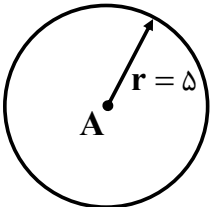


درس اول

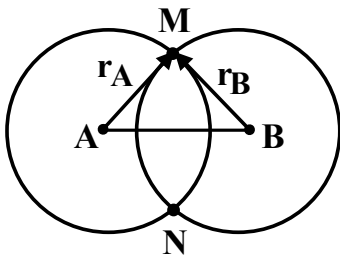
دایره:

وقتی دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم می‌کنیم تمام نقاط روی محیط دایره، دارای یک ویژگی مشترک هستند و آن ویژگی این است که فاصله تمام آن نقاط از مرکز دایره یکسان و برابر r است. از این ویژگی خوب استفاده‌های زیادی می‌کنیم. مثلاً فرض کنید بخواهیم نقطه‌ای را در صفحه پیدا کنیم که فاصله آن‌ها از نقطه A برابر 5 باشد کافی است دایره‌ای به مرکز A و به شعاع 5 رسم کنیم. با این کار نقاط مورد نظر به دست می‌آیند که همگی روی محیط دایره قرار دارند.

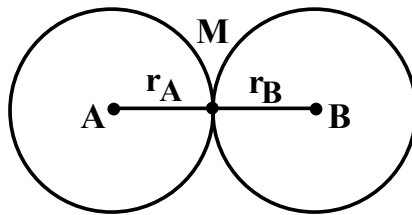


مثال: نقاط A و B به فاصله 6 از هم وجود دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A به فاصله 4 و از B فاصله 5 باشند؟

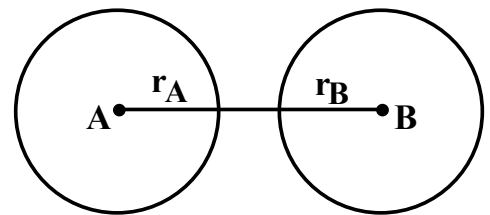
تذکره: حالات ۲ دایره نسبت به هم به صورت زیر است.



طول $r_A + r_B > AB$
(مساله ۲ جواب دارد)



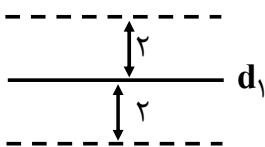
طول $r_A + r_B = AB$
(مساله ۱ جواب دارد)



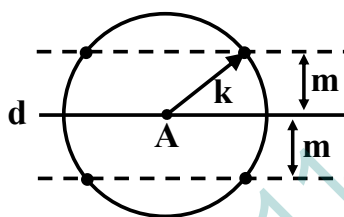
طول $r_A + r_B < AB$
(مساله جواب ندارد)

دو خط موازی:

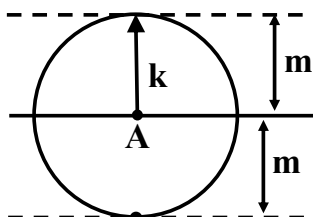
وقتی خطی مانند L موازی خط d و به فاصله مثلاً 2 از آن رسم می‌کنیم، تمام نقاط روی خط L ، یک ویژگی مشترک دارند و آن ویژگی مشترک این است که فاصله‌شان از خطی‌کسان و برابر 2 خواهد بود، اما این ویژگی به چه درد می‌خورد؟ فرض کنید بخواهیم نقطه‌ای از صفحه را پیدا کنیم که فاصله آن‌ها از خط d برابر 2 باشند. خوب کافی است دو خط موازی اطراف خط d و به فاصله 2 از آن رسم کنیم، با این کار تمام نقاط مورد نظر روی این دو خط رسم شده قرار خواهند داشت.



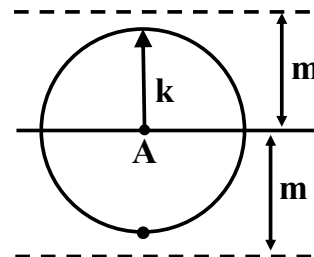
تذکره: حالاتی که نقاطی را بخواهیم که از نقطه A به فاصله K باشند و از خط d فاصله m را داشته باشند یکی از حالات زیر است.



$k > m$
(۴ جواب)



$k = m$
(۲ جواب)



$k < m$
(بدون جواب)

تست ۱: نقطه ثابت O را در صفحه در نظر بگیرید. تمامی نقاطی از صفحه که به فاصله ثابت ۳ سانتی‌متر از آن هستند چه شکلی را تشکیل می‌دهند و مساحت ناحیه داخل آن چقدر است؟

(۴) دایره، 9π

(۳) مربع، ۹

(۲) مربع، ۶

(۱) دایره، 6π

تست ۲: خط d را در نظر بگیرید، تمامی نقاطی که به فاصله ۲ سانتی‌متر از خط d قرار دارند. چه شکل تشکیل می‌دهند؟

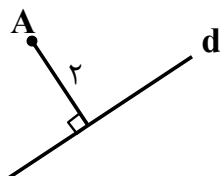
(۲) دو خط موازی در طرفین خط d و به فاصله ۲

(۱) یک خط راست به فاصله ۲ از آن

(۴) دو خط متقاطع با خط d

(۳) دایره‌ای به شعاع ۲

تست ۳: نقطه A در فاصله ۲ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. چند نقطه از خط d وجود دارد که فاصله‌شان از نقطه A برابر ۳ سانتی‌متر باشد؟



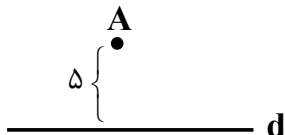
(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

تست ۴: نقطه A به فاصله ۵ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. چند نقطه وجود دارد که فاصله‌اش از A برابر ۴ و از خط d برابر ۲ باشد؟



باشد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

تست ۵: مربع $ABCD$ به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع $ABCD$ وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر $1/5$ باشد؟

(۴) صفر

(۳) ۱

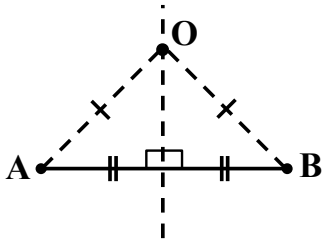
(۲) ۲

(۱) ۴

عمود منصف:

عمود منصف پاره خط AB ، خطی است که در وسط پاره خط AB به آن عمود است.

نتیجه ۱: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است. یعنی $OA = OB$ است و مثلث OAB متساوی الساقین است.



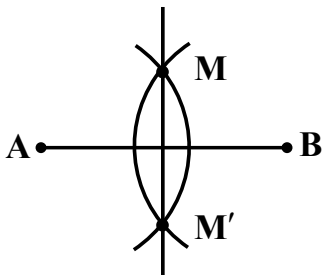
نتیجه ۲: هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله یکسان باشد، روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

رسم عمود منصف:

برای رسم عمود منصف به روش زیر دو نقطه به یک فاصله برابر تا A و B مشخص کرده و خط گذرا را از آن دو رسم می شود.

* دهانه پرگار را بیشتر از نصف طول AB باز کرده، یکبار به مرکز کمان هایی می زنیم تا یکدیگر را در نقاط M و M' قطع کنند.

* فاصله M و M' از نقاط A و B برابر شعاع دایره های یکسانی بوده و در نتیجه با هم برابرند و لذا این دو نقطه روی عمود منصف قرار دارند. پس خط گذرا از این دو نقطه همان عمود منصف است.



مثال: یک لوزی با طول قطرهای ۵ و ۳ سانتی متر رسم کنید.

مثال: یک لوزی با طول قطر کوچک ۴ سانتی متر و طول ضلع ۳ سانتی متر رسم کنید.

تست ۶: A و B دو سر یک پاره خط هستند. تمام نقاطی از صفحه که از دو نقطه A و B به یک فاصله اند، چه شکلی را تشکیل می دهند؟

(۱) یک خط عمود بر پاره خط AB که آنرا نصف می کند.

(۲) دو خط موازی با پاره خط AB

(۳) خطی گذرنده از وسط پاره خط AB که بر آن عمود نیست

(۴) خطی که از وسط پاره خط AB عبور کرده و بر آن عمود باشد.

تست ۷: چند نقطه را می‌توان یافت که از هر ۳ راس مثلث ABC فاصله یکسان داشته باشد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

تست ۸: نقطه P خارج از خط d مفروض است. به مرکز P و شعاع a کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند.

P

_____ d

در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

(۱) نقطه P روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.(۲) فاصله P از دو نقطه A و B یکسان و برابر a است.(۳) مثلث ABP ، حتماً متساوی‌الاضلاع است.(۴) نقاط A و B از خط گذرنده از P و عمود بر پاره خط AB به یک فاصله‌اند.

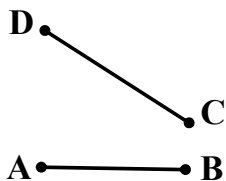
تست ۹: نقطه M روی خط d مفروض است. به مرکز M و شعاع r دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. حال دو کمان با شعاع a و به مراکز A و B رسم می‌کنیم. اگر این دو کمان در نقطه P و Q متقاطع باشند، کدام گزینه

غلط است؟

(۱) نقطه M روی پاره خط PQ قرار دارد.(۲) خط گذرنده از نقاط P و Q بر خط d عمود است.(۳) خط d عمود منصف PQ است.(۴) a باید کمتر از نصف طول پاره خط AB باشد.

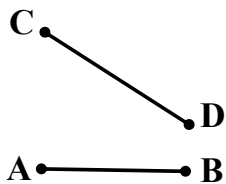
تست ۱۰: دو پاره خط AB ، CD مفروض‌اند. نقطه‌ای که از دو نقطه A و B به یک فاصله و از دو نقطه C و D نیز به یک فاصله

باشد روی کدام خط قرار ندارد؟

(۱) عمود منصف پاره خط AB (۲) عمود منصف پاره خط CD (۳) خطی که هر دو عمود منصف‌های AB و CD را قطع می‌کند(۴) خطی که از نقطه تلاقی عمود منصف‌های AB و CD می‌گذرد.

تست ۱۱: دو پاره خط AB ، CD مفروض‌اند. فرض کنید نقطه F وجود دارد که از نقاط A و B و C و D به یک فاصله باشد.

در این صورت کدام گزینه غلط است؟

(۱) نقطه F روی عمود منصف پاره خط AC قرار دارد.(۲) نقطه F روی عمود منصف پاره خط BD قرار دارد.(۳) نقطه F روی دایره گذرنده از نقاط A و B و C و D قرار دارد.(۴) نقطه F مرکز دایره‌ای است که از نقاط A و B و C و D می‌گذرد.

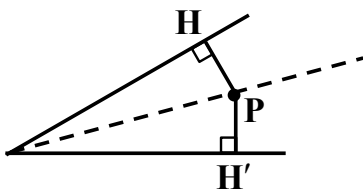
تمرین: مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمود منصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آن‌ها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟

چرا؟

نیمساز:

نیمساز هر زاویه نیم خطی است که آن زاویه را به دو زاویه مساوی تقسیم می‌کند.

نتیجه ۱: هر نقطه روی نیمساز زاویه O ، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یعنی $PH = PH'$



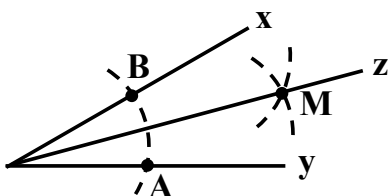
نتیجه ۲: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

رسم نیمساز:

برای رسم نیمساز یک زاویه $M\hat{O}Y$ با استفاده از خط‌کش و پرگار طبق مراحل زیر انجام می‌شود.

* دهانه پرگار را به اندازه دلخواهی باز کرده و به مرکز O یک کمان می‌زنیم تا ضلع‌های زاویه را در نقاط A و B قطع کند.

اکنون به مراکز A و B و با شعاع دلخواهی دو کمان می‌زنیم که یکدیگر را در نقطه‌ای چون M قطع کنند. سپس نیم خط OZ را از O عبور می‌دهیم.



تست ۱۲: در مثلث ABC رابطه $\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5}$ بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه \hat{A} و \hat{C} چند درجه است؟

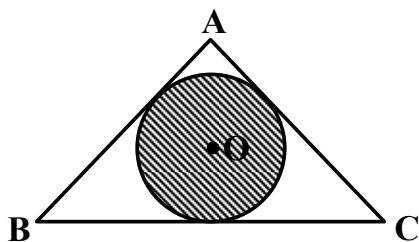
۳۵ (۴)

۶۰ (۳)

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

تست ۱۳: در شکل مقابل O محل برخورد نیمساز زوایای مثلث از ضلع AB برابر ۶ است. مساحت رنگی کدام است؟



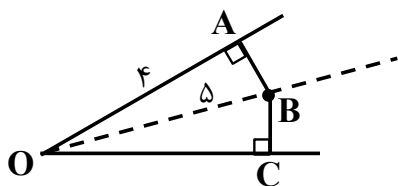
۱۸π (۱)

۹π (۲)

۲۷π (۳)

۳۶π (۴)

تست ۱۴: در شکل مقابل اگر OB نیمساز زاویه O باشد مقدار $BC + OC$ کدام است؟



۳ (۱)

۴ (۲)

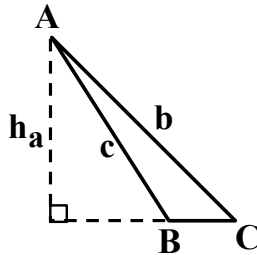
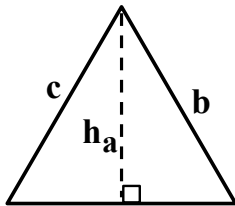
۷ (۳)

۵ (۴)

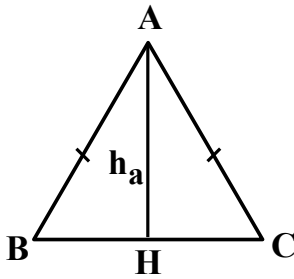
تمرین: چند نقطه درون مثلث وجود دارد که از سه ضلع به یک فاصله باشد؟

نکته (ویژه دانش آموزان قوی): حالت‌های مختلف رسم مثلث در حالی که طول ۲ ضلع و طول ارتفاع وارد بر ضلع دیگر داده شده است.

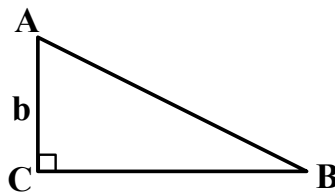
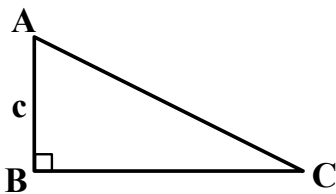
(۱) $b \neq c$ و $h_a < b, c$ در این حالت دو نوع مثلث حاده‌الزاویه داریم.



(۲) $b = c$ و $h_a < b = c$ در این حالت یک مثلث متساوی‌الساقین ایجاد می‌شود.



(۳) $b \neq c$ و $h_a = b$ یا $h_a = c$ در این حالت یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌شود.



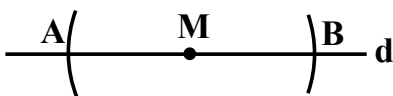
(۴) $h_a > b$ یا $h_a > c$ هیچ مثلثی تشکیل نمی‌شود.

رسم عمود بر خط:

خط d و نقطه‌ای چون M در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی از M عبور دهیم که بر d عمود می‌شود:

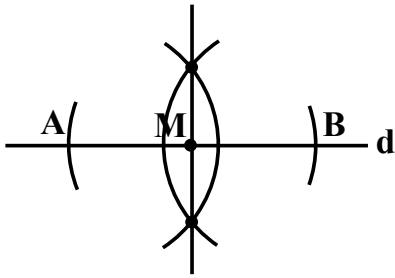
حالت ۱: فرض کنید نقطه M روی خط d قرار داشته باشد.

گام اول: توسط پرگار به مرکز M و شعاع دلخواهی کمان‌هایی می‌زنیم تا خط d را در دو طرف M در نقاط A و B قطع کند:



توجه کنید: چون شعاع دو کمان یکسان است داریم $MA = MB$ و بنابراین M وسط AB است.

گام دوم: اکنون اگر به روش گفته شده، عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنیم بر خط d عمود بوده و از نقطه M نیز عبور خواهد کرد.



حالت ۲: فرض کنید نقطه M خارج روی خط d قرار داشته و با تکمیل گام‌های زیر خطی گذرا از M بر d عمود می‌کنیم.

گام اول: دو نقطه A و B روی خط d مشخص می‌کنیم به طوری که $MA = MB$

گام دوم: عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم!!

مثال: یک مستطیل به طول ۴ سانتی‌متر و اندازه قطر ۶ سانتی‌متر رسم کنید.

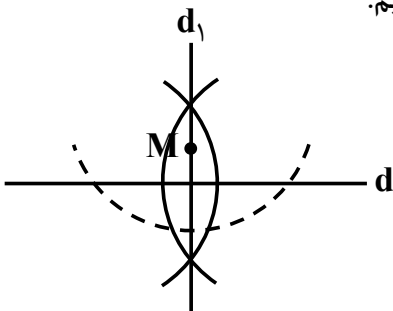
رسم خط موازی:

خط d و نقطه M خارج از آن را در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی از M عبور دهیم که با d موازی باشد.

M

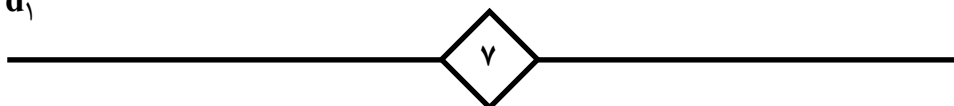
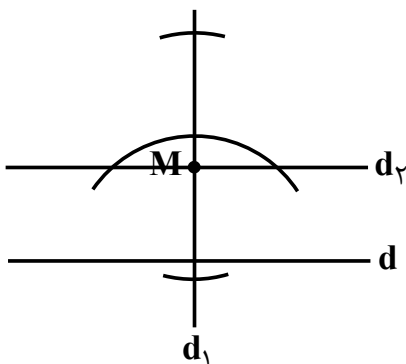
_____ d

گام اول: طبق حالت دوم از رسم خط عمود از نقطه M خط d_1 را بر d عمود می‌کنیم.



گام دوم: اکنون نقطه M روی خط d_1 قرار دارد. این بار طبق حالت (۱) از رسم خط عمود، خطی چون d_2 از نقطه M

بر خط d_1 عمود می‌کنیم.

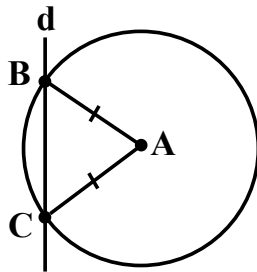


- مثال:** فرض کنید نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.
- (الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.
- (ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.
- (پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن 8cm^2 باشد.

تمرین:

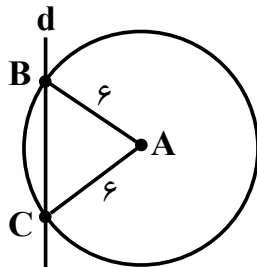
- (الف) دایره‌ای به مرکز A و شعاع r (بیشتر از ۴ باشد) می‌زنیم محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا:

$$AC = AB = r$$



- (ب) دایره‌ای به مرکز A و شعاع $r = 6$ می‌زنیم محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا:

$$AC = AB = 6$$



- (پ) چون فاصله عمودی نقطه A از خط d برابر ۴ است و این فاصله همان ارتفاع مثلث است، اگر بخواهیم مساحت این مثلث ۸ سانتی‌متر مربع باشد باید قاعده آن ۴ سانتی‌متر باشد یعنی فاصله دو نقطه B و C روی خط d برابر ۴ باشد. در نتیجه طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow r^2 = (4)^2 + (2)^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow r = \sqrt{20}$$

- بنابراین اگر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{20}$ بزنیم و محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا: $AC = AB = \sqrt{20}$ این همان مثلثی است که مساحت آن ۸ می‌شود.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(4)(4) = 8$$

