

## فصل هشتم حجم و مساحت

خلاصه درس :

\* حجم و مساحت کره :

انواع حجم :

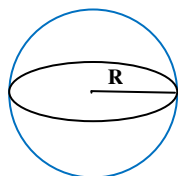
۱. منشوری
۲. کروی
۳. هرمی

- حجم های منشوری را به طور کامل در ریاضی هفتم یاد گرفتید.

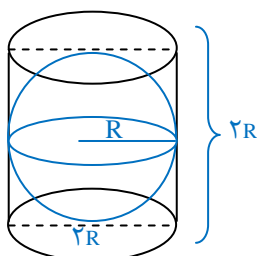
**تعریف دایره :** دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که همه ی آن نقاط از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله است. به این اندازه ی ثابت شعاع دایره می گوئیم.

**تعریف کره :** کره را همانند دایره تعریف می کنیم : کره مجموعه نقاطی از فضا است که همه ی آن نقاط از یک نقطه در فضا به نام مرکز به یک فاصله هستند. مانند انواع توپ و کره ی زمین.

\* اگر یک کره را به طور کامل درون یک استوانه قرار دهیم، به طوری که از طرف بالا و پایین بر استوانه مماس شود، گوئیم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است.



**نکته :** اگر کره ای در یک استوانه محاط شود، ارتفاع استوانه برابر قطر کره و شعاع قاعده استوانه با شعاع کره مساوی است.



**\* حجم کره :**

با توجه به شکل بالا و یک آزمایش ساده ثابت می شود :

$$\text{حجم کره} = \text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi R^2 (2R) = 2\pi R^3$$

$$\Rightarrow \text{حجم نیم کره} = \frac{2}{3} \pi R^3 \Rightarrow \text{حجم کره} = 2 \left( \frac{2}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

در نتیجه :

$$S = 4\pi R^2$$

**\* مساحت کره :** مساحت کره ای به شعاع R برابر است با :

◀ **مثال «۱» :** حجم و مساحت کره ای به قطر ۱۲cm را به دست آورید.

$$\Rightarrow \text{شعاع} = 12 \div 2 = 6 \quad \text{قطر کره} = 12$$

**پاسخ :**

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3/14 \times 6^3 = \frac{4}{3} \times 3/14 \times 216 = 904/32$$

$$S = 4\pi R^2 = 4 \times 3/14 \times 6^2 = 4 \times 3/14 \times 36 = 452/16$$

**نکته «۱» :** از دوران نیم دایره حول قطر آن کره بدست می آید.

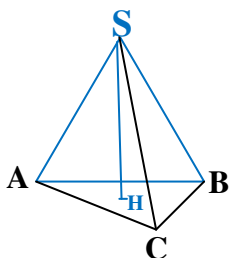
**نکته «۲» :** از دوران ربع دایره حول شعاع آن نیم کره بدست می آید.

**\* حجم هرم و مخروط :**

**الف) هرم :** هرم شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین (چند ضلعی محدب) به نام قاعده است.

**ارتفاع هرم :** به فاصله ی رأس هرم تا قاعده را ارتفاع هرم گویند.

◀ **مثال «۲» :** رأس : S ، شکل قاعده : مثلث ، تعداد وجه ها : ۳ وجه ، شکل وجه ها : مثلثی ، نام قاعده : مثلث ABC.



**نکته :** وجه جانبی (پهلوهای هرم) همگی مثلثی شکل هستند.

## \* حجم هرم :

کلامی : ارتفاع × مساحت قاعده ×  $\frac{1}{3}$  = حجم هرم

جبری :  $V = \frac{1}{3}sh$  هرم

◀ مثال «۳»: حجم هرم مربع القاعده ای به ضلع ۵cm و ارتفاع هرم ۹ سانتی متر را حساب کنید.

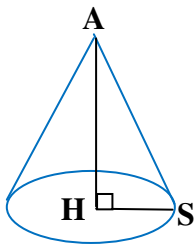
$$S = 5 \times 5 = 25 \Rightarrow V = \frac{s.h}{3} = \frac{25 \times 9}{3} = 75 \text{ cm}^3$$

نکته «۱»: واحد حجم مترمکعب یا سانتی مترمکعب است و در مایعات معمولاً لیتر است.

نکته «۲»: اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های آن ها باهم برابرند.

\* مخروط : مخروط شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

$\overline{AH}$  ارتفاع،  $A$  رأس و  $\overline{HS}$  شعاع قاعده و  $\overline{AS}$  مولد مخروط است.



نکته : از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائم آن مخروط بدست می آید.

## \* حجم مخروط :

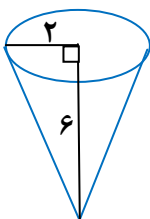
کلامی : ارتفاع × مساحت قاعده ×  $\frac{1}{3}$  = حجم مخروط

جبری :  $V = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$R$  شعاع قاعده (دایره) و  $h$  ارتفاع مخروط و  $\pi \approx 3/14$

◀ مثال «۴»: حجم مخروط زیر را حساب کنید.

$$V = \frac{sh}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{3/14 \times 2 \times 2 \times 6}{3} = 25/12$$



## \* سطح و حجم :

- (۱) از دوران مستطیل حول طول یا عرض آن، استوانه بدست می آید.
- (۲) از دوران مربع حول یکی از اضلاع آن، استوانه بدست می آید.
- (۳) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع زاویه قائمه، مخروط حاصل می شود.
- (۴) از دوران مثلث قائم الزاویه حول وتر دو مخروط حاصل می شود.
- (۵) از دوران مثلث متساوی الاضلاع حول یک ضلع آن دو مخروط مساوی پدید می آید.
- (۶) از دوران مربع حول یک قطر آن دو مخروط هم قاعده و مساوی پدید می آید.
- (۷) از دوران لوزی حول یک قطر آن دو مخروط برابر و به هم چسبیده بدست می آید.
- (۸) از دوران نیم دایره حول قطر آن کره بدست می آید.
- (۹) از دوران ربع دایره حول شعاع آن نیم کره بدست می آید.

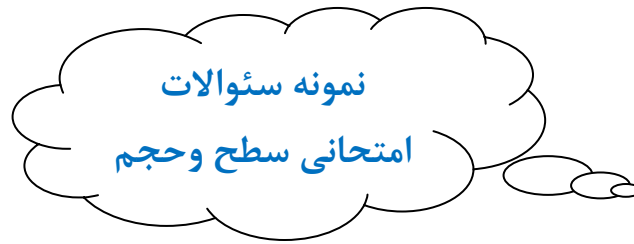
◀ مثال «۵» : حجم حاصل از دوران نیم دایره ای به قطر  $10\text{ cm}$  را حول قطر آن پیدا کنید.

پاسخ : از دوران نیم دایره حول قطر آن کره پدید می آید بنابراین :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{500}{3} \pi \quad (\text{شعاع کره } 5 = 10 \div 2)$$

\* مساحت کل مکعبی به ضلع  $a$  برابر است با  $6a^2$  .

\* مساحت کل مکعب مستطیلی به ابعاد  $a$  و  $b$  و  $c$  برابر است با  $2(bc + ac + ab)$



۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.
- (الف) کره مجموعه نقاطی از صفحه است که همه ی نقاط آن از یک نقطه به یک فاصله اند.
- (ب) از دوران نیم دایره حول قطر آن نیم کره پدید می آید.
- (ج) قاعده ی مخروط دایره ای و قاعده ی هرم یک چند ضلعی است.
- (د) نحوه ی محاسبه حجم هرم و مخروط مثل هم است.
- (ه) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن هرم پدید می آید.
- (و) حجم هرمی با مساحت قاعده ی  $20$  و ارتفاع  $6$  برابر است با  $40$ .
- (ز) ممکن است در حالت خاصی حجم کره با مساحت کره برابر شود.
- (ح) حجم هرمی که مساحت قاعده ی آن  $9\sqrt{3}$  و ارتفاع هرم  $\sqrt{27}$  سانتی متر باشد،  $27$  سانتی متر مکعب است.

۲. کامل کنید.

- \* به فاصله ی رأس هرم تا قاعده ی آن را ..... هرم گویند.
- \* شکل وجه های جانبی هرم به صورت ..... است.
- \* اگر دو هرم قاعده های هم مساحت و ارتفاع برابر داشته باشند آنگاه حجم های آن دو .....
- \* حجم هرم مربع القاعده ای به اضلاع  $4$  و ارتفاع هرم  $6$  باشد، برابر است با .....
- \* حجم هرم به صورت جبری برابر است با .....
- \* مخروط شبیه هرم ..... است که قاعده ی آن به شکل ..... است.
- \* از دوران مستطیل حول طول آن ..... بدست می آید.
- \* از دوران نیم دایره حول قطر آن ..... پدید می آید.
- \* از دوران ربع دایره حول شعاع آن ..... به وجود می آید.
- \* مساحت کل مکعبی به ضلع  $5$  cm برابر است با .....
- \* از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن ..... بدست می آید.
- \* نسبت مساحت کره به حجم آن مساوی ..... برابر شعاع کره است.
- \* اگر مساحت قاعده و ارتفاع یک هرم با مساحت قاعده و ارتفاع یک مخروط برابر باشد، نسبت حجم های این دو شکل برابر است با .....

۳. گزینه ی مناسب را علامت بزیند.

الف) از دوران مربع حول یک ضلع آن چه شکلی پدید می آید؟

- (۱) هرم (۲) استوانه (۳) مخروط (۴) کره

ب) اگر شعاع کره ای را ۳ برابر کنیم، حجم آن چند برابر می شود؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۸

ج) حجم هرم مربع القاعده ای به قطر قاعده  $10\sqrt{2}$  و ارتفاع ۱۵ چند است؟

- (۱) ۲۰۰ (۲) ۳۰۰ (۳) ۵۰۰ (۴) ۶۰۰

د) نسبت عددی حجم کره به مساحت کره کدام است؟

- (۱)  $4R$  (۲)  $3R$  (۳)  $\frac{1}{4}R$  (۴)  $\frac{1}{3}R$

هـ) حجم مخروطی به شعاع ۱ cm و ارتفاع ۳ cm چند سانتی متر مکعب است؟

- (۱)  $3/14$  (۲)  $6/28$  (۳)  $9/42$  (۴)  $\pi/3$

و) مساحت کره ای به قطر ۶ سانتی متر برابر است با :

- (۱)  $12\pi$  (۲)  $36\pi$  (۳)  $72\pi$  (۴)  $144\pi$

ز) مکعب مستطیلی به ابعاد ۴ و ۵ موجود است اگر مساحت کل این مکعب مستطیل ۹۴ سانتی

متر مربع باشد، ارتفاع این شکل چند است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

ح) کره ای به قطر ۴ cm را درون استوانه ای محاط کرده ایم، حجم استوانه چند سانتی متر مکعب

است؟

- (۱)  $4\pi$  (۲)  $48\pi$  (۳)  $12\pi$  (۴)  $16\pi$

۴. حجم و مساحت کره ای به شعاع ۳cm را بدست آورید.

۵. سطح کره ای را پیدا کنید که حجم آن  $36\pi$  باشد (برحسب  $\pi$ )

۶. کره ای در استوانه ای به قطر ۶ سانتی متر محاط شده است :

الف) حجم کره را بدست آورید.

ب) مساحت کره را بدست آورید.

ج) حجم استوانه را پیدا کنید.

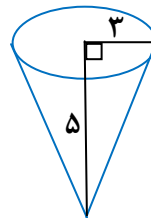
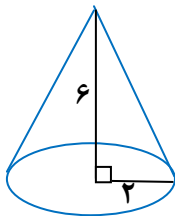
۶. مهدی نیم کره ای توپر به قطر ۲۰ سانتی متر دارد. می خواهد سطح آن را با کاغذ کادو بپوشاند. حداقل چند سانتی متر مربع کاغذ کادو به کار می رود؟

۷. حجم هرمی که قاعده ی آن یک لوزی به قطرهای ۸ و ۶ و ارتفاع هرم ۹ سانتی متر باشد، را حساب کنید.

۸. حجم هرم مربع القاعده ای به قطر قاعده ی  $3\sqrt{2}$  و ارتفاع ۵ متر چند مترمکعب است؟

۹. قاعده ی یک هرم مستطیلی به ابعاد ۶ و ۱۰ سانتی متر است. اگر ارتفاع هرم ۱۵ سانتی متر باشد، حجم هرم را پیدا کنید.

۱۰. حجم شکل های زیر را به دست آورید.



۱۱. الف) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن چه شکلی حاصل می شود؟

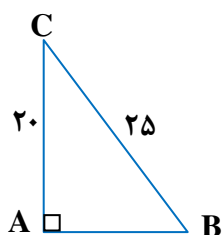
ب) حجم مخروطی به شعاع قاعده ۴ cm و ارتفاع ۱۲ cm را حساب کنید.

۱۲. وتر و یک ضلع قائم مثلث قائم الزاویه ای به ترتیب ۱۰ و ۶ می باشند. این مثلث را حول ضلع ۶ سانتی متر دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را بدست آورید

۱۳. گنجایش مخروطی ۲۸۲۶۰ لیتر است. اگر شعاع قاعده ی آن ۳ متر باشد، ارتفاع آن چند متر است (هر مترمکعب ۱۰۰۰ لیتر است).

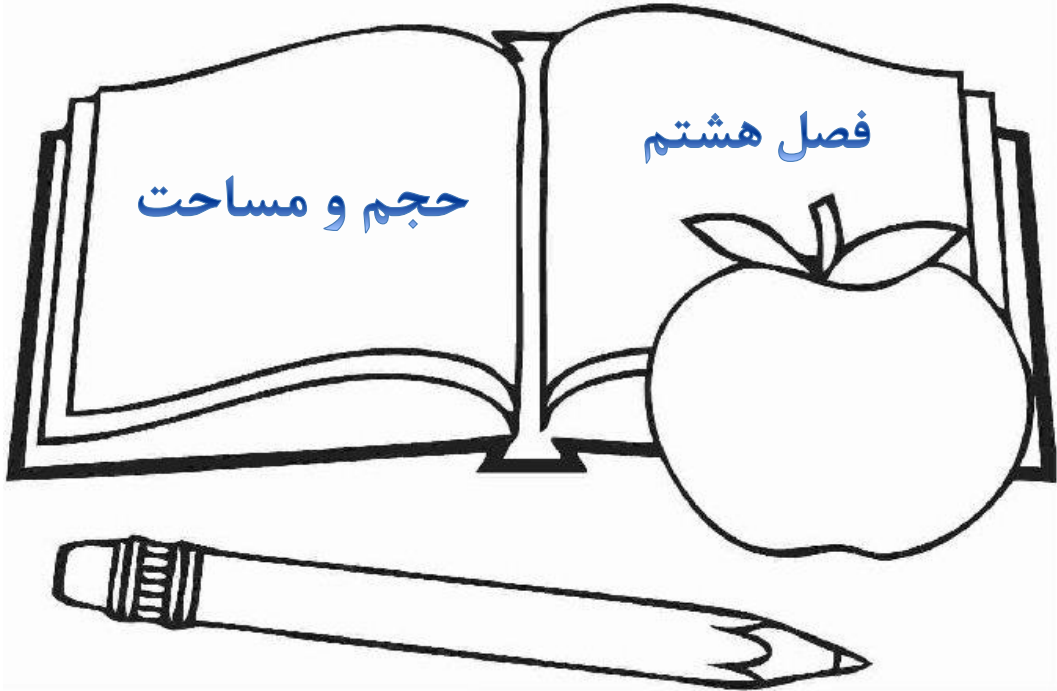
۱۴. الف) اگر هرم منتظمی با قاعده ی مثلث را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می شود؟

ب) مثلث قائم الزاویه ABC را حول ضلع AC دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را بدست آورید.



۱۵. در استوانه ای که ارتفاع و قطر قاعده ی آن باهم برابرند، کره ای محاط شده است. نسبت حجم کره به حجم استوانه را پیدا کنید.





@riazicafe



## پاسخنامه سوالات امتحانی

۱) الف) نادرست      ب) نادرست      ج) درست      د) درست      ه) نادرست

و) درست ( $V = \frac{1}{3} \times 20 \times 6 = 40$ )      ز) درست (در حالتی که  $R = 3$  باشد).

ح) درست ( $V = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{27} = 3\sqrt{81} = 3 \times 9 = 27$ )

۲) \* ارتفاع      \* مثلث      \* مساوی‌اند      \*  $32 \times 32 = 32$       \*  $(\frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 4 = 32)$

$V = \frac{1}{3} Sh$  \*      \* منتظم - دایره      \* استوانه      \* کره      \* نیم‌کره

\*  $15 \cdot cm^2 (6 \times 5 \times 5 = 150)$       \* مخروط      \*  $\frac{4\pi R^2}{3}$       \*  $\frac{3}{R}$       \* یک

۳) الف) گزینه‌ی ۲      ب) گزینه‌ی ۱

ج) گزینه‌ی ۳ ( $V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} (\frac{10\sqrt{2}}{2})^2 \times 15 = 500$ )

د) گزینه‌ی ۴ ( $\frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^2}{3} = \frac{R}{3}$ )

$$(V = \frac{1 \times 1 \times 3/14 \times 3}{3} = 3/14) \text{ هـ) گزینه‌ی ۱}$$

$$(6 \div 2 = 3 \text{ شعاع} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = 4\pi(3)^2 = 36\pi) \text{ و) گزینه‌ی ۲}$$

$$(2(4x + 5x + 20) = 94 \Rightarrow 9x + 20 = 47 \Rightarrow x = 3) \text{ ز) گزینه‌ی ۱}$$

$$(ح) \text{ گزینه‌ی ۴ (حجم کره} = \frac{3}{2} \text{ حجم استوانه, شعاع} = 2)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R^3 = \frac{4/19}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{4/19}{\frac{4}{3}(3/14)} = \frac{12/57}{12/56} \approx 1 \Rightarrow R = \sqrt[3]{1} = 1 \quad (۴)$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع دروازه} > 2 \Rightarrow \text{قطر توپ} = 2 \times 1 = 2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Rightarrow R^3 = \frac{36\pi}{\frac{4}{3}\pi} = 27 \Rightarrow R = \sqrt[3]{27} = 3 \quad (۵)$$

$$\Rightarrow S = 4\pi R^2 = 4\pi(3)^2 = 36\pi$$

$$\text{الف) } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi \quad (۶) \text{ (شعاع} = 3)$$

$$\text{ب) } S = 4\pi R^2 = 4\pi(3)^2 = 36\pi$$

$$\text{ج) حجم استوانه} = \frac{3}{2} \text{ حجم کره} = \frac{3}{2}(36\pi) = 54\pi$$

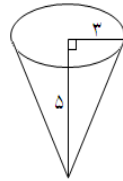
$$S = \pi R^2 + 2\pi R^2 = 3\pi R^2 \Rightarrow S = 3(3/14)(10)^2 = 9/42 \times 100 = 942 \text{ cm}^2 \quad (7)$$

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{6 \times 8}{2} = 24 \Rightarrow V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} (24 \times 9) = 72 \quad (8) \quad 14$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{9 \times 12}{2} = 54 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \times 54 \times 20 = 360 \quad (9)$$

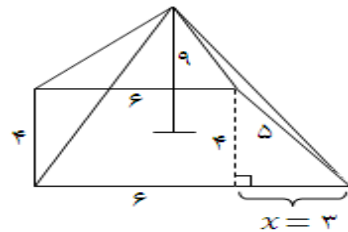
$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} (6 \times 10) \times 15 = 300 \quad (10)$$

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} (3 \times 3 \times \pi) \times 5 = 15\pi \quad (11)$$



$$x^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S_{\text{دورزنقه}} = \frac{(6+9) \times 4}{2} = 30$$

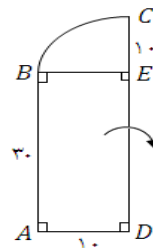
$$V = \frac{1}{3} \times 30 \times 9 = 90$$



(11) الف) مخروط

حجم نیم کره + حجم استوانه = حجم کل

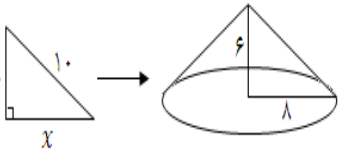
$$\text{حجم استوانه} = 10 \times 10 \times 3/14 \times 30 = 942$$



(ب)

$$\text{حجم کل} = 9420 + \frac{2}{3} (3/14 \times 10^3) = 9420 + 2093/3 = 11513/3$$

۸۵

$$x^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow x = \sqrt{64} = 8$$


$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} (8 \times 8 \times \pi) = 128\pi$$

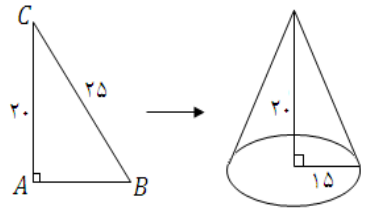
$$28260 \div 1000 = 28.26 \text{ مترمکعب}$$

$$28.26 = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} (3 \times 3 \times 3/14)h = 9/42h \Rightarrow h = \frac{28.26}{9/42} = 3$$

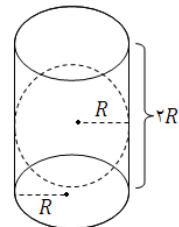
پاسخنامه ایستگاه ریاضی ۹

$$\overline{AB}^2 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{225} = 15$$

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} (15 \times 15 \pi) \times 20 = 1500\pi$$

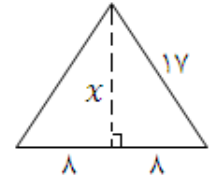


$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم استوانه}} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{(\pi R^2)(2R)} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{2\pi R^3} = \frac{2}{3}$$



$$x^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225 \Rightarrow x = 15$$

$$y^2 = 15^2 - 48^2 = 225 - 64 = 161 \Rightarrow y = \sqrt{161} \text{ ارتفاع}$$



$$V = \frac{1}{3} (16 \times 16) \times \sqrt{161} = \frac{256 \sqrt{161}}{3}$$

$$\text{مساحت یک وجه جانبی} = \frac{16 \times 15}{2} = 120$$

$$S_{\text{کل}} = 4 \times 120 + 16 \times 16 = 480 + 256 = 736$$