اگر $f(x) = 2x + 5$ ، $f^{-1}(x)$ ، $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را به دست آورید. ۸

نمودار توابع f و g داده شده اند. ضابطه $f + g$ ، $f - g$ و $f \cdot g$ را محاسبه کنید. ۹

$$f: \begin{cases} m = -\frac{2}{5} \\ b = 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = -\frac{2}{5}x + 2$$

$D_f = \mathbb{R}$

$$g: \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ b = -3 \end{cases} \rightarrow g(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

$D_g = \mathbb{R}$

$$f + g = -\frac{2}{5}x + 2 + \frac{3}{2}x - 3 = \frac{11}{10}x - 1$$

$$D_{f+g} = \mathbb{R}$$

$$f - g = -\frac{2}{5}x + 2 - \left(\frac{3}{2}x - 3\right) = \frac{-19}{10}x + 5$$

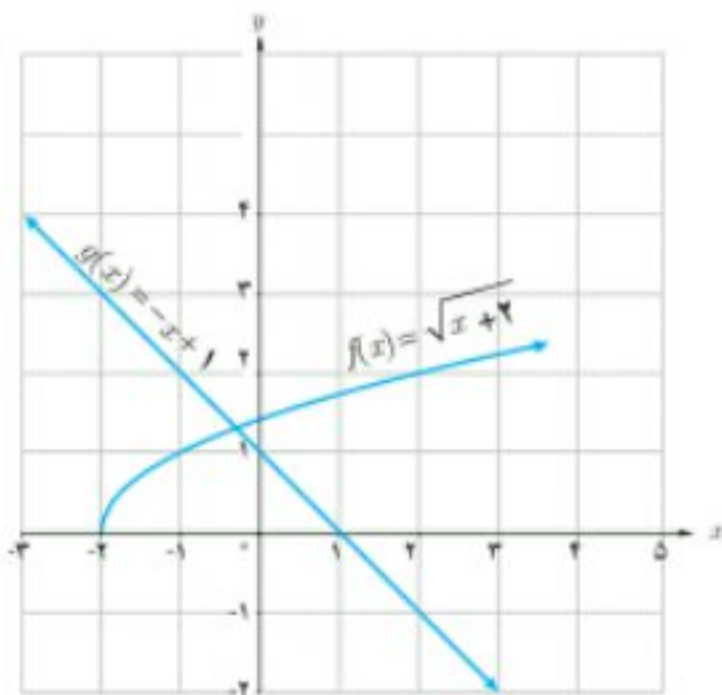
$$D_{f-g} = \mathbb{R}$$

$$f \cdot g = \left(-\frac{2}{5}x + 2\right)\left(\frac{3}{2}x - 3\right)$$

$$= -\frac{3}{5}x^2 + \frac{22}{10}x - 6$$

$D_{fg} = \mathbb{R}$

با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارات‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



- الف) $(f+g)(2)$ ب) $(f+g)(-2)$ پ) $(fg)(\frac{1}{2})$
- ت) $(f \circ g)(-2)$ ث) $(\frac{f}{g})(0)$ ج) $(g \circ f)(-1)$

$$D_f : x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D(f+g) = D(f \cdot g) = D_f \cap D_g = [-2, +\infty)^*$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = [-2, +\infty) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$-x+1=0$
 $x=1$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = [-2, 1) \cup (1, +\infty) **$$

$$\text{الف) } (f+g)(2) = \underset{\substack{\downarrow \\ \in *}}{f}(2) + \underset{\substack{\downarrow \\ \sqrt{2+2}=2}}{g}(2) = 2-1=1$$

\downarrow \downarrow \downarrow

$\in *$ $\sqrt{2+2}=2$ $-2+1=-1$

$$\text{ب) } (f+g)(-2) \quad -2 \in [-2, +\infty)$$

وجود ندارد

$$\text{پ) } (fg)\left(\frac{1}{2}\right) \leftarrow \frac{1}{2} \in [-2, +\infty) \checkmark$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \times g\left(\frac{1}{2}\right) = \rightarrow \text{دعوت} = \sqrt{\frac{5}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

\downarrow \downarrow
 $\sqrt{\frac{1}{2}+2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ $-\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

$$\text{ت) } f \circ g(-2) = f(g(-2)) = f(5) = \sqrt{5+2} = \sqrt{7}$$

\downarrow
 $-(-2)+1 = 5$

$$\text{ث) } \left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\sqrt{0+2}}{-0+1} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

\downarrow
 $0 \in \mathbb{R} \checkmark \checkmark \checkmark$

$$\text{ج) } (g \circ f)(-1) = g(\underbrace{f(-1)}_{\substack{\in D_f \\ \sqrt{-1+2}=1}}) = g(1)$$

$$g(1) = -1+1 = 0$$

نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) باز هم یک تابع خطی است.

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$y_2 = ax_2 + b$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow ax_1 + \cancel{b} = ax_2 + \cancel{b} \quad \text{حذف } b$$

$$ax_1 = ax_2 \quad \text{تقسیم بر } a$$

$$\underline{x_1 = x_2}$$

یعنی تابع معکوس پیدا است

$$y = ax + b \Rightarrow ax = y - b$$

$$x = \frac{y - b}{a} \quad \begin{matrix} x & y \\ \leftarrow & \rightarrow \end{matrix}$$

$$y = \frac{x - b}{a}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}}$$

تابع معکوس است

۱۲ تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

$$\cancel{f(x)} = \frac{5}{9}(x - 32)$$

$$y = \frac{5}{9}(x - 32)$$

$$9y = 5x - 160$$

$$5x = 9y + 160$$

$$x = \frac{9y + 160}{5} = \frac{9}{5}y + 32$$

$$x \leftrightarrow y$$

$$\cancel{y} = \frac{9}{5}x + 32$$

تبدیل سانتی گراد به فارنهایت

$$\cancel{f(x)} = \frac{9}{5}x + 32 \Rightarrow g(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

نام تابع را g قرار می دهیم

۱۲ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزه خاطرات دفاع مقدس را می بینید :

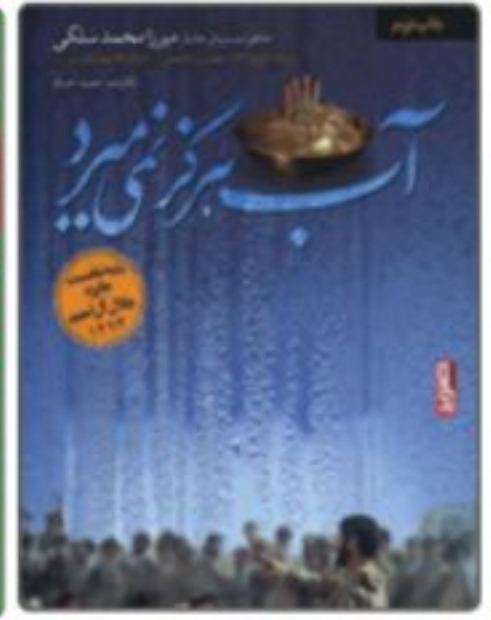
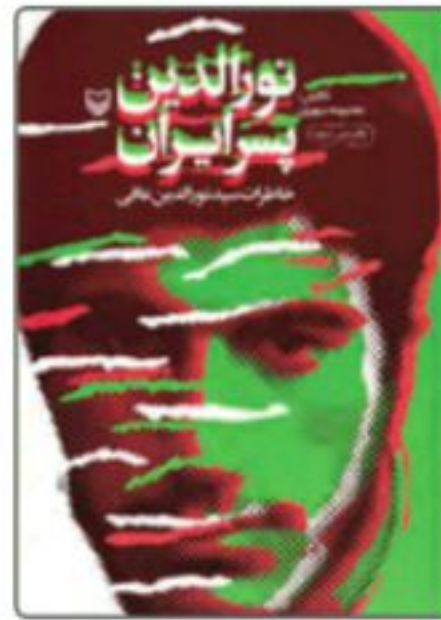
یکی از این کتاب ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ های بعدی ۹ هزار نسخه به چاپ رسیده است.

الف) تابع هایی بنویسید که تعداد نسخه های چاپ شده هر یک از این دو کتاب را بر حسب شماره چاپ نمایش دهند.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه های چاپ شده هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.



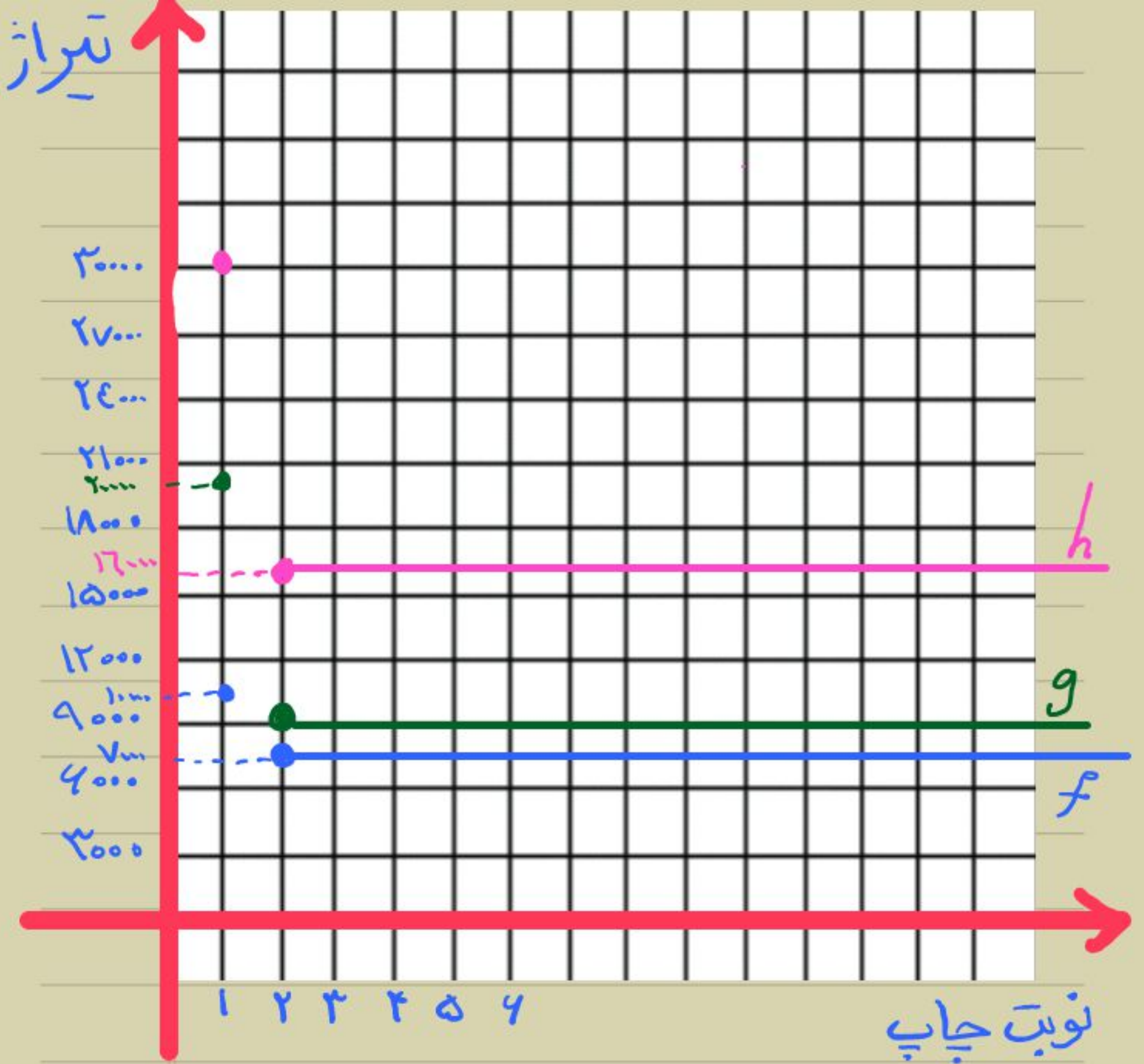
الف)

$$f(x) = \begin{cases} 10000 & x=1 \\ 7000 & x>1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 20000 & x=1 \\ 9000 & x>1 \end{cases}$$

ب)

$$h(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} 30000 & x=1 \\ 14000 & x>1 \end{cases}$$



محمد محمدی

سرور و سر بلند با سید

09213102271-09125102271-@moharrammahdi

دهم آذرماه سال هزار و سیصد و نود و نه

تهران