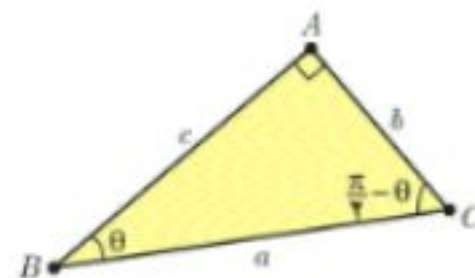


نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

صفحه ۹۸

فعالیت

یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



با توجه به شکل، دو ستون روبه‌رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

$$\sin \theta = \frac{b}{a}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{c}{a}$$

$$\cos \theta = \frac{c}{a}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{b}{a}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{c}$$

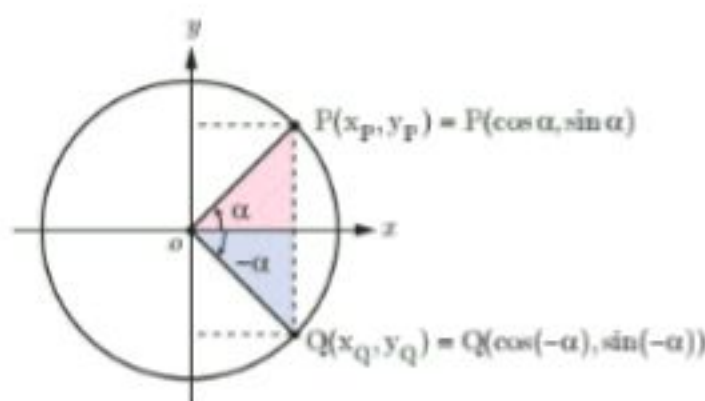
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{c}{b}$$

$$\cot \theta = \frac{c}{b}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{b}{c}$$

صفحه ۹۹

فعالیت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. مختصات نقطه P برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_p, y_p)$ نسبت به محور x ها نقطه $Q(x_q, y_q) = Q(x_p, -y_p)$ می‌باشد.

الف) با توجه به رابطه بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_q = x_p \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

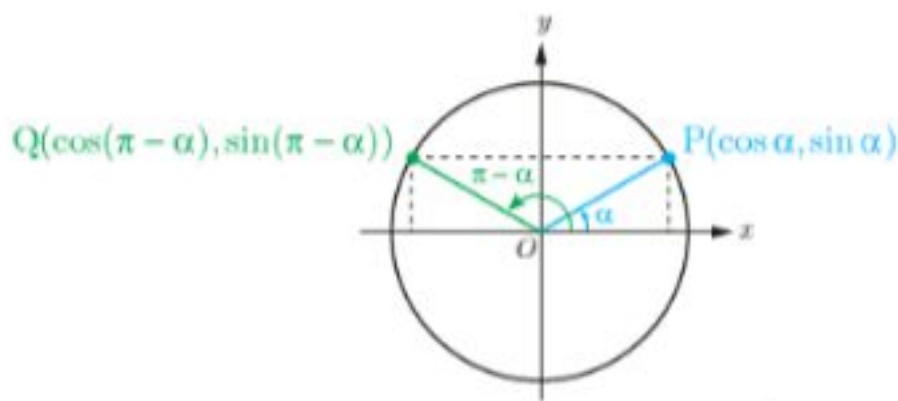
$$y_q = -y_p \Rightarrow \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

ب) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط به‌دست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$$\tan(-\alpha) =$$

$$\cot(-\alpha) = \tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\cot \alpha$$



در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه $P(x_p, y_p)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. با توجه به دستگاه مختصات واضح است که نقطه $Q(x_q, y_q) = Q(-x_p, y_p)$ قرینه نقطه P نسبت به محور y ها است.

الف) با توجه به مختصات نقاط P و Q روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_q = -x_p \Rightarrow \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$y_q = y_p \Rightarrow \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

ب) با توجه به روابط قسمت الف، تساوی‌های زیر را تکمیل کنید.

$$\tan(\pi - \alpha) =$$

$$\cot(\pi - \alpha) =$$

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\cot \alpha$$

کاردرکلاس

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(210^\circ) = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ ربع سوم

ب) $\tan(-\frac{5\pi}{4}) = -\tan(\frac{5\pi}{4}) = -\tan(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -(-\tan \frac{\pi}{4}) = 1$ ربع چهارم





پ) $\cot(135^\circ) =$

ت) $\sin(\frac{3\pi}{4}) =$

پ) $\cot(135^\circ) = \cot(180^\circ - 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$ ربع دوم

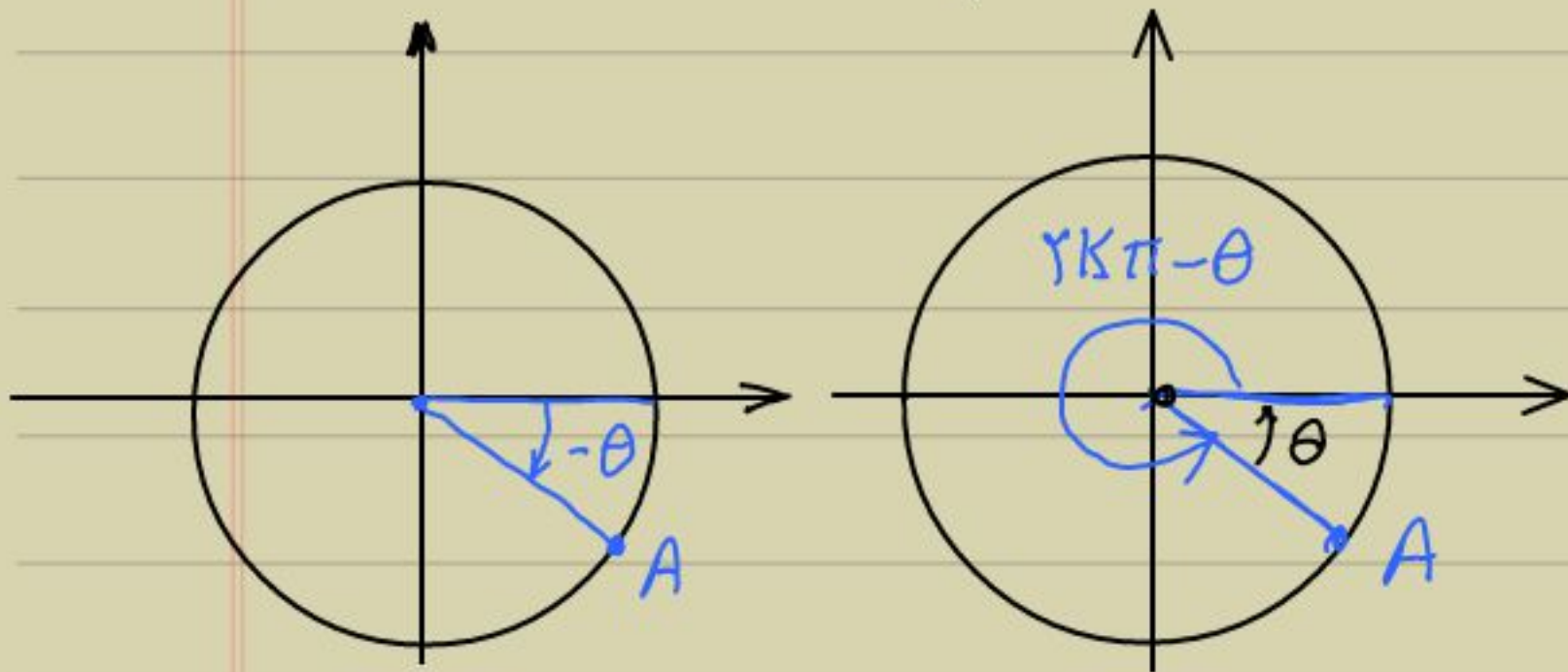
ت) $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ربع دوم

جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. $(0 < \theta < \frac{\pi}{4})$

زاویه نسبت	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \pi + \theta$	$\alpha = 2k\pi - \theta$	$\alpha = 2k\pi + \theta$
انتهای کمان	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم	ربع اول
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها				
$\sin \alpha$	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$	$\sin(2k\pi - \theta) = -\sin \theta$	$\sin(2k\pi + \theta) = \sin \theta$
$\cos \alpha$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$	$\cos(2k\pi - \theta) = \cos \theta$	$\cos(2k\pi + \theta) = \cos \theta$
$\tan \alpha$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$	$\tan(2k\pi - \theta) = -\tan \theta$	$\tan(2k\pi + \theta) = \tan \theta$
$\cot \alpha$	$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\cot(\pi + \theta) = \cot \theta$	$\cot(2k\pi - \theta) = -\cot \theta$	$\cot(2k\pi + \theta) = \cot \theta$

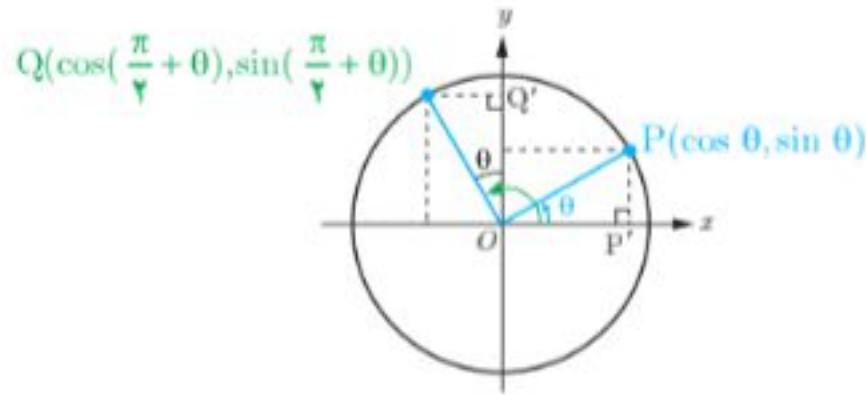
برای زوایای قرینه $(\alpha = -\theta)$ از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟

از ستون سوم $\alpha = 2k\pi - \theta$ چون:



ضلع انتهایی زاویه‌های $(2k\pi - \theta)$ و $-\theta$ در ربع چهارم قرار دارد و دایره سُنائی را در نقطه A قطع می‌کند.

در دایره مثلثاتی زیر زاویه های θ و $\frac{\pi}{4} + \theta$ رسم شده اند.



الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث $\triangle OPP'$ و $\triangle OQQ'$ هم نهشت هستند.
ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -y_P \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$y_Q = \dots \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \cos \theta$$

ب) طرف دوم تساوی های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \dots$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

۱ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(300^\circ) =$

ب) $\cot(75^\circ) =$

پ) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$

ت) $\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) =$

ث) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$

ج) $\tan(-84^\circ) =$

ح) $\tan(-15^\circ) =$

خ) $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) =$

د) $\tan\left(\frac{10\pi}{3}\right) =$

الف) $\sin 300 = \sin(360 - 60) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$ب) \cos(75^\circ) = \cos(\underbrace{180^\circ + 45^\circ}_{2k\pi}) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

← ربع اول →

$$ب) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha = \cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ب) \cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) = \cos \alpha = \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{4\pi - \pi}{4}\right)$$

↓
2kπ

$$= \cos \frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

← ربع اول →

$$ث) \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

← ربع ثلث →

$$ج) \tan(-45^\circ) = -\tan \alpha = -\tan 45^\circ =$$

$$= -\tan(90^\circ - 45^\circ) = -(-\tan 45^\circ) = \tan 45^\circ = \sqrt{2}$$

← ربع دوم →

$$ج) \tan(-15^\circ) = -\tan \alpha = -\tan(15^\circ) = -\tan(180^\circ - 165^\circ)$$

← ربع دوم →

$$= -(-\tan 15^\circ) = \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ح) \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

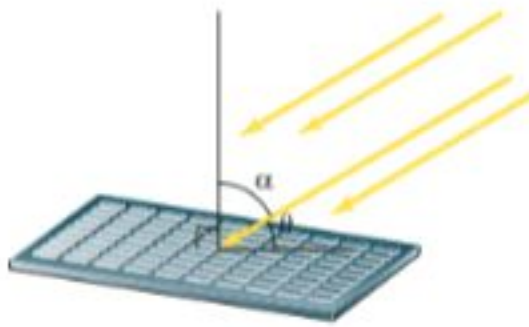
← ربع اول →

$$ج) \tan\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = +\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

↔
ربع سوم

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم،

رابطه $I = k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به دست می دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب کسینوس زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

ب) شدت نور را برای زاویه های $\theta = 0^\circ$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha *$$

$$I = k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow I = k \sin \theta$$

$$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \Rightarrow I = k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

الف)

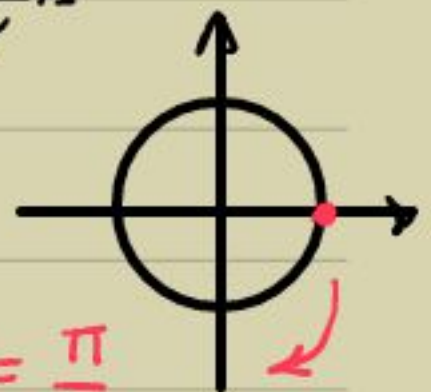
ب) $\theta = 0 \rightarrow I = k \cos\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 0$

$\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow I = k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = k \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} k$

$\theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow I = k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = k \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} k$

ج) $I = k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ حداکثر = ۱

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$



الف) $\cos \theta + \cos (\pi - \theta) = 0$

ب) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \cos \theta = 1$

ج) $\cos (\gamma) = \cos (-\gamma)$

د) $\tan (\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

الف) $\cos (\pi - \theta) = -\cos \theta$

درست $\cos \theta + \cos (\pi - \theta) = \cos \theta - \cos \theta = 0$

ب) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \cos \theta = 1$

نادرست $\cos \theta + \cos \theta = 1$

$2 \cos \theta = 1$

ج) $\cos (-\alpha) = \cos \alpha$

درست $\cos (\gamma) = \cos (-\gamma)$

د) $\tan (\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

$-\tan \theta = 0 - \tan \theta$

درست $-\tan \theta = -\tan \theta$

