

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



## ریاضی (۳)

پایه دوازدهم علوم تجربی

## فصل ۶



تهیه و تنظیم: مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵



@MATHCLASS2



m.ghaderi.5165@gmail.com

## تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل ۶

درس ۱

## اهداف

- آشنایی کلی با مفهوم تفکر تجسمی
- تجسم شکل حاصل از دوران اشکال هندسی حول یک محور
- آشنایی با مفهوم سطح مقطع
- تجسم سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه در حالت های مختلف با یک سطح مخروطی
- آشنایی با تعریف بیضی و مفاهیم فاصله کانونی، قطر بزرگ، قطر کوچک، بیضی قائم و افقی و خروج از مرکز
- آشنایی با ویژگی بیضی و روابط بین قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصله کانونی

صفحه ۱۲۲ کتاب درسی

## تفکر تجسمی

فکر کردن دربارهٔ یک موضوع یا موقعیت به گونه ای که از عبارات، جملات و شیوه های زبانی در تفکر استفاده نشود و به جای کلمات، تصاویری در ذهن شما نقش ببندد و این تصویرسازی ذهنی، به شما کمک کند که به آن موضوع یا موقعیتی فکر کنید، **تفکر تجسمی** نامیده می شود.

فرایند تفکر تجسمی، مستلزم تشکیل و دست ورزی تصاویر با قلم و کاغذ، فناوری و یا به صورت ذهنی است که به بررسی، کشف و درک مفاهیم منجر می شود.

این نوع از تفکر، نقش مهمی در حل مسئله های ریاضی و همین طور حل مسائل در زندگی روزمره دارد.

صفحه ۱۲۲ کتاب درسی

موقعیت هایی که می تواند به تقویت تفکر تجسمی کمک کنند عبارت اند از:

- ❖ تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا
- ❖ ترسیم سطح گسترده اجسام هندسی
- ❖ ترسیم یک جسم سه بعدی روی سطح
- ❖ ترسیم نماهای مختلف اجسام
- ❖ دوران شکل حول یک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضا
- ❖ تجسم اجسام هندسی بعد از پرش

از آنجا که هدف کلی این درس آشنایی با مقاطع مخروطی است، از بین موارد بالا، دوران اشکال هندسی حول یک محور و پرش اجسام را بررسی می کنیم.

صفحه ۱۲۳ کتاب درسی

دوران حول محور

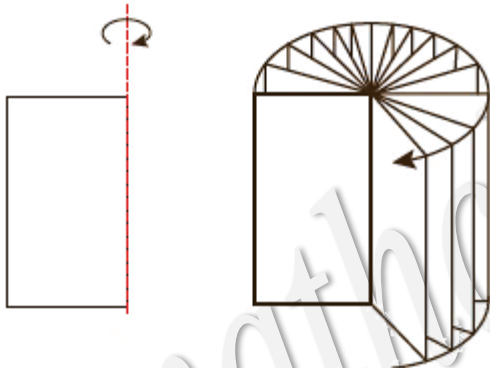
وقتی شکل های هندسی متفاوت حول یک محور دوران داده شود، جسم های مختلف هندسی ساخته می شود. در فعالیت زیر نمونه هایی از این مفهوم ارائه شده است.

فعالیت صفحه ۱۲۳ کتاب درسی

در هر مورد، شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید.

الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن:

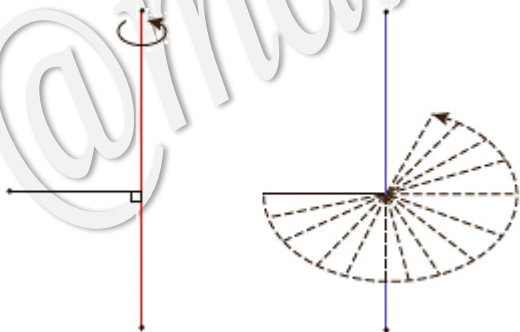
یک حجم استوانه ای شکل می شود.



ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگری که بر آن

عمود است:

یک سطح دایره ای شکل می شود.

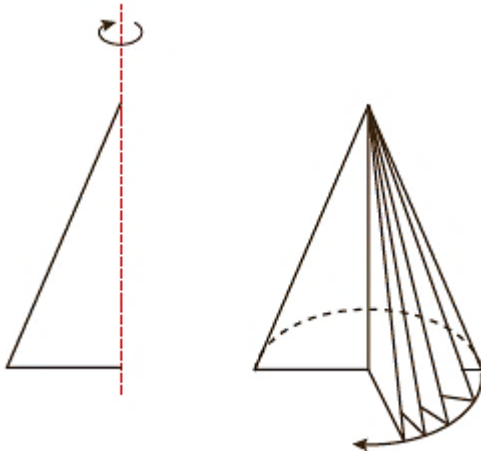


فعالیت صفحه ۱۲۳ کتاب درسی

در هر مورد، شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید.

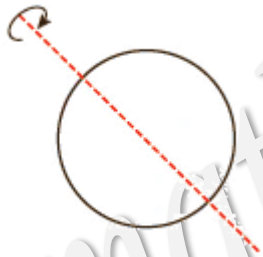
(پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه:

یک حجم مخروطی می شود.



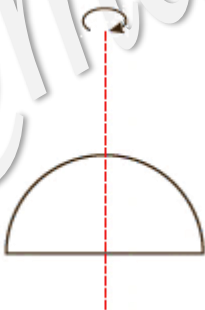
(ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن:

یک حجم کره می شود.



(ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن:

یک نیم کره ایجاد می شود.



صفحه ۱۲۴ کتاب درسی

## برش

فرض کنید می‌خواهیم اجسام سه بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن را بعد از برش تجسم کنیم. در زندگی روزمره پارها یا برش اجسام مختلف هندسی مواجهه بوده‌اید. این اجسام می‌توانند توپ‌پر یا توخالی باشند.

### سطح مقطع

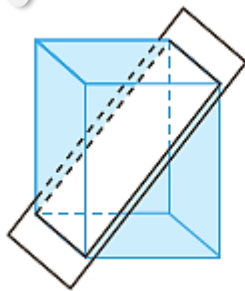
با عبور دادن یک صفحه از اجسام، برش ایجاد می‌کنیم. شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، **سطح مقطع** آن نامیده می‌شود.

### فعالیت صفحه ۱۲۴ کتاب درسی

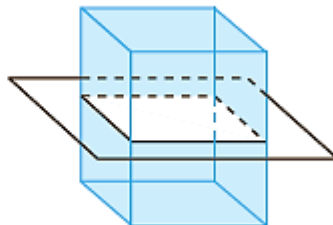
الف) بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعده مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید.



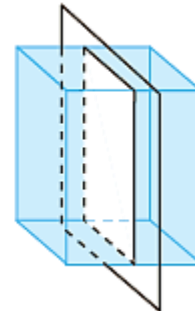
مثلث



مستطیل



مربع



مستطیل

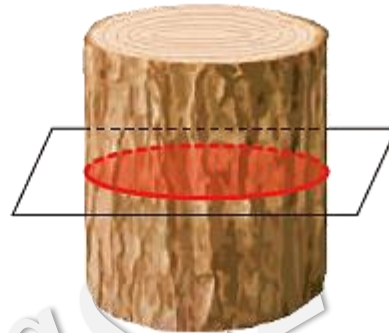


فعالیت صفحه ۱۲۴ کتاب درسی

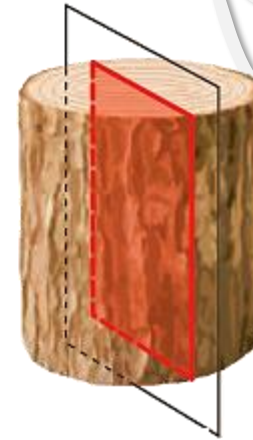
ب) سطح مقطع استوانه با صفحه های عمودی، افقی و صفحه مایلی که با قاعده های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟



بیضی



دایره



مستطیل

فعالیت صفحه ۱۲۵ کتاب درسی

پ) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟  
در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟

دایره ای است و زمانی بیشترین مساحت ممکن را دارد که کره را به دو قسمت مساوی تقسیم کند.

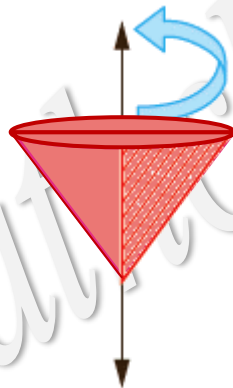




کار در کلاس ۱ صفحه ۱۲۵ کتاب درسی

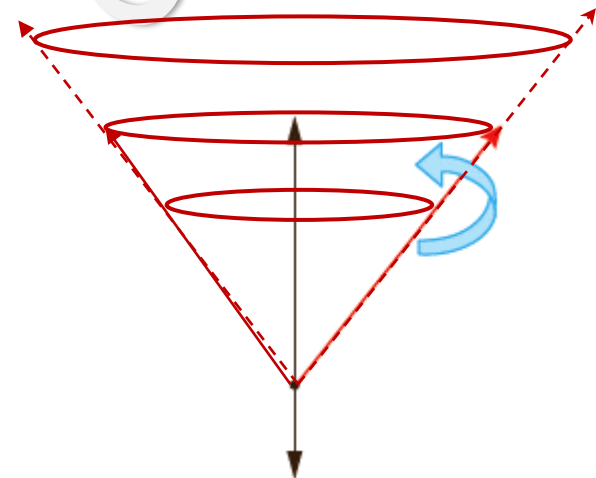
شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت های زیر مشخص کنید و آنها را با هم مقایسه کنید:

(ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه حول محور



حجم مخروطی

(الف) شکل حاصل از دوران نیم خط حول محور

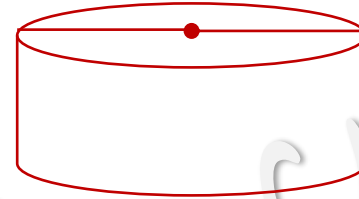
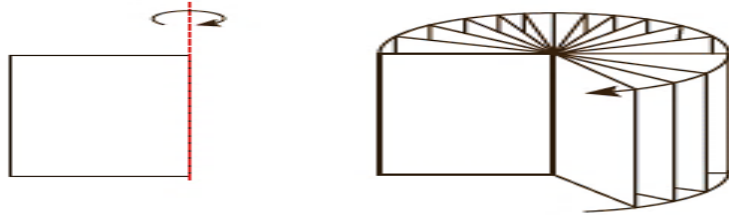


بخش بالای یک سطح مخروطی نامتناهی

سطح مخروطی قاعده ندارد و می تواند مانند شکل بالا نامتناهی باشد ولی حجم مخروطی قاعده دارد.

کار در کلاس ۲ صفحه ۱۲۵ کتاب درسی

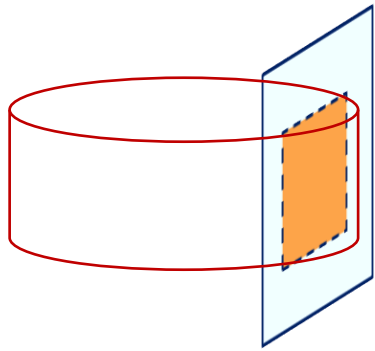
مستطیلی را مانند شکل مقابل حول عرض آن دوران داده ایم.



الف) شکل حاصل را رسم کنید.

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد این استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

وقتی که صفحه عمود بر قاعده استوانه خط پرشی روی آن ایجاد کند که با ارتفاع استوانه برابر باشد.



پ) اگر ابعاد مستطیل، ۳ و ۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک

صفحه موازی با قاعده این استوانه چقدر است؟

سطح مقطع دایره ای است به شعاع ۴ واحد.

$$S = \pi(4)^2 = 16\pi$$

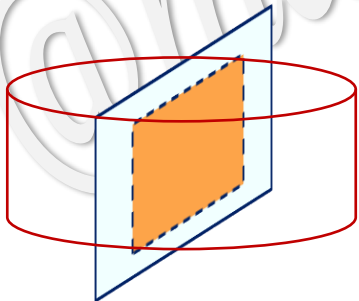
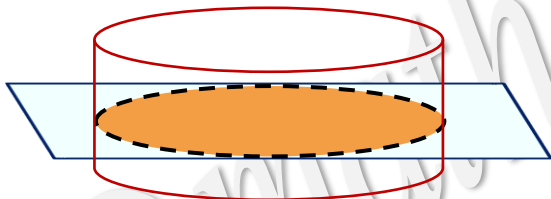
ت) در حالت «ب»، اگر صفحه ای عمود بر قاعده استوانه آن را قطع کند، بیشترین

مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟

در این حالت، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع وقتی حاصل می شود که خط پرش ایجاد شده روی

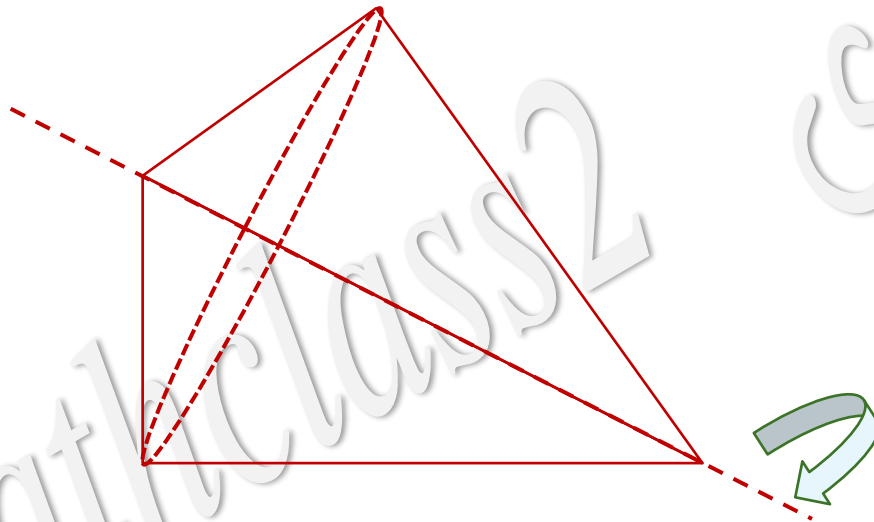
قاعده استوانه با قطر قاعده برابر باشد. به عبارت دیگر شامل محور دوران باشد.

$$S = 8 \times 3 = 24$$



کار در کلاس ۳ صفحه ۱۲۵ کتاب درسی

شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن چیست؟

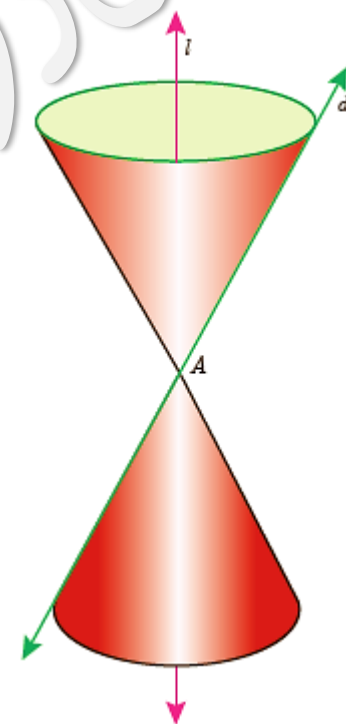
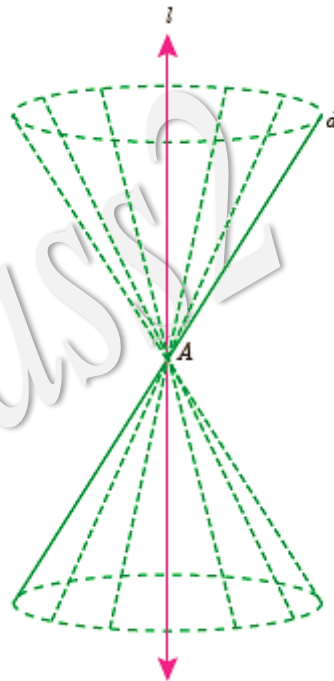
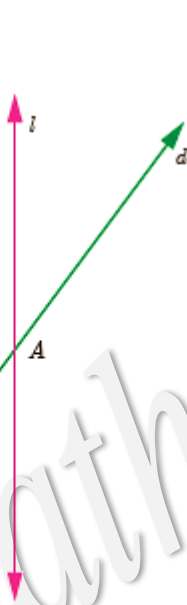


دو مخروط با قاعدهٔ مشترک

صفحه ۱۲۶ کتاب درسی

## سطح مخروطی (Conical surface)

دو خط  $d$  و  $l$  در نقطه‌ای مثل  $A$  متقاطع اند. اگر خط  $d$  را حول خط  $l$  دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک **سطح مخروطی** نامیده می‌شود. در این حالت خط  $l$  **محور**، نقطه  $A$ ، **رأس** و خط  $d$ ، **مولد** این سطح مخروطی است.

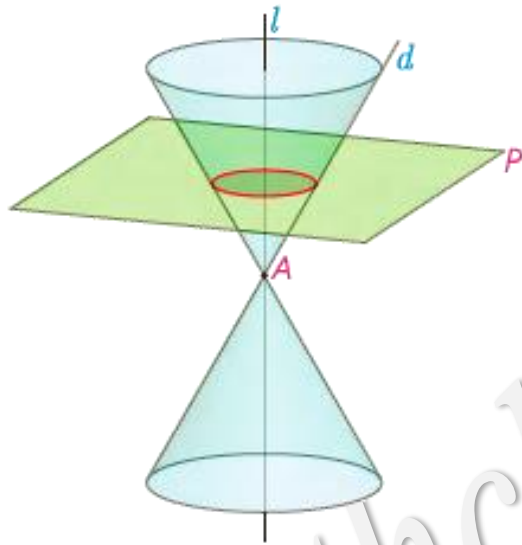


وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، معمولاً سطح مقطع، یک منحنی است.

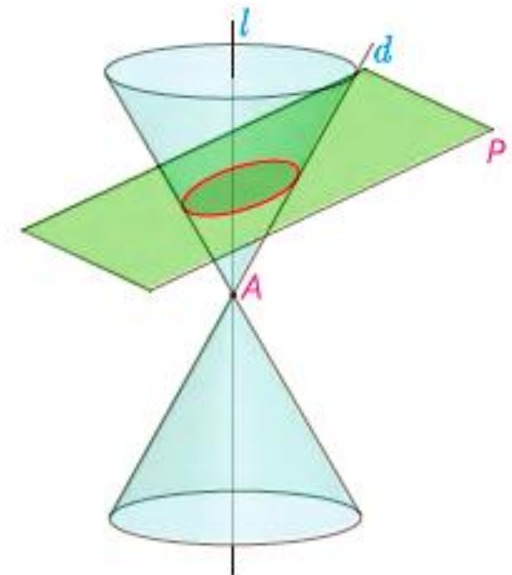
از آنجا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، **مقاطع مخروطی** نامیده می‌شوند.

## انواع مقاطع مخروطی

صفحه ۱۲۶ کتاب درسی



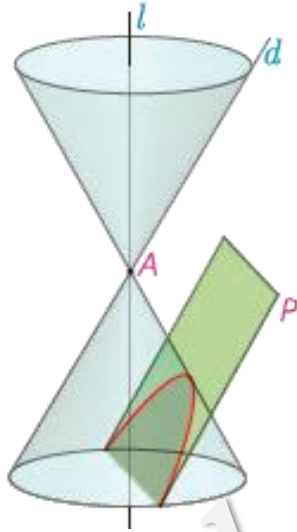
اگر صفحه  $P$  بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **دایره** است.



اگر صفحه  $P$  بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل **بیضی** خواهد بود.

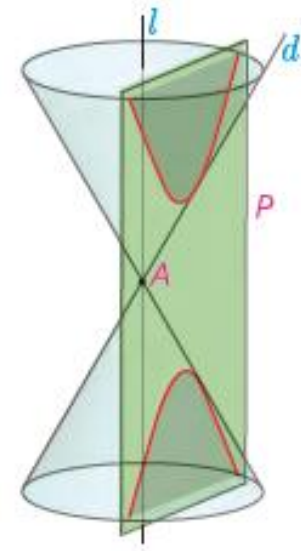
## انواع مقاطع مخروطی

صفحه ۱۲۷ کتاب درسی



اگر صفحه  $P$  در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی است.

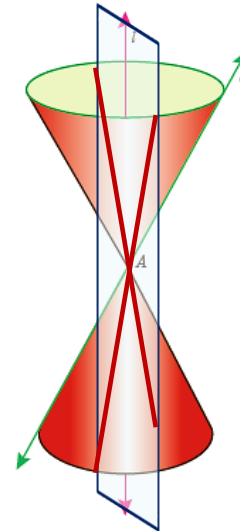
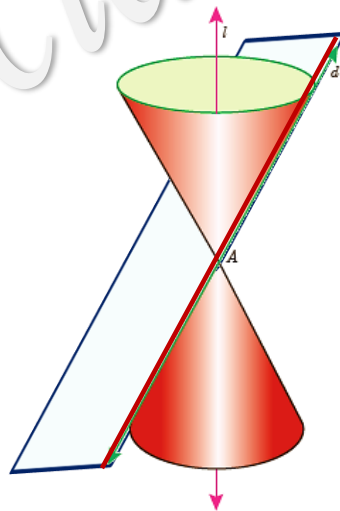
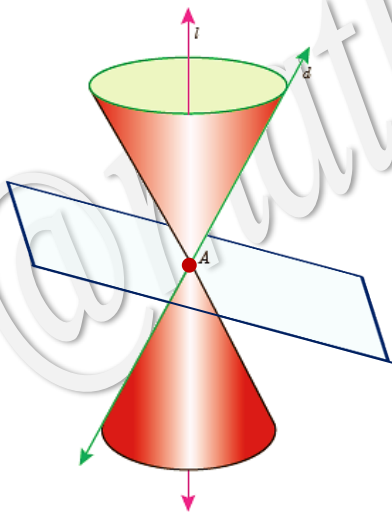
اگر صفحه  $P$  سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را هذلولی می نامیم.



معادله هذلولی و بررسی ویژگی های آن، جزء اهداف این کتاب درسی نیست.

## حالت های خاص انواع مقاطع مخروطی

- ✓ اگر صفحه  $P$  در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس بگذرد، شکل حاصل **نقطه** خواهد بود.
- ✓ اگر صفحه  $P$  در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور کند، شکل حاصل یک **خط** است.
- ✓ اگر صفحه  $P$  سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور کند، شکل حاصل **شامل دو خط** می باشد.

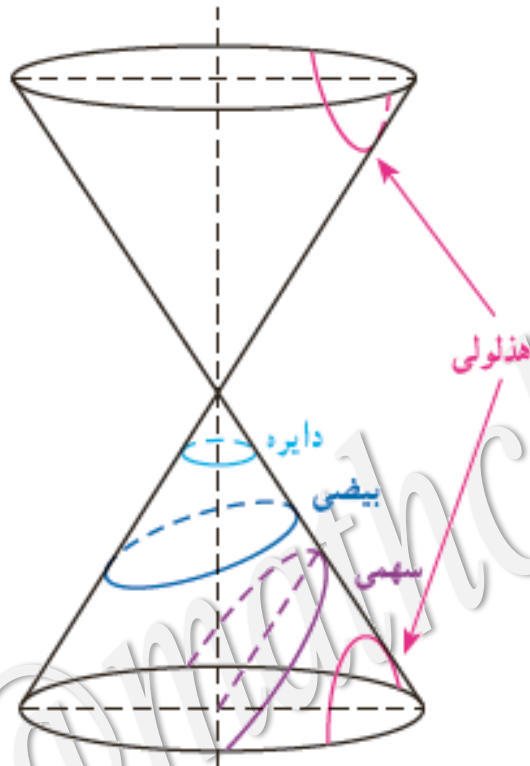




صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

## جمع بندی

بدین ترتیب مقاطع مخروطی به غیر از موارد خاص عبارت اند از دایره (*Circle*)، بیضی (*Ellipse*)، سهمی (*Parabola*) و هذلولی (*Hyperbola*).

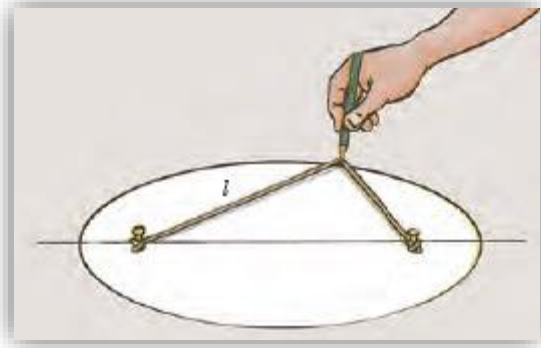


در ادامه درس، بیضی و ویژگی های آن را بدون معرفی معادله آن، مورد بررسی قرار می دهیم.

## ویژگی های بیضی

## فعالیت صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

در این فعالیت می خواهیم ببینیم طریقه رسم بیضی به کمک یک تکه نخ چگونه است و حین انجام این فعالیت، ویژگی های بیضی را بهتر بشناسیم.

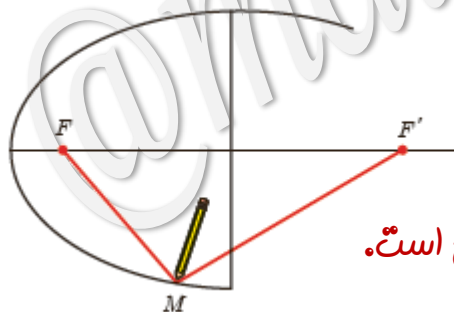


مانند شکل دو سر نخ به طول  $l$  را روی یک صفحه ثابت کنید. دقت داشته باشید که برای رسم بیضی لازم است که طول نخ از فاصله بین دو میخ، بیشتر باشد.

حالا مطابق شکل، مدادتان را در حالتی که تکه نخ از دو طرف کاملاً کشیده شده است، روی صفحه حرکت دهید.

شکل حاصل منحنی بسته ای است که به آن بیضی می گوئیم.

همان طور که دیدید دو میخ در واقع نشان دهنده دو نقطه ثابت در بیضی هستند. این دو نقطه را کانون های بیضی می نامند.



اگر کانون های بیضی را با  $F$  و  $F'$  نمایش دهیم و نقطه ای مثل  $M$  یک نقطه دلخواه از بیضی باشد، مجموع فواصل این نقطه از نقاط  $F$  و  $F'$  یعنی  $MF + MF'$  برابر با چیست؟

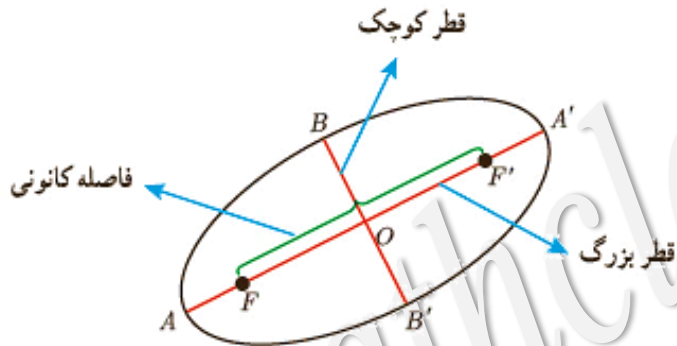
مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی محیط بیضی از کانون های بیضی برابر با  $l$  یا همان طول نخ است.

صفحه ۱۲۸ کتاب درسی

## بیضی (Ellipse)

بیضی، مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه، برابر با مقداری ثابت است.

صفحه ۱۲۹ کتاب درسی



دو نقطه ثابت  $F$  و  $F'$  واقع در بیضی که مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی محیط بیضی از آنها همواره مقداری ثابت است، **کانون های بیضی (Foci)** نامیده می شوند.

در هر بیضی اندازه پاره خط  $FF'$ ، **فاصله کانونی بیضی** نامیده می شود.

نقطه میانی پاره خط  $FF'$ ، **مرکز بیضی** نامیده می شود و آن را با  $O$  نشان می دهند.

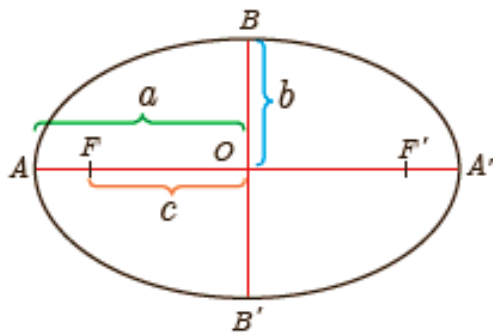
پاره خط  $AA'$ ، که از کانون های بیضی می گذرد، **قطر بزرگ (قطر کانونی) بیضی** نامیده می شود.

پاره خط  $BB'$ ، که از مرکز بیضی می گذرد و بر قطر بزرگ عمود است، **قطر کوچک بیضی** نامیده می شود.

اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن بیضی را بیضی افقی و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی را بیضی قائم می نامیم.

فعالیت ۱ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اندازه پاره های  $OA$ ،  $OB$  و  $OF$  را به ترتیب با  $a$ ،  $b$  و  $c$  نمایش داده ایم. در فعالیت قبل دیدیم که مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون بیضی مقداری ثابت است.



می خواهیم نشان دهیم قطر بزرگ بیضی، طولی برابر با همین مقدار ثابت دارد.

در رسم بیضی، حالتی را در نظر بگیرید که نوک مداد روی نقطه  $A$  قرار دارد. در این صورت مجموع فواصل نقطه  $A$  از کانون های بیضی مقداری ثابت خواهد بود و برابر است با:

$$AF + AF' = AF + (AF + FF') = 2AF + FF'$$

حال فرض می کنیم که نوک مداد روی نقطه  $A'$  قرار دارد. در این صورت مجموع فواصل نقطه  $A'$  از کانون های بیضی مقداری ثابت خواهد بود و برابر است با:

$$A'F + A'F' = A'F + (A'F' + FF') = 2A'F' + FF'$$

می دانیم که این دو مقدار ثابت و یکسان هستند. با مقایسه این دو خواهیم داشت:  $AF = A'F'$

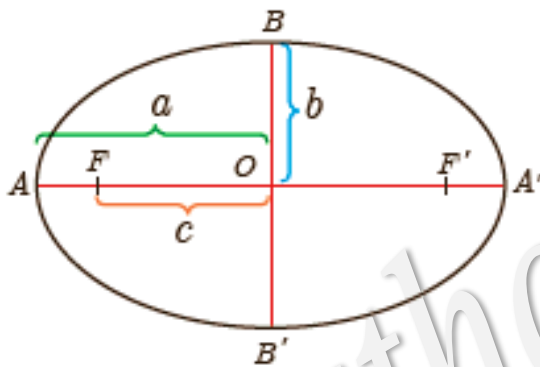
$$AF + AF' = A'F' + AF' = AA'$$

مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

با توجه به تساوی  $AF = A'F'$  نشان دهید که مرکز بیضی قطر بزرگ آن را نصف می کند و از آن نتیجه بگیرید

طول قطر بزرگ بیضی برابر با  $2a$  است.



می دانیم  $O$  وسط پاره  $FF'$  است. پس داریم:  $OF = OF'$

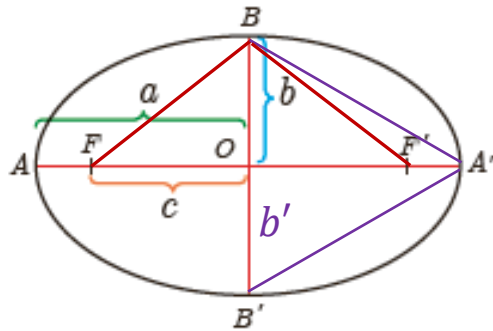
$$A'F' = OA' - OF' \rightarrow OA' = A'F' + OF' \quad \begin{array}{l} OF = OF' \\ AF = A'F' \end{array} \rightarrow OA' = AF + OF \rightarrow OA' = OA$$

$$\text{طول قطر بزرگ} = AA' = OA + OA' = OA + OA = 2a$$

## رابطه ای مهم

فعالیت ۲ صفحه ۱۲۹ کتاب درسی

بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اندازه پاره خط های  $OA$ ،  $OB$  و  $OF$  را به ترتیب با  $a$ ،  $b$  و  $c$  نمایش داده ایم. می خواهیم رابطه بین  $a$ ،  $b$  و  $c$  را پیدا کنیم.



نقطه  $B$  را مطابق شکل روی بیضی در نظر بگیرید. می دانیم این نقطه روی عمود منصف پاره خط  $FF'$  است، زیرا پاره خط  $BB'$  عمود بر پاره خط  $AA'$  است (قطرهای بیضی برهم عمودند) و از مرکز بیضی عبور می کند.

می دانیم فاصله هر نقطه روی عمود منصف پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک اندازه است. پس داریم:  $BF = BF'$

همچنین می دانیم مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

$$BF + BF' = 2a \quad \xrightarrow{BF = BF'} \quad BF + BF = 2a \quad \rightarrow \quad 2BF = 2a \quad \rightarrow \quad BF = a$$

$$BF^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2$$

اندازه  $BF$  را به کمک رابطه فیثاغورس تعیین می کنیم.

آیا مرکز بیضی قطر کوچک را هم نصف می کند؟ چرا؟

نقطه  $A'$  روی عمود منصف پاره خط  $BB'$  قرار دارد، پس فاصله آن تا دو سر پاره خط  $BB'$  به یک اندازه است. یعنی:  $A'B = A'B'$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b')^2} \quad \rightarrow \quad a^2 + b^2 = a^2 + (b')^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = (b')^2 \quad \rightarrow \quad b = b'$$

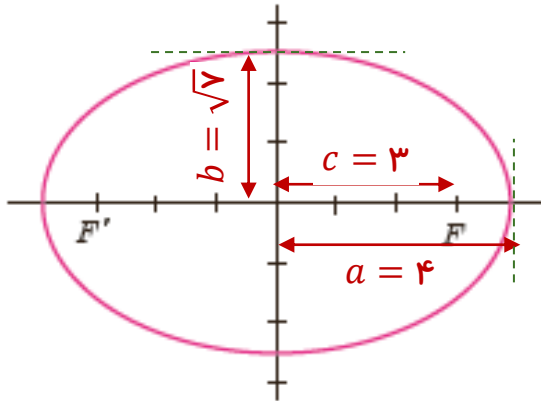
اگر در یک بیضی، اندازه نیم قطر بزرگ را  $a$ ، اندازه نیم قطر کوچک را  $b$

و نصف فاصله کانونی را  $c$  بنامیم، آنگاه داریم:  $a^2 = b^2 + c^2$



## مثال صفحه ۱۳۰ کتاب درسی

اگر در یک بیضی داشته باشیم،  $a = ۴$  و  $c = ۳$  باشد، اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟



$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \rightarrow b = \sqrt{7}$$

$b$  نصف قطر کوچک بیضی است. پس اندازه قطر کوچک برابر با  $2b$  است یعنی  $2\sqrt{7}$

## کار در کلاس ۱ صفحه ۱۳۰ کتاب درسی

اگر در یک بیضی داشته باشیم،  $a = ۵$  و  $b = ۳$ ، در این صورت اندازه فاصله کانونی را محاسبه کنید.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow c = 4$$

$$FF' = 2c = 8$$



کار در کلاس ۲ صفحه ۱۳۰ کتاب درسی

در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.  
اگر مرکز این بیضی نقطه ای با مختصات (۵, ۴) باشد:  
الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.

$a$  نصف قطر بزرگ است. پس اندازه آن برابر ۳ واحد است.  
 $b$  نصف قطر کوچک است. پس اندازه آن برابر ۲ واحد است.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5}$$

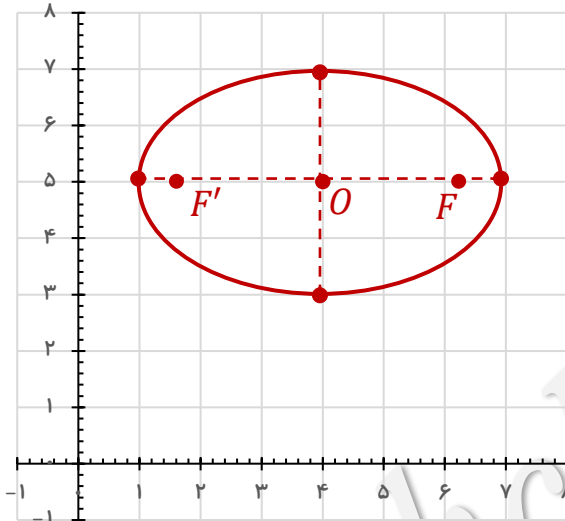
$$FF' = 2c = 2\sqrt{5}$$

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون های بیضی را بنویسید.

دو سر قطر کوچک نقاط (۴, ۳) و (۴, ۷) هستند.

دو سر قطر بزرگ نقاط (۷, ۵) و (۱, ۵) هستند.

کانون های بیضی نقاط  $(4 + \sqrt{5}, 5)$  و  $(4 - \sqrt{5}, 5)$  هستند.



صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

## خروج از مرکز بیضی

همان طور که دیدید اندازه قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصله کانونی یک بیضی مقادیری به هم وابسته اند. بدیهی است که همیشه مقدار  $a$  از مقدار  $b$  و  $c$  بیشتر است (چرا؟).

فاصله مرکز تا کانون ها کمتر از فاصله مرکز تا دو سر قطر های بیضی است.

اندازه های  $a$ ،  $b$  و  $c$  بر شکل بیضی تأثیر گذار است و همواره  $\frac{c}{a}$  مقداری بین  $0$  و  $1$  است. (چرا؟)  $c < a$

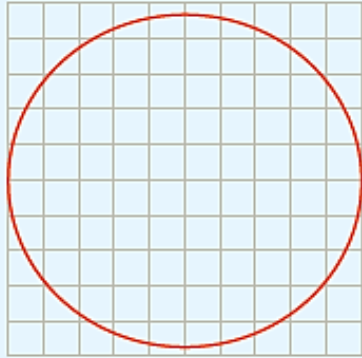
هر چه نسبت  $\frac{c}{a}$ ، بزرگ تر و به  $1$  نزدیک تر باشد، شکل بیضی کشیده تر می شود و هر چه مقدار  $\frac{c}{a}$  کوچک تر و به صفر نزدیک تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک تر خواهد شد.

مقدار  $\frac{c}{a}$  را خروج از مرکز بیضی می نامند و معمولاً آن را با حرف  $e$  نمایش می دهند.

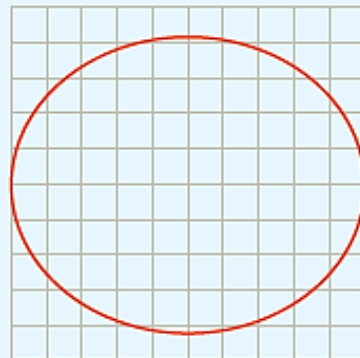
صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

در شکل های زیر چند بیضی با مقادیر مختلف  $e$  رسم شده است. تأثیر اندازه خروج از مرکز را بر شکل بیضی

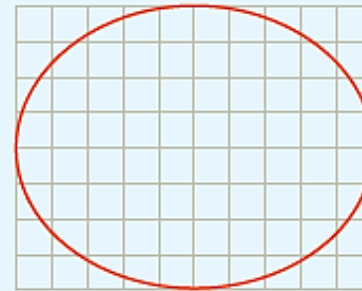
بررسی کنید.



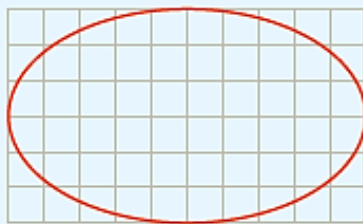
$$\frac{c}{a} = 0/2$$



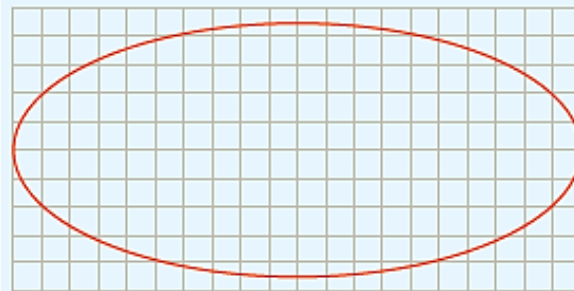
$$\frac{c}{a} = 0/4$$



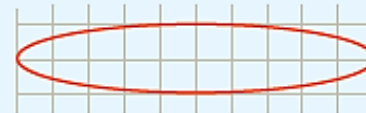
$$\frac{c}{a} = 0/6$$



$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$



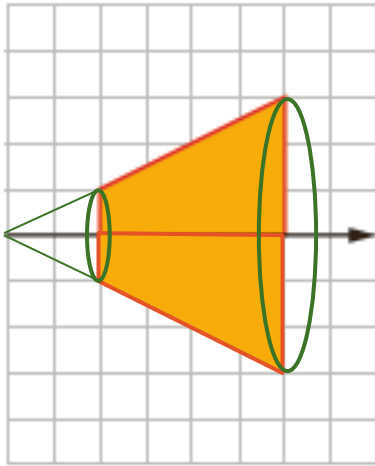
$$\frac{c}{a} = 0/9$$



$$\frac{c}{a} = 0/98$$

هر چه مقدار  $e$  به عدد یک نزدیک تر شود، بیضی پاریک تر و اندازه قطر کوچک به صفر نزدیک خواهد شد.  
 هر چه مقدار  $e$  به عدد صفر نزدیک تر شود، بیضی به دایره شبیه و اندازه قطرها به یکدیگر نزدیک خواهد شد.

تمرین ۱ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی



در شکل روبه رو می خواهیم دوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

با ادامه دادن پاره خط داده شده مشخص می شود که شکل حاصل بخشی از یک مخروط است (مخروط ناقص) لذا حجم مخروط ناقص عبارت است از:

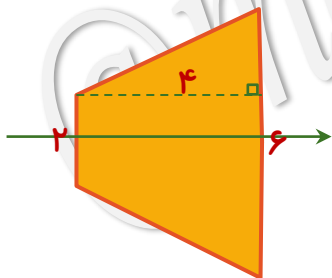
حجم مخروط رنگ نشده - حجم مخروط کامل = حجم قسمت رنگی (مخروط ناقص)

حجم مخروط برابر است با یک سوم حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع

$$\text{حجم قسمت رنگی (مخروط ناقص)} = \left( \frac{1}{3} \pi (3)^2 \times 6 \right) - \left( \frac{1}{3} \pi (1)^2 \times 2 \right) = 18\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{52}{3}\pi$$

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟

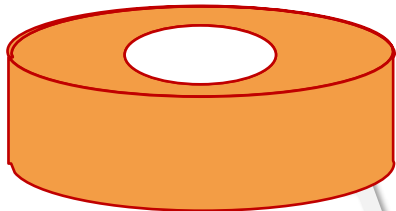
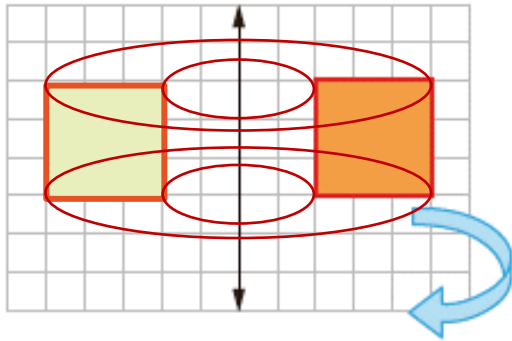
صفحه ای که شامل محور دوران باشد، جسم را به دو نیمه مساوی تقسیم می کند و سطح مقطع به شکل دوزنقه خواهد بود.



مساحت دوزنقه برابر است با نصف حاصل ضرب مجموع قاعده ها در ارتفاع دوزنقه

$$\text{مساحت سطح مقطع} = \frac{1}{2} (2 + 6) \times 4 = 16 \text{ cm}^2$$

تمرین ۲ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی



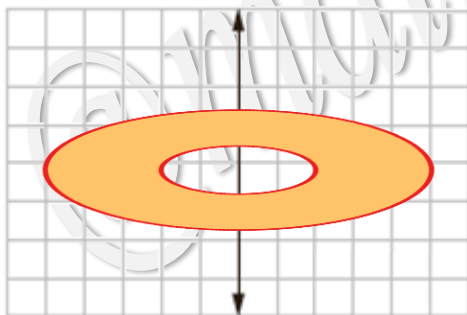
مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه رو در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.  
 حجم استوانه کوچک - حجم استوانه بزرگ = حجم حاصل

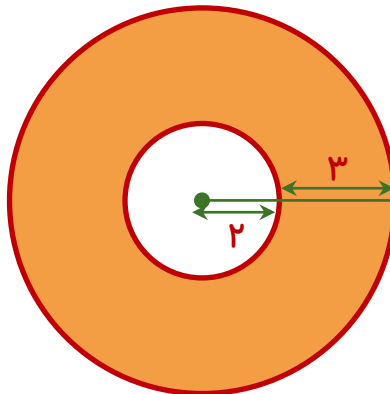
حجم استوانه برابر است با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع استوانه

$$\text{حجم حاصل} = (\pi(5)^2 \times 3) - (\pi(2)^2 \times 3) = 75\pi - 12\pi = 63\pi$$

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه ای موازی با قاعده آن توصیف کنید.



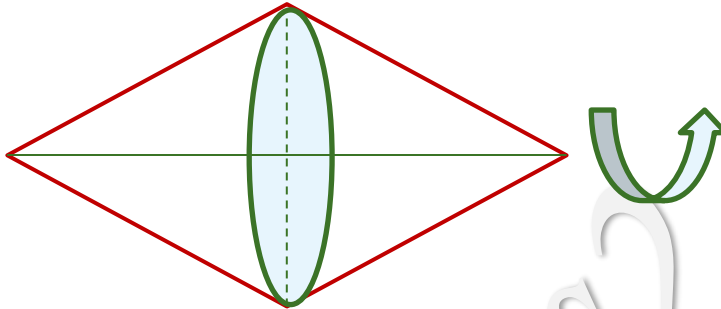
نمای بالا



سطح مقطع حاصل همان سطح محصور بین دایره های با شعاع ۲ و ۵ واحد است.

## تمرین ۳ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟



شکل حاصل دو مخروط هم اندازه خواهد بود که از قاعده به هم متصل هستند.

ارتفاع هر کدام از مخروط ها برابر با نصف قطر بزرگ لوزی یعنی ۳ واحد و شعاع قاعده هر مخروط برابر با نصف قطر کوچک یعنی ۲ واحد خواهد بود.

بنابراین حجم شکل برابر است با:

$$\left(\frac{1}{3}\pi(2)^2 \times 3\right) + \left(\frac{1}{3}\pi(2)^2 \times 3\right) = 4\pi + 4\pi = 8\pi$$

تمرین ۴ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

کانون های یک بیضی نقاط  $(۱, ۳)$  و  $(۱, -۵)$  هستند.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

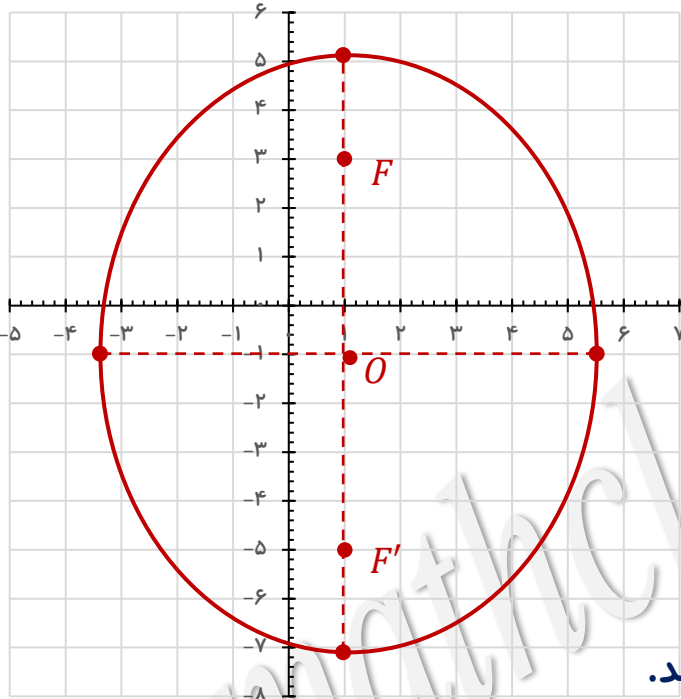
نقاط کانونی را روی دستگاه مختصات مشخص می کنیم.

$$\text{فاصله کانونی: } FF' = 3 - (-5) = 8$$

با توجه به مختصات کانون ها، این بیضی، یک بیضی قائم است.

$$\text{مختصات مرکز بیضی (وسط فاصله کانونی): } O(1, -1)$$

با توجه به مرکز بیضی، معادله قطر بزرگ  $x = 1$  و معادله قطر کوچک  $y = -1$  است.



ب) اگر  $a = 6$  باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$c$  نصف فاصله کانونی است. پس اندازه آن برابر ۴ واحد است.

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20 \rightarrow b = \sqrt{20}$$

$b$  نصف قطر کوچک بیضی است. پس اندازه قطر کوچک برابر با  $2b$  است یعنی  $2\sqrt{20}$

$$\text{خروج از مرکز بیضی: } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



تمرین ۵ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

خروج از مرکز یک بیضی افقی  $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن  $(-4, -1)$  و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

*نصف قطر کوچک بیضی است. پس مقدار آن برابر ۳ است.*

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{c}{a} \rightarrow c = \frac{4}{5}a$$

*خروج از مرکز بیضی*

$$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow 3^2 = a^2 - \left(\frac{4}{5}a\right)^2 \rightarrow 9 = a^2 - \frac{16a^2}{25} \rightarrow 9 = \frac{9a^2}{25} \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow a = 5$$

$$c = \frac{4}{5}a \xrightarrow{a=5} c = 4$$

*طول قطر کانونی (قطر بزرگ):  $2a = 10$*

*فاصله کانونی:  $FF' = 2c = 8$*

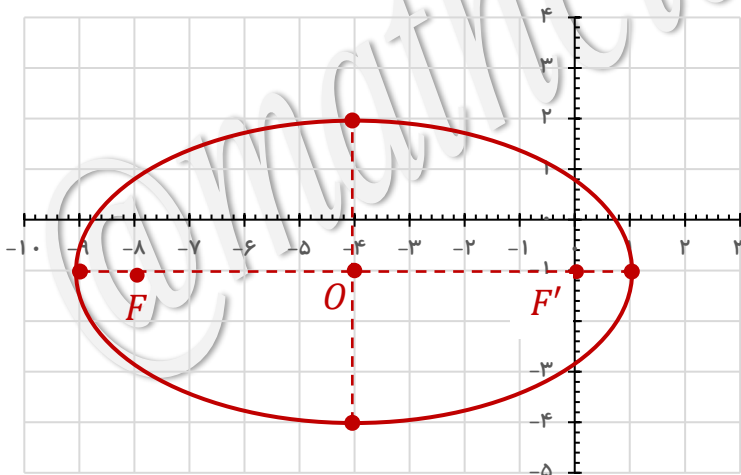
ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون های

بیضی را پیدا کنید.

*دو سر قطر کوچک نقاط  $(-4, 2)$  و  $(-4, -4)$  هستند.*

*دو سر قطر بزرگ نقاط  $(1, -1)$  و  $(-9, -1)$  هستند.*

*کانون های بیضی نقاط  $(0, -1)$  و  $(-8, -1)$  هستند.*

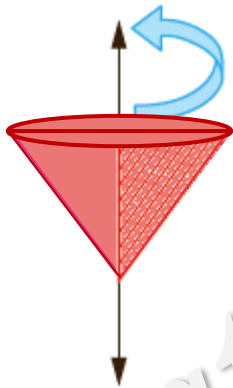


## امتحانات نهایی

درستی یا نادرسی عبارت های زیر را مشخص کنید.

(۱) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع زاویه قائمه به صورت مخروط توپر می باشد.

(مُرداد ۱۳۹۸)



درست

دقیقاً کاردر کلاس ( صفحه ۱۲۵ کتاب درسی

(۲) اگر صفحه  $P$  در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل

یک هذلولی است. (شهریور ۱۳۹۸)

صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

نادرست - شکل حاصل یک سهمی است.

## امتحانات نهایی

در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

(۱) شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، **سطح مقطع** نامیده می شود. (دی ماه ۱۳۹۸)

صفحه ۱۲۴ کتاب درسی

(۲) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن **استوانه**... است. (شهریور ۱۳۹۸)

دقیقا کاردر کلاس ۲ صفحه ۱۲۵ کتاب درسی

(۳) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن **نیم کره**... است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج از کشور)

دقیقا فعالیت صفحه ۱۲۳ کتاب درسی

(۴) اگر صفحه ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی **بیضی**... خواهد بود. (بیضی-سهمی-هذلولی) (شهریور ۱۳۹۹)

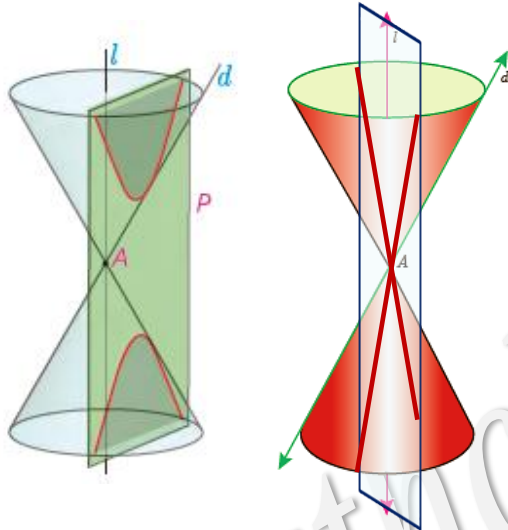
صفحه ۱۲۶ کتاب درسی

## امتحانات نهایی

در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

(۱) وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه به طور عمودی برش داده می شود، سطح مقطع یک **هذلولی** است.

(خرداد ۱۳۹۹ خارج از کشور)



به شرطی که از راس عبور نکند. در غیر این صورت شامل دو خط خواهد بود.

صفحه ۱۲۷ کتاب درسی

(۲) هرچه خروج از مرکز بیضی **کوچکتر** (کوچکتر، بزرگتر) شود، شکل به دایره نزدیک تر خواهد شد. (خرداد ۱۳۹۸)

صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

می دانیم خروج از مرکز بیضی مقداری بین صفر و یک است.

(۳) اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، بیضی به شکل **دایره** نزدیک خواهد شد. (پاره خط - دایره - نقطه)

(شهریور ۱۳۹۹)

صفحه ۱۳۱ کتاب درسی

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۷

در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

$a$  نصف قطر بزرگ است. پس اندازه آن برابر ۴ واحد است.

$b$  نصف قطر کوچک است. پس اندازه آن برابر ۳ واحد است.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \rightarrow c = \sqrt{7}$$

خروج از مرکز بیضی:  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

صفحه ۱۳۰ و ۱۳۱ کتاب درسی

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۸

در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. فاصلهٔ کانونی بیضی را به دست آورید.

$a$  نصف قطر بزرگ است. پس اندازهٔ آن برابر ۴ واحد است.

$b$  نصف قطر کوچک است. پس اندازهٔ آن برابر ۳ واحد است.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$FF' = 2c = 2\sqrt{7}$$

مشابه کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۳۰ کتاب درسی

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۸

اگر در یک بیضی داشته باشیم،  $a = ۵$  و  $b = ۳$ ، در این صورت اندازه فاصله کانونی را محاسبه کنید.

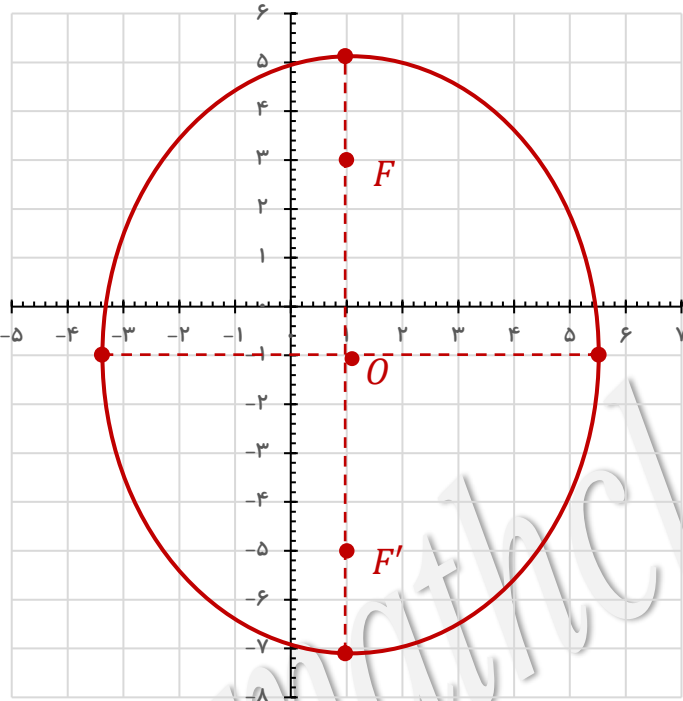
$$c^2 = a^2 - b^2 = ۵^2 - ۳^2 = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \rightarrow c = ۴$$

$$FF' = ۲c = ۸$$

دقیقا کاردرکلاس (صفحه ۱۳۰) کتاب درسی



امتحان نهایی تیرماه ۱۳۹۸



کانون های یک بیضی نقاط  $(1, 3)$  و  $(1, -5)$  هستند.  
الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی را به دست آورید.  
ب) اگر  $a = 6$  باشد، اندازه قطر کوچک را پیدا کنید.

نقاط کانونی را روی دستگاه مختصات مشخص می کنیم.

فاصله کانونی:  $FF' = 3 - (-5) = 8$

با توجه به مختصات کانون ها، این بیضی، یک بیضی قائم است.

مختصات مرکز بیضی (وسط فاصله کانونی):  $O(1, -1)$

$c$  نصف فاصله کانونی است. پس اندازه آن برابر ۴ واحد است.

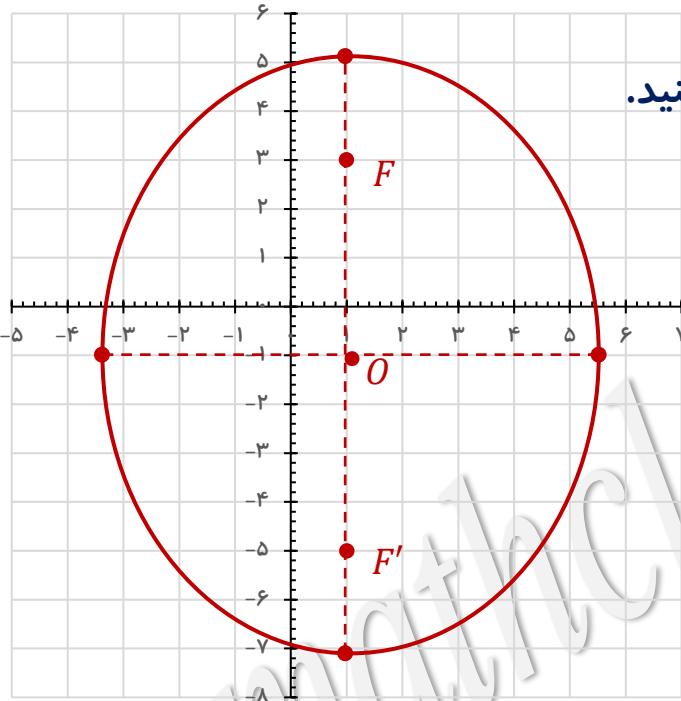
$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20 \rightarrow b = \sqrt{20}$$

$b$  نصف قطر کوچک بیضی است. پس اندازه قطر کوچک برابر با  $2b$  است یعنی  $2\sqrt{20}$

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۸

کانون های یک بیضی نقاط  $(1, 3)$  و  $(1, -5)$  هستند.  
الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی را به دست آورید.

ب) اگر  $a = 6$  باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.



نقاط کانونی را روی دستگاه مختصات مشخص می کنیم.

فاصله کانونی:  $FF' = 3 - (-5) = 8$

با توجه به مختصات کانون ها، این بیضی، یک بیضی قائم است.

مختصات مرکز بیضی (وسط فاصله کانونی):  $O(1, -1)$

$c$  نصف فاصله کانونی است. پس اندازه آن برابر ۴ واحد است.

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20 \rightarrow b = \sqrt{20}$$

$b$  نصف قطر کوچک بیضی است. پس اندازه قطر کوچک برابر با  $2b$  است یعنی  $2\sqrt{20}$

خروج از مرکز بیضی:  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

بخشی از تمرین ۴ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹

کانون های یک بیضی نقاط  $(1, 3)$  و  $(1, -5)$  هستند.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید.

ب) اگر  $a = 6$  باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

نقاط کانونی را روی دستگاه مختصات مشخص می کنیم.

$$FF' = 3 - (-5) = 8 \quad \text{فاصله کانونی}$$

با توجه به مختصات کانون ها، این بیضی، یک بیضی قائم است.

$$O(1, -1) \quad \text{مختصات مرکز بیضی (وسط فاصله کانونی)}$$

با توجه به مرکز بیضی، معادله قطر بزرگ  $x = 1$  است.

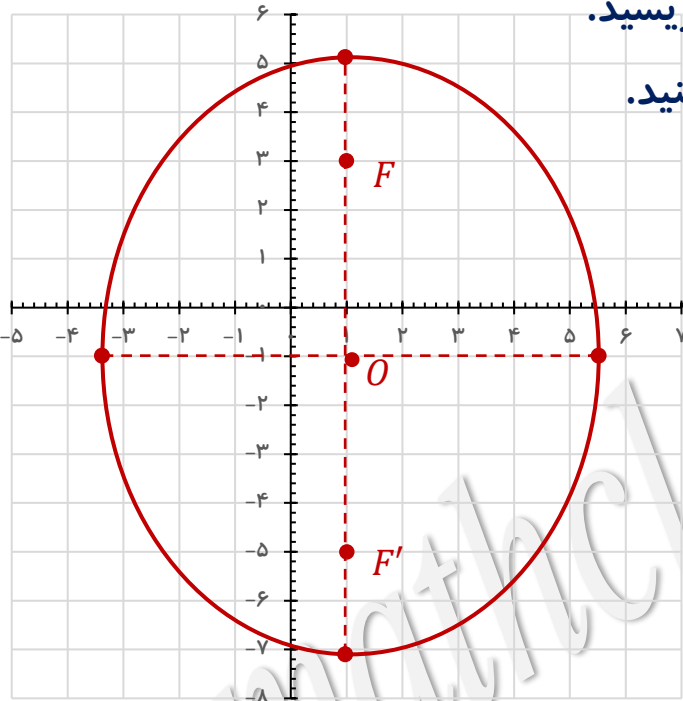
$c$  نصف فاصله کانونی است. پس اندازه آن برابر ۴ واحد است.

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{20}$$

$b$  نصف قطر کوچک بیضی است. پس اندازه قطر کوچک برابر با  $2b$  است یعنی  $2\sqrt{20}$

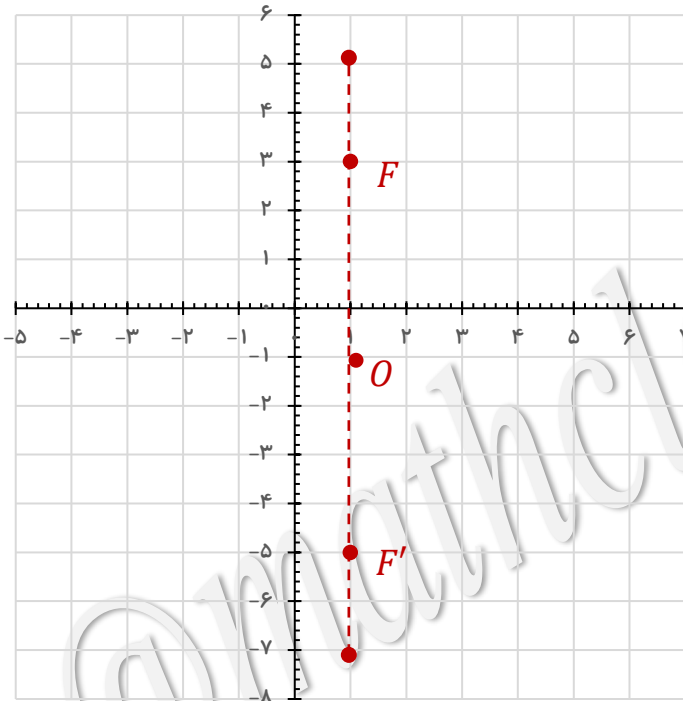
$$\text{خروج از مرکز بیضی: } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

بخشی از تمرین ۴ صفحه ۱۳۲ کتاب درسی



امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹  
خارج از کشور

کانون های یک بیضی نقاط  $(1, 3)$  و  $(1, -5)$  هستند و اندازه قطر بزرگ ۱۲ واحد می باشد، فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.



نقاط کانونی را روی دستگاه مختصات مشخص می کنیم.

فاصله کانونی:  $FF' = 3 - (-5) = 8$

با توجه به مختصات کانون ها، این بیضی، یک بیضی قائم است.

مختصات مرکز بیضی (وسط فاصله کانونی):  $O(1, -1)$

$c$  نصف فاصله کانونی است. پس اندازه آن برابر ۴ واحد است.

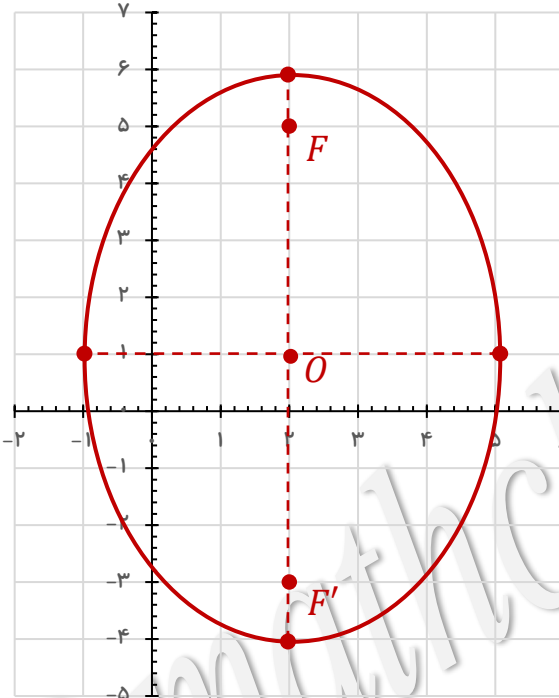
$a$  نصف قطر بزرگ است. پس اندازه آن برابر ۶ واحد است.

خروج از مرکز بیضی:  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۹

کانون های یک بیضی نقاط  $(۲, ۵)$  و  $(۲, -۳)$  و  $a = ۵$  است، مختصات مرکز بیضی و اندازه قطر کوچک را

پیدا کنید.



نقاط کانونی را روی دستگاه مختصات مشخص می کنیم.

$$\text{فاصله کانونی: } FF' = ۵ - (-۳) = ۸$$

با توجه به مختصات کانون ها، این بیضی، یک بیضی قائم است.

$$\text{مختصات مرکز بیضی (وسط فاصله کانونی): } O(۲, ۱)$$

$c$  نصف فاصله کانونی است. پس اندازه آن برابر ۴ واحد است.

$$b^2 = a^2 - c^2 = ۵^2 - ۴^2 = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \rightarrow b = ۳$$

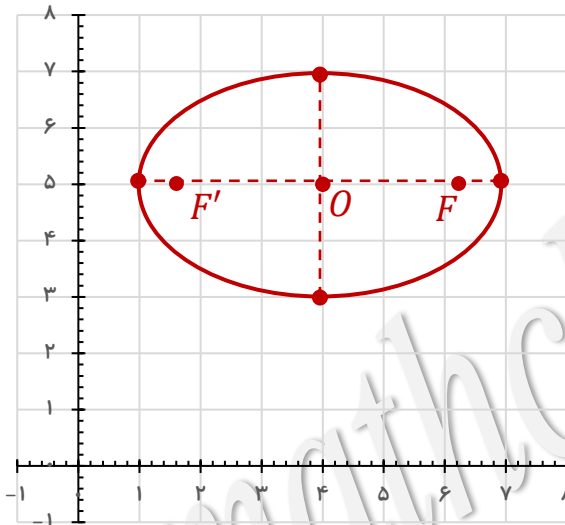
$b$  نصف قطر کوچک بیضی است. پس اندازه قطر کوچک برابر با  $۲b$  است یعنی ۶ واحد.

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹  
خارج از کشور

در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه ای با مختصات  $O(4, 5)$  باشد:

الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.

ب) مختصات دو سر قطر بزرگ را بنویسید.



$a$  نصف قطر بزرگ است. پس اندازه آن برابر ۳ واحد است.

$b$  نصف قطر کوچک است. پس اندازه آن برابر ۲ واحد است.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5}$$

$$FF' = 2c = 2\sqrt{5}$$

دو سر قطر بزرگ نقاط  $(7, 5)$  و  $(1, 5)$  هستند.

# پایان درس اول

