مجموعه set

دسته‌ای از اشیاء که دو به دو متمایز بوده و وجود یا عدم وجود هر شی در آن دسته کاملاً مشخص باشد.

مثال: کدام یک از دسته‌های زیر، مجموعه است؟

الف) {اعداد طبیعی کمتر از ۱۲} ← مجموعه است

ب) {سه عدد صحیح زوج متوالی} ← مجموعه نیست

توجه:

۱- معمولاً مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری می‌کنند. (A , B , C , ...)

۲- هر شی درون مجموعه را عضو آن نامیده و عضویت آن را با نماد $\in$ نمایش می‌دهند.

به طور مثال مجموعه‌ی $S=\{-1,0,1\}$ را در نظر بگیرید. عدد ۱ عضو S است ولی

عدد ۲ عضو S نیست بنابراین می‌نویسیم: $1 \in S$ و $2 \notin S$

۳- تعداد اعضای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش داده و به آن عدد اصلی یا

کاردینال مجموعه گویند. به طور مثال: $S=\{-1,0,1\} \Rightarrow n(S)=3$

مجموعه تهی null set : مجموعه‌ای که دارای هیچ عضوی نباشد و آن را با نماد $\emptyset$

یا { } نمایش می‌دهند. واضح است که: $n(\emptyset)=0$

مثال: کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی و کدام یک ناتهی است؟

الف) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x+8=8\} = \{0\}$ ← ناتهی

ب) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq x\} = \emptyset$

پ) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 7x\} = \{7\}$ ← ناتهی

ث) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2=9 \text{ و } 2x=4\} = \varnothing$

زیرا $x=\pm 3$ و $x=2$ همزمان غیرممکن است. (به لفظ «و» دقت شود)

ج) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2=9 \text{ یا } 2x=4\} = \{-3, 3, 2\}$ $\longrightarrow$ ناتهی

زیرمجموعه subset : مجموعه‌ی A را زیرمجموعه‌ی B گوییم اگر و تنها اگر تمام اعضای مجموعه A درون مجموعه‌ی B باشند که با نماد $A\subseteq B$ نمایش می‌دهیم.

توجه ۱: تهی زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها است.

۲: هر مجموعه زیرمجموعه‌ی خودش است.

مثال: با فرض $A=\{a,b\}$ درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\{a\}\in A$ نادرست است زیرا $a\in A$ و $\{a\}\subseteq A$ است.

ب) $\varnothing\in A$ نادرست است زیرا $\varnothing$ درون مجموعه‌ی A نیست بلکه $\varnothing\subseteq A$

پ) $\{a,b\}\subseteq A$ درست

ت) $b\subseteq A$ نادرست است زیرا $b\in A$, $\{b\}\subseteq A$

مثال: با درنظر گرفتن مجموعه‌های زیر، کدام یک از گزاره‌ها درست و کدام نادرست است؟

$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\leq 2\} = \{-2,-1,0,1,2\}$

$B=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^3=m\} = \{-1,0,1\}$

$C=\{k\in\mathbb{R} \mid k^2-1=0\} = \{-1,1\}$

$D=\{a\in S \mid$ S فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس است $\} = \{1,2,3,4,5,6\}$

الف) $B\in A$ نادرست ولی $B\subseteq A$ است.

ب) $B-D\subseteq A$ یادآوری: $B-D$ یعنی عضوهایی که درون B هستند ولی درون D نباشند

$B-D=\{0\}\subseteq A$ → درست

پ) $A\cap D\subseteq C$ یادآوری: $A\cap D$ همان مجموعه عضوهای مشترک A و D است

$A\cap D=\{1,2\}\subseteq\{-1,1\}$ → نادرست

ت) $B\subseteq C\cup A$ یادآوری: $C\cup A$ مجموعه‌ای است شامل بر تمام اعضای A و C.

$C\cup A=\{-2,-1,0,1,2\}$

$B\subseteq C\cup A$ → درست

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\emptyset=\{\emptyset\}$ نادرست

ب) $\emptyset\subseteq\{\emptyset\}$ درست

پ) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\in\{\emptyset,\underbrace{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}}\}$ درست

ت) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\subseteq\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ نادرست

ث) $\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\subseteq\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ درست

مثال: سه مجموعه دلخواه A و B و C بنویسید به طوری که $A\in B$ ، $B\in C$ و $A\subseteq C$

$A=\{1\}$ ، $B=\{\{1\}\}$ ، $C=\{\{\{1\}\},1\}$

مثال: تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $S=\{a,\{a\},\emptyset\}$ را بنویسید.

$S_1=\emptyset$ ، $S_2=\{a\}$ ، $S_3=\{\{a\}\}$ ، $S_4=\{\emptyset\}$ ، $S_5=\{a,\{a\}\}$

$S_6=\{a,\emptyset\}$ ، $S_7=\{\{a\},\emptyset\}$ ، $S_8=\{a,\{a\},\emptyset\}$

تمرین ۱: اگر S یک مجموعه ی ۱۳۹۵ عضوی از اعداد صحیح باشد به طوری که :

$$\forall x \in S \ \exists y \in S : x + y = 0$$

نشان دهید $0 \in S$.

با توجه به تعریف S ، به ازای هر $x \in S$ ، $-x \in S$ است .
پس باید تعداد اعضای S ، عددی زوج باشد، ولی ۱۳۹۵ فرد است!
بنابراین یک عضو در S وجود دارد که با قرینه اش برابر است .
بدیهی است که آن عضو عدد صفر خواهد بود .
بنابراین $0 \in S$.

تمرین ۲: یک مجموعه ی سه عضوی بنویسید که هر عضو آن زیر مجموعه ی آن نیز باشد .

$$S = \{\varnothing , \{\varnothing\} , \{\{\varnothing\}\}\}$$

تمرین ۳ : با استفاده از نمادهای ریاضی ، برای هر یک از موارد زیر یک تعریف بنویسید .

الف) $A \subseteq B$ $\quad A \subseteq B \iff \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$

ب) $A \nsubseteq B$ $\quad A \nsubseteq B \iff \exists x : (x \in A \wedge x \notin B)$

پ) $A \cup B$ $\quad A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

ت) $A \cap B$ $\quad A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

ث) $A - B$ $\quad A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه :

مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d,e\}$ را در نظر بگیرید، می‌خواهیم تعداد آن زیر مجموعه هایی را تعیین کنیم که شامل حرف a بوده ولی حروف b و c درون آنها نباشد؛

میدانیم برای هر عضو دو حالت وجود دارد: ① عضو زیر مجموعه بودن ② عضو زیر مجموعه نبودن

طبق آنچه خواسته شده، برای a یک حالت (عضو زیر مجموعه بودن) و برای b و c نیز هر کدام یک حالت (عضو زیر مجموعه نبودن) وجود دارد ولی برای دیگر اعضای آن هر کدام دو حالت وجود دارد، بنابراین طبق اصل ضرب می‌توان نوشت:

	a	b	c	d	e
تعداد حالات	۱	۱	۱	۲	۲

$\xrightarrow{\times} 2^2 = 4 \Rightarrow$ زیر مجموعه با شرایط خواسته شده وجود دارد.

مثال: چند مجموعه مانند X می‌توان نوشت، بطوریکه:

$$\{1,2,3\} \subseteq X \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

X زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ است که شامل اعضای ۱، ۲ و ۳ می‌باشد. تعداد مجموعه های با شرایط X برابر است با:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد حالات	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲

$\xrightarrow{\times} 2^4 = 16$

۱۶ مجموعه مانند X می‌توان نوشت.

نکته : هر مجموعه‌ی n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه است.

اثبات: گیریم $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، مجموعه‌ی n عضوی مورد نظر باشد بنابراین:

	a_1	a_2	a_3	...	a_n	
تعداد حالات	2	2	2	...	2	$\xrightarrow{\times} 2^n$

مثال: مجموعه‌ی متناهی A را در نظر بگیرید، چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد. مشخص کنید A چند عضوی است؟

گیریم A دارای n عضو باشد پس 2^n زیرمجموعه دارد که اگر ۲ عضو به A اضافه کنیم تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^{n+2} شده که ۴۸ تا از 2^n بیشتر است پس:

$$2^{n+2}=2^n+48 \longrightarrow 2^n\times 2^2 = 2^n+48 \xrightarrow{2^n=x} 4x=x+48$$

$$\Rightarrow x=16 \Rightarrow 2^n=16 \Rightarrow n=4$$

مثال: مجموع تعداد زیرمجموعه‌های سه مجموعه‌ی $k-2$ عضوی، k عضوی و $k+1$ عضوی برابر ۱۰۴ است. عدد طبیعی k را بیابید.

تعداد زیرمجموعه‌ها برای سه مجموعه، به ترتیب 2^{k-2} و 2^k و 2^{k+1} می‌باشد. بنابراین:

$$2^{k-2}+2^k+2^{k+1}=104 \Rightarrow 2^k\times 2^{-2}+2^k+2^k\times 2^1=104 \xrightarrow{2^k=x}$$

$$\frac{x}{4}+x+2x=104 \xrightarrow{\times 4} x+4x+8x=4\times 104 \Rightarrow x=\frac{4\times 104}{13}=32 \Rightarrow 2^k=32 \longrightarrow k=5$$

نکته: هر مجموعه‌ی n عضوی دارای $\binom{n}{2}$ زیرمجموعه‌ی ۲ عضوی است.

یادآوری: $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: یک مجموعه‌ی پنج عضوی چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دارد؟

$$\binom{5}{3}=10$$

نکته: به هر زیر مجموعه A به غیر از خود A، زیر مجموعه‌ی محض (سره) A گویند.

به عبارت دیگر اگر $B \subseteq A$ و $B \neq A$، آنگاه B زیر مجموعه محض A است.

سؤال: اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، چند زیر مجموعه‌ی محض دارد؟ $2^n - 1$

مثال: مجموعه‌ای دارای ۳۱ زیر مجموعه‌ی محض است. این مجموعه دارای چند زیر مجموعه‌ی زوج عضوی است؟

$2^n - 1 = 31 \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5 \rightarrow$ مجموعه دارای ۵ عضو است

$1 = \binom{5}{0} =$ تعداد زیر مجموعه‌های ۰ عضوی

$10 = \binom{5}{2} =$ 〃 〃 〃 〃 ۲ عضوی

$5 = \binom{5}{4} =$ 〃 〃 〃 〃 ۴ 〃

$\xrightarrow{+}$ ۱۶ = تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی

مجموعه‌ی توانی power set:

مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌ها A، مجموعه‌ی توانی A نامیده می‌شود و آن را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهند.

واضح است که اگر A دارای n عضو باشد، 2^n زیر مجموعه دارد و در نتیجه $P(A)$ دارای 2^n عضو است.

مثال: با فرض $A = \{x, y, z\}$ مطلوبست $P(A)$.

$$P(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, \{x,y,z\}\}$$

افراز یک مجموعه :

گوییم مجموعه‌ی غیرتهی A به دو مجموعه‌ی A_1 و A_2 افراز (تقسیم) شده است، اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشد :

1 : $A_1 \neq \emptyset$ و $A_2 \neq \emptyset$

2 : $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

3 : $A_1 \cup A_2 = A$

مثال : مجموعه‌ی $S = \{a, b, c\}$ را به دو مجموعه افراز کنید. این مسئله چند جواب دارد ؟

افراز اول : $\{a\}, \{b, c\}$

افراز دوم : $\{a, b\}, \{c\}$

افراز سوم : $\{a, c\}, \{b\}$

پس مسئله دارای ۳ جواب است.

توجه : مجموعه‌ی ناتهی A را می‌توان به n زیرمجموعه‌ی A_1 و A_2 و ... و A_n افراز کرد به طوری که :

1 : $\forall 1 \leq i \leq n : A_i \neq \emptyset$ (هرکدام از زیرمجموعه ها ناتهی باشند)

2 : $\forall i, j \ (i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset)$ (زیرمجموعه ها دو به دو اشتراک نداشته باشند.)

3 : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ (اجتماع تمام زیرمجموعه ها برابر A شود.)

مثال : مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود ؟

الف) $\{9, 8, 4\}$ و $\{2, 6\}$ و $\{1, 3, 5\}$

خیر زیرا اجتماع آنها برابر A نمی‌شود

ب) $\{9, 7, 5\}$ و $\{2, 4, 6, 8\}$ و $\{1, 3, 5\}$

خیر زیرا ۵ عضو مشترک آنهاست

پ) $\{7, 9\}$ و $\{2, 4, 6, 8\}$ و $\{1, 3, 5\}$

بله یک افراز برای A است زیرا هر سه شرط در آنها صدق می‌کند.

ت) $\{1, 2\}$ و $\{3, 4\}$ و $\{5, 6\}$ و $\{7, 8\}$ و $\{9\}$

بله یک افراز برای A است زیرا هر سه شرط در آنها صدق می‌کند.

مثال: کلیه‌ی افرازهای مجموعه‌ی $k = \{x, y, z\}$ را بنویسید.

افراز اول: $\{x\}, \{y\}, \{z\}$

افراز دوم: $\{x\}, \{y, z\}$

افراز سوم: $\{y\}, \{x, z\}$

افراز چهارم: $\{z\}, \{x, y\}$

افراز پنجم: $\{x, y, z\}$

دو مجموعه‌ی مساوی:

دو مجموعه‌ی A و B را مساوی یکدیگر گوییم اگر و تنها اگر هرکدام زیر مجموعه‌ی دیگری باشد.

به عبارت دیگر: $A = B \Longleftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2\}$، کدام یک از مجموعه های زیر با A مساوی است؟

الف) $B = \{x \in Q \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = 1$ یا $x = 2 \Rightarrow B = \{1, 2\} \Rightarrow B = A$

ب) $C=\{x\in\mathbb{R} \mid 1\leq x\leq 2\}$

$C=[1,2]$ که $C\nsubseteq A$ و $A\subseteq C$ پس $A\neq C$.

پ) $D=\{x\in\mathbb{N} \mid 1\leq x\leq 2\}$

$D=\{1,2\}$ پس $D=A$.

ت) $E=\{x\in\mathbb{Q} \mid 2x^2+3x+1=0\}$

$2x^2+3x+1=0 \to x=-1$ یا $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow E=\{-1,-\frac{1}{2}\} \to E\neq A$

مثال: کدام یک از مجموعه های زیر با هم مساویند؟

$A=\{m\in\mathbb{Z} \mid |m|<2\}$

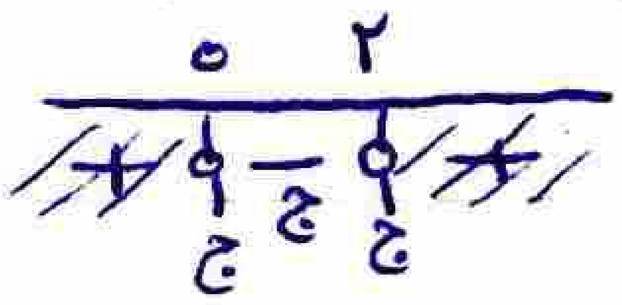
$B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^3=x\}$

$C=\{y\in\mathbb{Z} \mid y^2\leq 2y\}$

$D=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^3+2m=3m^2\}$

$|m|<2 \Rightarrow -2<m<2 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=-1$ یا 0 یا $1 \Rightarrow A=\{-1,0,1\}$

$x^3=x \Rightarrow x^3-x=0 \to x(x^2-1)=0 \to x=0$ یا 1 یا $-1 \Rightarrow B=\{-1,0,1\}$

$y^2\leq 2y \Rightarrow y^2-2y\leq 0$  $\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y=0$ یا 1 یا $2 \Rightarrow C=\{0,1,2\}$

$m^3+2m=3m^2 \Rightarrow m^3-3m^2+2m=0 \Rightarrow m(m^2-3m+2)=0$

$m=0$

$m^2-3m+2=0 \to m=1$ یا $m=2 \quad \Rightarrow D=\{0,1,2\}$

بنابراین $A=B$ و $C=D$ خواهد بود.

مثال : به ازای چه مقادیری از a و b داریم : $\{a, a^2\} = \{1, b, b^2\}$

حالت اول : $a=1$ باشد پس :

$\{1\} = \{1, b, b^2\} \Rightarrow b=1$

حالت دوم : $a^2=1$ باشد پس $a=1$ (که قبلاً بحث شد) یا $a=-1$.

بنابرفرض $a=-1$ داریم :

$\{-1, 1\} = \{1, b, b^2\} \Rightarrow b=-1$

درنتیجه $a=b=1$ یا $a=b=-1$ خواهد بود.

تمرین ۴ : مجموع تعداد عضوهای دو مجموعه‌ی A و B برابر ۱۴ است. اگر تعداد زیرمجموعه‌های A ، ۱۶ برابر تعداد زیرمجموعه‌های B باشد، هرکدام از این دو مجموعه چند عضو دارند؟

گیریم مجموعه‌ی A دارای x عضو و مجموعه‌ی B دارای $14-x$ عضو باشد پس :

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ تعداد زیرمجموعه‌های } = 2^x \\ B \;\; \text{〃} \;\; \text{〃} \;\; \text{〃} = 2^{14-x} \end{array}\right\} \Rightarrow 2^x = 16 \times 2^{14-x} \Rightarrow 2^x = 2^4 \times 2^{14-x}$$

$$\Rightarrow x = 4 + 14 - x \Rightarrow x = 9$$

پس A دارای ۹ عضو و B دارای ۵ عضو است.

تمرین ۵ : اگر A یک مجموعه‌ی دوعضوی باشد $P(P(A))$ دارای چند زیرمجموعه است؟

A تعداد اعضای $= 2$

$\Rightarrow P(A)$ 〃 〃 $= 2^2 = 4$

$\Rightarrow P(P(A))$ 〃 〃 $= 2^4 = 16 \longrightarrow P(P(A))$ تعداد زیرمجموعه‌های $= 2^{16}$

تمرین ۶ : اگر دو عضو از مجموعه‌ی A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود. مجموعه‌ی A چند زیر مجموعه دارد؟

گیریم A دارای n عضو باشد که دارای 2^n زیرمجموعه است. اگر ۲ عضو کم کنیم $n-2$ عضوی شده و 2^{n-2} زیرمجموعه دارد یعنی ۳۸۴ تا از 2^n کمتر است پس:

$$2^n - 384 = 2^{n-2} \Rightarrow 2^n - 384 = 2^n \times 2^{-2} \xrightarrow{\text{گیریم } 2^n = x} x - 384 = x \times \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\times 4} 4x - 4 \times 384 = x \Rightarrow x = \frac{4 \times 384}{3} = 4 \times 128 = 2^9 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$$

تمرین ۷ : اگر $A = \{2, x+2y, 4\}$ و $B = \{4, 5, x-y\}$ و $A = B$ در این صورت مقادیر x و y را بیابید.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2x - \cancel{2y} = 4 \\ x + \cancel{2y} = 5 \end{cases} \longrightarrow x = 3 \;,\; y = 1$$

تمرین ۸ : اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی، برابر α باشد، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $2k+1$ عضوی را برحسب α تعیین کنید.

$2^k = \alpha$: فرض

$2\alpha^2 = 2^1 \times (2^k)^2 = 2^{2k+1} =$ تعداد زیرمجموعه های مجموعه‌ی $2k+1$ عضوی

تمرین ۹ : چند زیرمجموعه از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ می‌توان یافت که هر یک شامل حداقل یک عدد اول باشد.

اعداد اول موجود در A عبارتند از ۱۳ و ۱۱ و ۷ و ۵ و ۳ و ۲ ، یعنی ۶ عضو اول دارد پس تعداد زیرمجموعه‌های بدون عضو عدد اول برابر است با : $2^{15-6} = 2^9$

تعداد زیرمجموعه‌ها بدون عدد اول − تعداد کل زیرمجموعه‌های A = تعداد زیرمجموعه‌های دارای حداقل یک عدد اول

$$= 2^{15} - 2^9$$

تمرین ۱ : کدامیک از گزاره‌های زیر همیشه درست است؟

الف) اگر $x\in A$ و $A\subseteq B$ آنگاه $x\in B$

ب) اگر $A\subseteq B$ و $B\in C$ آنگاه $A\in C$

پ) اگر $A\nsubseteq B$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\nsubseteq C$

ت) اگر $A\nsubseteq B$ و $B\nsubseteq C$ آنگاه $A\nsubseteq C$

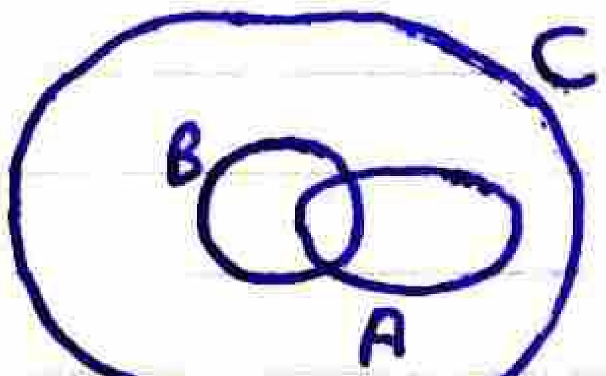
ث) اگر $x\in A$ و $A\nsubseteq B$ آنگاه $x\notin B$

ج) اگر $A\subseteq B$ و $x\notin B$ آنگاه $x\notin A$

الف) درست است.

ب) ممکن است درست نباشد. به طور مثال اگر $A=\{1\}$ و $B=\{1,2\}$ و $C=\{\{1,2\},0\}$ فرض شوند واضح است که $A\subseteq B$ و $B\in C$ ولی $A\notin C$

پ) ممکن است درست نباشد. به طور مثال در نمودار

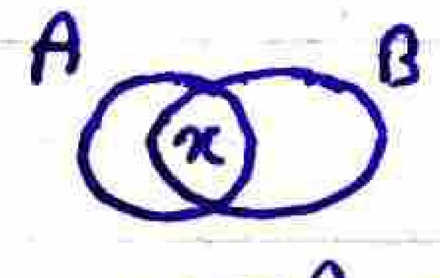


واضح است که $A\nsubseteq B$ و $B\subseteq C$ و $A\subseteq C$

ت) ممکن است درست نباشد. به طور مثال در نمودار

واضح است که $A\nsubseteq B$ و $B\nsubseteq C$ ولی $A\subseteq C$

ث) ممکن است درست نباشد. به طور مثال در نمودار



داریم: $x\in A$ و $A\nsubseteq B$ ولی $x\in B$

ج) درست است.

اثبات به روش عضوگیری :

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A \subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کرده، سپس با استفاده از فرض های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد.
این نوع اثبات را اثبات به روش عضوگیری نامند.

نکته : اگر A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \subseteq C$ است.

اثبات : $\forall x : x \in A \xRightarrow{A \subseteq B} x \in B \xRightarrow{B \subseteq C} x \in C$

بنابراین $A \subseteq C$

نکته : اگر A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \subseteq B$ ، آنگاه $B' \subseteq A'$ است.

اثبات : $\forall x \in B' \Rightarrow x \notin B \xRightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A'$

بنابراین $B' \subseteq A'$

مثال : برای هر مجموعه‌ی دلخواه مانند A با مجموعه‌ی مرجع U ثابت کنید: $\emptyset \subseteq A$

اثبات : کافی است نشان دهیم گزاره‌ی $\forall x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ صحیح است. از طرفی می دانیم $\emptyset$ عضو ندارد یعنی $x \in \emptyset$ نادرست است پس ترکیب شرطی به انتفای مقدم صحیح است.

مثال : برای مجموعه های A و B و C و D با مرجع U ثابت کنید :

الف) $A \subseteq A \cup B$

$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

بنابراین $A \subseteq A \cup B$

ب) اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آنگاه $A\cup C\subseteq B\cup D$

$$\forall x: x\in A\cup C \Rightarrow x\in A \vee x\in C \xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B} x\in B \vee x\in D \Rightarrow x\in B\cup D$$

بنابراین $A\cup C\subseteq B\cup D$

پ) اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ آنگاه $A\cup B\subseteq C$

روش اول (عضوگیری) :

$$\forall x: x\in A\cup B \Rightarrow x\in A \vee x\in B \xrightarrow[B\subseteq C]{A\subseteq C} x\in C$$

بنابراین $A\cup B\subseteq C$

روش دوم (جبری) :

$$A\subseteq C\ ,\ B\subseteq C \xrightarrow{\text{قسمت ب}} A\cup B\subseteq C\cup C \Rightarrow A\cup B\subseteq C$$

ت) اگر $A\subseteq B$ آنگاه $A\cup C\subseteq B\cup C$

روش اول (عضوگیری) :

$$\forall x: x\in A\cup C \Rightarrow x\in A \vee x\in C \xrightarrow{A\subseteq B} x\in B \vee x\in C \Rightarrow x\in B\cup C$$

بنابراین $A\cup C\subseteq B\cup C$

روش دوم (جبری) :

میدانیم : $C\subseteq C$

فرض : $A\subseteq B$

$$\xrightarrow{\text{قسمت ب}} A\cup C\subseteq B\cup C$$

مثال: برای مجموعه‌های D و C و B و A با مجموعه‌ی مرجع U ثابت کنید :

الف) $A\cap B\subseteq A$

$$\forall x: x\in A\cap B \Rightarrow x\in A \wedge x\in B \Rightarrow x\in A$$

بنابراین $A\cap B\subseteq A$

ب) اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آنگاه $A\cap C \subseteq B\cap D$

$$\forall x: x\in A\cap C \Rightarrow x\in A \wedge x\in C \xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B} x\in B \wedge x\in D \Rightarrow x\in B\cap D$$

بنابراین $A\cap C \subseteq B\cap D$

تمرین ۱۱ : برای مجموعه های A و B با مرجع U ثابت کنید $A-B\subseteq A$

$$\forall x: x\in A-B \Rightarrow x\in A \wedge x\notin B \Rightarrow x\in A$$

بنابراین $A-B\subseteq A$

تمرین ۱۲ : فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند. اگر $A\subseteq B$ با دو روش عضوگیری و جبری ثابت کنید $A\cap C\subseteq B\cap C$

روش عضوگیری :

$$\forall x: x\in A\cap C \Rightarrow x\in A \wedge x\in C \xrightarrow{A\subseteq B} x\in B \wedge x\in C \Rightarrow x\in B\cap C$$

بنابراین $A\cap C\subseteq B\cap C$

روش جبری :

$$\left.\begin{matrix} C\subseteq C & \text{میدانیم} \\ A\subseteq B & \text{فرض} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\cap C\subseteq B\cap C$$

تمرین ۱۳ : مجموعه های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید. ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آنگاه : $A\cap C\subseteq B\cup D$

$$\forall x: x\in A\cap C \Rightarrow x\in A \wedge x\in C \xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B} x\in B \wedge x\in D$$

میدانیم اگر گزاره ی $p\wedge q$ درست باشد، آنگاه $p\vee q$ نیز درست است. بنابراین :

$$x\in B \vee x\in D \Rightarrow x\in B\cup D$$

درنتیجه : $A\cap C\subseteq B\cup D$

نکته : برای اثبات تساوی $A=B$ طبق تعریف کافیست نشان دهیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ است .

مثال : با فرض $A \subseteq \emptyset$ ثابت کنید $A=\emptyset$.

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \emptyset \ : \text{فرض} \\ \emptyset \subseteq A \ : \text{میدانیم} \end{array}\right\} \Rightarrow A=\emptyset$$

مثال : هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B=\emptyset$ ثابت کنید :

$B-A=B$

$$\left(\forall x: x \in B-A \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B\right) \Rightarrow B-A \subseteq B$$

$$\left(\forall x: x \in B \xrightarrow{A \cap B=\emptyset} x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B-A\right) \Rightarrow B \subseteq B-A$$

بنابراین $B-A=B$

مثال : اگر A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \subseteq B$ ثابت کنید $A-B=\emptyset$

$$A-B=\{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} \xrightarrow{A \subseteq B} \{x \in U \mid x \in B \wedge x \notin B\}=\emptyset$$

تمرین ۱۴ : با فرض $U \subseteq A$ ثابت کنید $A=U$.

$$\left.\begin{array}{l} U \subseteq A \ : \text{فرض} \\ A \subseteq U \ : \text{میدانیم} \end{array}\right\} \Rightarrow A=U$$

تمرین ۱۵ : فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید $A \cap B=B \cap A$

$$\left(\forall x: x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \Rightarrow x \in B \cap A\right) \Rightarrow A \cap B \subseteq B \cap A$$

به طور مشابه $B \cap A \subseteq A \cap B$ قابل اثبات است . پس $A \cap B=B \cap A$

تمرین ۱۶ : با فرض $A\cap B=\emptyset$ ثابت کنید $A\subseteq B'$.

$$\forall x: x\in A \xrightarrow{A\cap B=\emptyset} x\notin B \Rightarrow x\in B'$$

بنابراین $A\subseteq B'$

تمرین ۱۷ : با فرض $A\subseteq B$ و $A\subseteq B'$ ثابت کنید $A=\emptyset$.

$$A=\{x \mid x\in A\} \xrightarrow[A\subseteq B']{A\subseteq B} \{x \mid x\in B \wedge x\in B'\}=\{x \mid x\in B \wedge x\notin B\}=\emptyset$$

تمرین ۱۸ : ثابت کنید: $A\subseteq B \Longleftrightarrow A\cup B=B$

مرحله اول : اگر $A\subseteq B$ نشان می دهیم $A\cup B=B$:

$$\left.\begin{array}{l} B\subseteq B \text{ میدانیم} \\ A\subseteq B \text{ فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow A\cup B\subseteq B\cup B \Rightarrow A\cup B\subseteq B$$

از طرفی می دانیم $B\subseteq A\cup B$. پس $A\cup B=B$

مرحله دوم : اگر $A\cup B=B$ نشان می دهیم $A\subseteq B$:

میدانیم : $A\subseteq A\cup B \xrightarrow{A\cup B=B} A\subseteq B$

تمرین ۱۹ : ثابت کنید : $A\subseteq B \Longleftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

مرحله اول : گیریم $A\subseteq B$ ، نشان می دهیم $P(A)\subseteq P(B)$:

$$\forall X: X\in P(A) \Rightarrow X\subseteq A \xrightarrow{A\subseteq B} X\subseteq B \Rightarrow X\in P(B)$$

بنابراین $P(A)\subseteq P(B)$

مرحله دوم : گیریم $P(A)\subseteq P(B)$ ، نشان می دهیم $A\subseteq B$:

$$\forall x: x\in A \Rightarrow \{x\}\subseteq A \Rightarrow \{x\}\in P(A) \xrightarrow{P(A)\subseteq P(B)} \{x\}\in P(B)$$

$$\Rightarrow \{x\}\subseteq B \Rightarrow x\in B$$

بنابراین $A\subseteq B$

تمرین ۲۰ : هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند ثابت کنید $A-B=A\cap B'$

$$A-B=\{x\in U \mid x\in A \land x\notin B\}=\{x\in U \mid x\in A \land x\in B'\}$$

$$=\{x\in U \mid x\in A\cap B'\}=A\cap B'$$

افشین ملاسعیدی

دبیر مجتمع استعدادهای ناب صالحین آبادان

@sinxcosx

09168324500

سوال ساده : به چند طریق می توان مجموعه ی A را تعریف کرد به طوری که $A-\{۱,۲,۳\}=\{۴,۵,۶\}$.

پاسخ : واضح است که اعداد ۴و۵و۶ درون مجموعه ی A هستند ولی هر کدام از اعداد ۱و۲و۳ ، دو حالت دارند (می توانند درون A باشند یا نباشند)

در نتیجه طبق اصل ضرب $۲\times۲\times۲=۸$ حالت وجود دارد یعنی به ۸ طریق می توان مجموعه ی A را تعریف می کرد .

سوال نسبتاً سخت : مجموعه ی $S=\{۶,۷,۱۲,۱۳,۲۱,۲۵,۳۰,۳۱\}$ چند زیر مجموعه دارد که حاصل جمع اعداد آن زوج باشد ؟

پاسخ : یکی از اعداد فرد (مثلاً ۳۱) را کنار می گذاریم . حال یک مجموعه ی ۷ عضوی باقی مانده که دارای $۲^۷$ زیر مجموعه است .

مجموع اعداد در این زیر مجموعه ها یا زوج است یا فرد .

اگر زوج بود یک زیر مجموعه ی مطلوب است و اگر فرد بود عدد ۳۱ را به آن مجموعه اضافه می کنیم و مجموع آنها زوج خواهد شد .

لذا تمام آن زیر مجموعه ها مطلوب می باشند پس $۲^۷=۱۲۸$ زیر مجموعه وجود دارد که حاصل جمع اعداد آن زوج باشد .

نتیجه ی جالب : اگر یک مجموعه ی n عضوی دارای حداقل یک عدد فرد باشد آنگاه $۲^{n-۱}$ (یعنی نصف تعداد کل زیر مجموعه هایش)

زیر مجموعه دارد که مجموع اعداد آنها زوج باشد و بدیهی است که نصفه ی دیگر مجموعشان فرد است .

اما اگر فاقد عدد فرد باشد ، واضح است که در تمام زیر مجموعه های آن مجموع اعضا زوج خواهد بود .

توجه : در این مسئله تهی به عنوان مجموع اعضا زوج (صفر) در نظر گرفته شد .

ملاسعیدی - آبادان