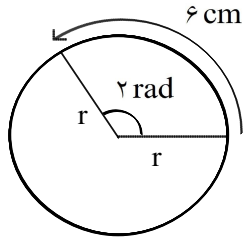
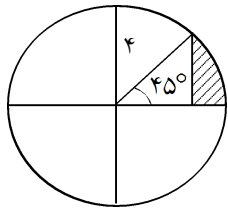


۱- مساحت دایره مقابل چه قدر است؟



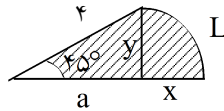
$$l = r\theta \Rightarrow 6 = r \times 2 \Rightarrow r = 3$$

$$S = \pi r^2 = 9\pi$$



۲- در شکل زیر محیط قسمت هاشورزده را حساب کنید.

$$L = r\theta \Rightarrow L = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$



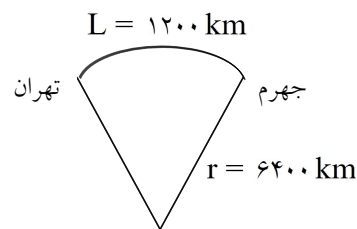
$$\cos 45 = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$a = 2\sqrt{2}$$

$$a + x = 4 \longrightarrow x = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$P = x + y + L = 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \pi = 4 + \pi$$

۳- اگر فاصله جهرم تا تهران ۱۲۰۰ کیلومتر بر روی سطح زمین باشد، زاویه مرکزی این دو شهر در مرکز کره‌ی زمین در صورتی که شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد را حساب کنید. (زاویه برحسب رادیان باشد.)



$$L = 1200 \text{ km} \quad r = 6400 \text{ km} \quad \theta = ?$$

۴- طول برف‌پاک‌کن عقب اتومبیلی ۳۰ سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن، کمانی به اندازه‌ی  $150^\circ$  طی می‌کند. ( $\pi \simeq 3/14$ )

الف) اندازه‌ی کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف‌پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

الف)

$$D = 150^\circ \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{150}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 180 R = 150 \pi \Rightarrow R = \frac{150 \pi}{180} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{6}$$

(ب)

شعاع  $r = 30 \text{ cm}$        $\theta = \frac{5\pi}{6}$        $L = ?$

$$L = r\theta = 30 \times \frac{5\pi}{6} = 25\pi = 78.5$$

۵- آیا می‌توان با زوایای  $\frac{\pi}{6}$ ،  $\frac{\pi}{4}$ ،  $\frac{\pi}{12}$  یک مثلث ساخت؟ چرا؟

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi + 3\pi + \pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \neq \pi$$

پس نمی‌توان با این زوایا مثلث ساخت.

۶- در دایره‌ای به محیط  $24\pi$  طول کمان مقابل به زاویه  $120^\circ$  درجه را بیابید.

$$2\pi r = 24\pi \Rightarrow r = 12$$

$$120 = \frac{2\pi}{3}$$

$$L = r\theta \Rightarrow L = 12 \times \frac{2\pi}{3} = 8\pi$$

۷- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا برحسب رادیان است).

(ب)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos\theta = 1$

(الف)  $\cos\theta + \cos(\pi - \theta) = 0$

(د)

(ج)  $\cos(\gamma) = \cos(-\gamma)$

(د) درست

(ج) درست

(ب) نادرست

(الف) درست

۸- برحسب  $\theta$  بنویسید.

(الف)  $\sin\left(\frac{27\pi}{2} + \theta\right)$  (ب)  $\text{tg}(10\pi + \theta)$  (ج)  $\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)$  (د)  $\text{Cotg}(93\pi - \theta)$

(الف)  $\sin\left(\frac{27\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$

(ب)  $\text{tg}(10\pi + \theta) = \text{tg}\theta$

(ج)  $\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

(د)  $\text{Cotg}(93\pi - \theta) = -\text{Cotg}\theta$

۹- مقادیر زیر را حساب کنید.

(الف)  $\sin(240^\circ)$  (ب)  $\cos\left(\frac{29\pi}{3}\right)$  (ج)  $\text{tg}(300^\circ)$  (د)  $\text{Cotg}\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

(ب)  $\cos\left(\frac{29\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{30\pi - \pi}{3}\right) = \cos\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) = +\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$د) \operatorname{Cotg}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \operatorname{Cotg}\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) = \operatorname{Cotg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{Cotg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

۱۰- حاصل  $\cos(-240^\circ) + 2\operatorname{Cotg}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right) - \sin^2 135^\circ$  را به دست آورید.

$$\cos(-240^\circ) = \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Cotg}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right) = \operatorname{Cotg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{Cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{Cotg}\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 135^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(-240^\circ) + 2\operatorname{Cotg}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right) - \sin^2 135^\circ = -\frac{1}{2} + 2(-1) - \frac{1}{2} = -3$$

۱۱- هرگاه  $\operatorname{Cotg} 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ ، حاصل کسر  $\frac{3\sin 75^\circ + 2\sin 105^\circ}{\cos 165^\circ - \cos 255^\circ}$  را حساب کنید.

$$p = \frac{3\sin(90^\circ - 15^\circ) + 2\sin(90^\circ + 15^\circ)}{\cos(180^\circ - 15^\circ) - \cos(270^\circ - 15^\circ)} = \frac{3\cos 15^\circ + 2\cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ + \sin 15^\circ} = \frac{5\cos 15^\circ}{-\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}$$

$$= \frac{5\operatorname{Cotg} 15^\circ}{-\operatorname{Cotg} 15^\circ + 1} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{-(2 + \sqrt{3}) + 1} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{-1 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{5(2 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})}{(-1 - \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})} = \frac{5(\sqrt{3} + 1)}{1 - 3} = \frac{-5}{2}(\sqrt{3} + 1)$$

۱۲- درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\sin(-135^\circ) = \sin(-45^\circ)\cos(-90^\circ) + \cos(-45^\circ)\sin(-90^\circ)$$

$$\text{سمت راست} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (0) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1) = 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{سمت چپ} = \sin(-135^\circ) = -\sin 135^\circ = -\sin(90^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۳- عبارت مقابل را برحسب نسبت‌های مثلثاتی  $a$  بنویسید.

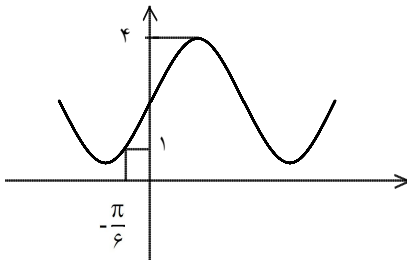
$$\cos(a - 270^\circ)$$

$$\cos(270^\circ - a) = \cos(180^\circ + (90^\circ - a)) = -\cos(90^\circ - a) = -\sin a$$

۱۴- اگر  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه دوم مثلثاتی باشد آن‌گاه حاصل  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$  را بیابید.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{3}$$

۱۵- اگر نمودار تابع  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  به صورت زیر باشد، مقدار تابع به ازای  $x = \frac{17\pi}{3}$  را حساب کنید.



از آنجا که  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ ، بنابراین تابع را به صورت  $y = a + b \sin x$  می‌نویسیم و در  $y = 4$  تابع در بالاترین نقطه قرار دارد. بنابراین  $x$  آن نقطه  $\frac{\pi}{2}$  است. در نتیجه تابع از دو نقطه  $A$  و  $B$  می‌گذرد.

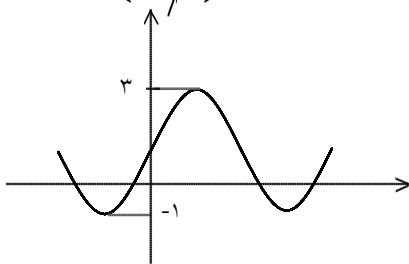
$$A \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \\ 4 \end{array} \right. \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \Rightarrow a + b = 4 \quad (1)$$

$$B \left| \begin{array}{l} -\frac{\pi}{6} \\ 1 \end{array} \right. \Rightarrow a + b \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow a - \frac{b}{2} = 1 \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a - \frac{b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}b = 3 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$y = 2 + 2 \sin x \xrightarrow{x = \frac{17\pi}{3}} y = 2 + 2 \sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \Rightarrow y = 2 + 2 \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2 + 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = 2 - \sqrt{3}$$



۱۶- اگر نمودار  $y = a + b \sin x$  به صورت زیر باشد. الف) مقدار  $a, b$  را حساب کنید.

ب) مقدار تابع به ازای  $x = \frac{\pi}{4}$  را به دست آورید.

الف) از آنجا که ماکزیمم تابع برای  $x = \frac{\pi}{2}$  و مینیمم تابع برای  $x = -\frac{\pi}{2}$  است، بنابراین برای مختصات دو نقطه

$$A \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \\ 3 \end{array} \right. \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \Rightarrow a + b = 3 \quad (1)$$

$$B \left| \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \\ -1 \end{array} \right. \Rightarrow a + b \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow a - b = -1 \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow y = 1 + 2 \sin x$$

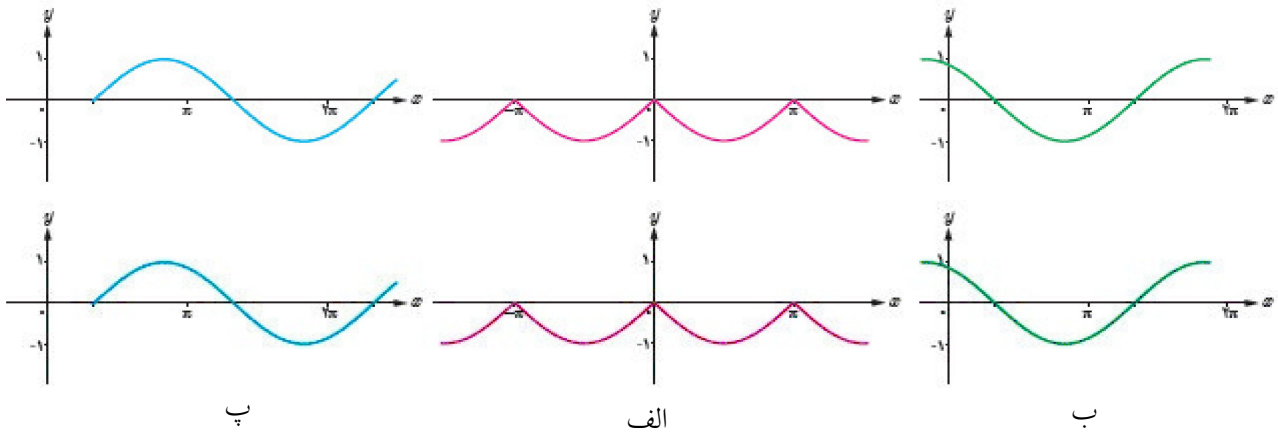
داریم:

$$y = 1 + 2 \sin x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} y = 1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 1 + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{ب})$$

$$\Rightarrow y = 1 + \sqrt{2}$$

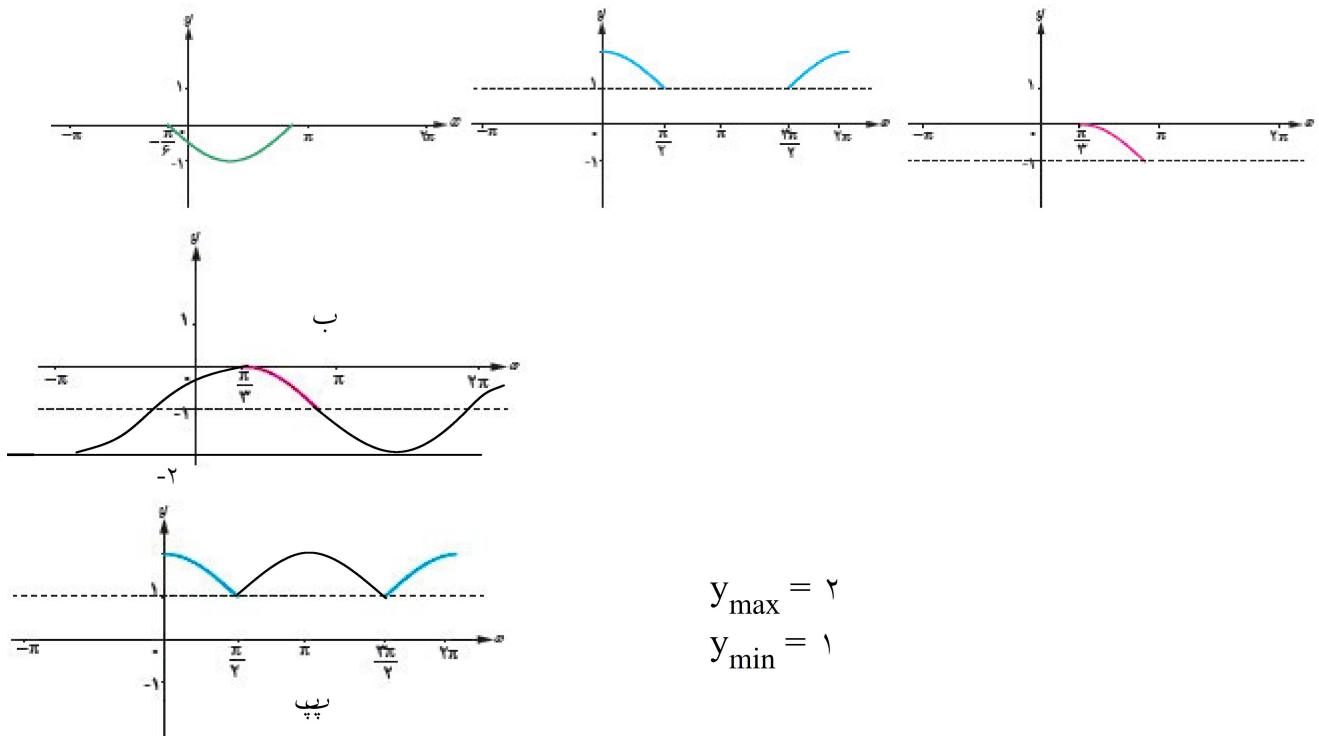
۱۷- توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف)  $y = -|\sin x|$       ب)  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$       پ)  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$



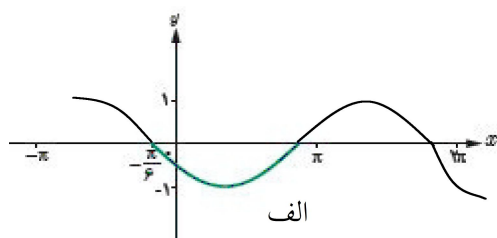
۱۸- در هریک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

الف)  $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$       ب)  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$       پ)  $y = 1 + |\cos x|$



$$y_{\max} = 2$$

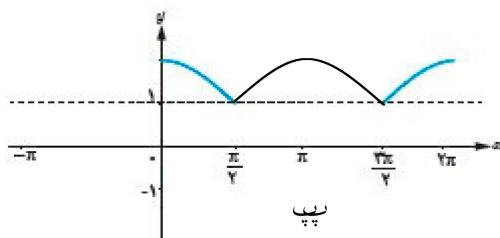
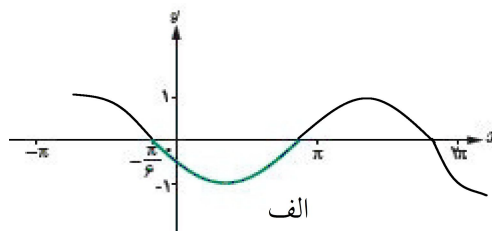
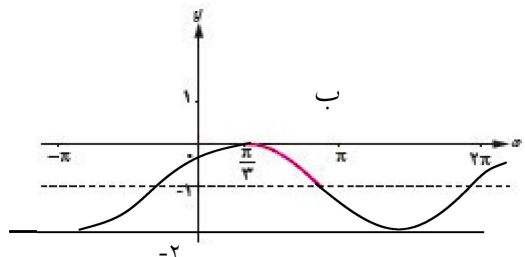
$$y_{\min} = 1$$



$$y_{\max} = 1$$

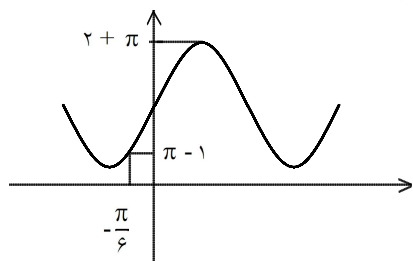
$$y_{\min} = -1$$

۱۹- با توجه به نمودارهای زیر، کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در بازه  $(0, \pi)$  یک به یک است؟



هیچ کدام از نمودارها یک به یک نیستند.

۲۰- اگر نمودار  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  به صورت زیر باشد مقدار تابع به ازای  $x = \frac{5\pi}{6}$  را حساب کنید.



از آنجا که  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$  است، ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم.

در نقطه‌ای که  $y$  تابع  $\pi + 2$  شده است بالاترین نقطه  $\sin x$  است. بنابراین باید  $x$ ، عدد  $\frac{\pi}{2}$  را دیان باشد. در نتیجه

تابع از دو نقطه  $A$  و  $B$  می‌گذرد.

$$A \left( \frac{\pi}{2} \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 2 \Rightarrow a + b = \pi + 2 \quad (1) \right.$$

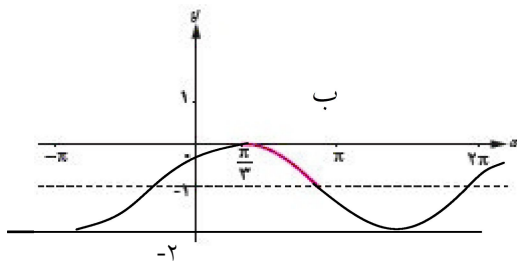
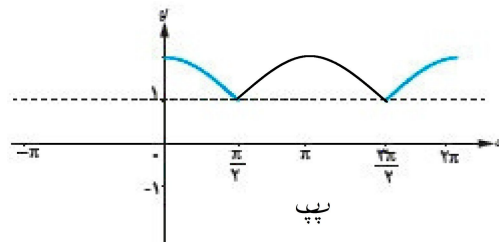
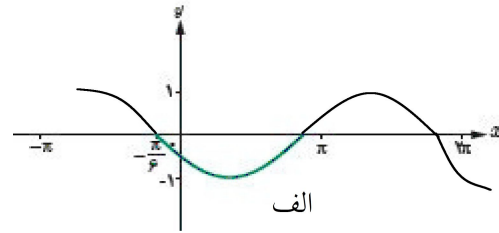
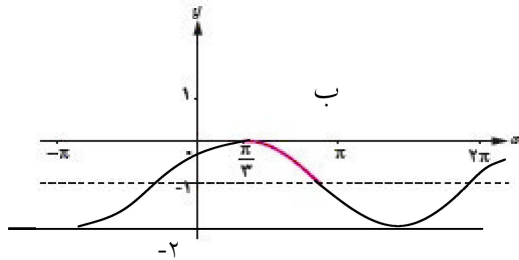
$$B \left( -\frac{\pi}{6} \Rightarrow a + b \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi - 1 \Rightarrow a - \frac{b}{2} = \pi - 1 \quad (2) \right.$$

$$\begin{cases} a + b = \pi + 2 \\ a - \frac{b}{2} = \pi - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3b}{2} = 3 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = \pi$$

$$y = \pi + 2 \sin x \xrightarrow{x = \frac{5\pi}{6}} y = \pi + 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \pi + 2 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

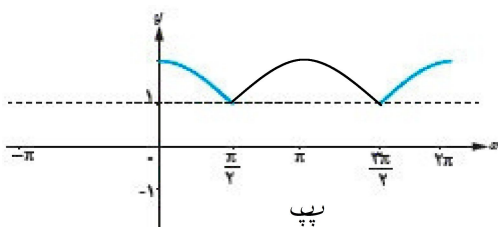
$$= \pi + 2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi + 1$$

۲۱- با توجه به نمودارهای زیر، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در چه نقاطی رخ می‌دهد؟



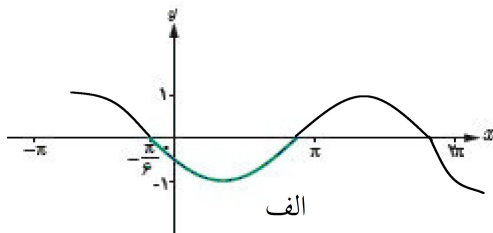
$$y_{\max} = 0$$

$$y_{\min} = -2$$



$$y_{\max} = 2$$

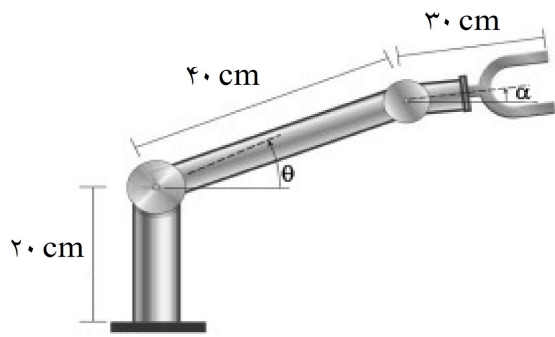
$$y_{\min} = 0$$



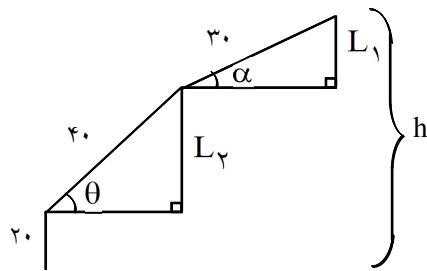
$$y_{\max} = 1$$

$$y_{\min} = -1$$

۲۲- ارتفاع نوک گیره روبات زیر را از سطح زمین براساس تابعی از  $\theta$  و  $\alpha$  مدلسازی کنید.



$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\sin \alpha = \frac{L_1}{30} \Rightarrow L_1 = 30 \sin \alpha$$

$$\sin \theta = \frac{L_2}{40} \Rightarrow L_2 = 40 \sin \theta$$

$$h = 20 + L_2 + L_1$$

$$h = 20 + 40 \sin \theta + 30 \sin \alpha$$

۲۳- نمودار تابع  $y = [\sin x] + [\cos x]$  را در بازی  $[0, 2\pi]$  رسم کنید.

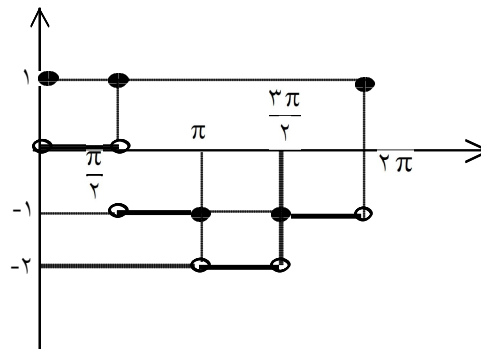
$$0 < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \rightarrow y = 0 - 1 = -1$$

$$\pi < x < \frac{3\pi}{2} \rightarrow y = -1 - 1 = -2$$

$$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \rightarrow y = -1 + 0 = -1$$

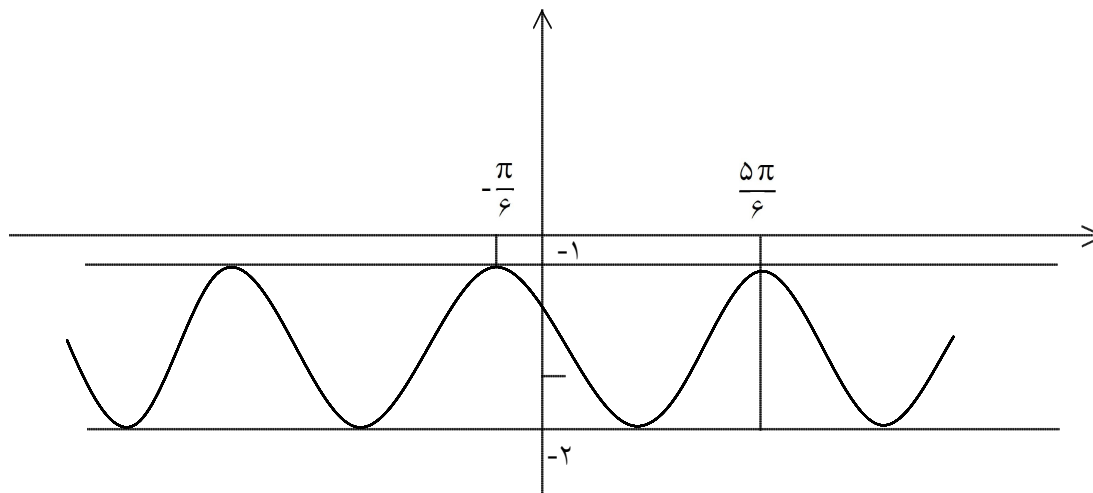
$$x = 0 \text{ و } \frac{\pi}{2} \text{ و } 2\pi \rightarrow y = 1$$



$$x = \pi \text{ و } \frac{3\pi}{2} \rightarrow y = -1$$

۲۴- تابع زیر را با استفاده از نمودار  $y = \sin x$  یا  $y = \cos x$  و آنچه در مورد انتقال می‌دانید، رسم کنید:

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$$

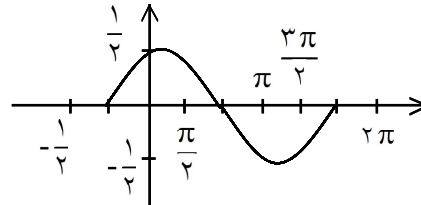




۲۵- اگر باشد، مقدار  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$  را حساب کنید.

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = -2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

۲۶- نمودار تابع  $y = \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  را در بازه‌ای به طول  $2\pi$  رسم کنید.



۲۷- در تابع  $f(x) = 4 \cos(19\pi + x) - 1$ ، مقدار تابع به ازای  $x = \frac{11\pi}{4}$  را حساب کنید.

$$f(x) = 4 \cos(19\pi + x) - 1 \Rightarrow f(x) = -4 \cos(x) - 1 \Rightarrow f\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -4 \cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) - 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{11\pi}{4}\right) = -4 \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = -4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = 2\sqrt{2} - 1$$

۲۸- فرض کنید  $\alpha = \frac{3}{4}$ ،  $\text{tg } \beta = \frac{5}{12}$  و  $\alpha$  و  $\beta$  حاده باشند، عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

$$\sin(\alpha + \beta), \quad \cos(\alpha + \beta), \quad \sin(\alpha - \beta), \quad \cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{16}{25} \rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{33}{65}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{16}{65}$$

۲۹- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو زاویه‌ی حاده باشند، داریم:  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  و  $\sin \beta = \frac{4}{17}$ ، عبارتهای زیر را ساده کنید.

$$\sin 2\alpha, \quad \cos 2\alpha, \quad \text{tg } 2\alpha, \quad \sin 2\beta, \quad \cos 2\beta, \quad \text{tg } 2\beta$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin\beta = \frac{8}{17}, \quad \cos\beta = \frac{15}{17}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{8}{15}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{24}{7}$$

$$\sin 2\beta = 2 \sin\beta \cos\beta = 2 \times \frac{8}{17} \times \frac{15}{17} = \frac{240}{289}$$

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \frac{225}{289} - \frac{64}{289} = \frac{161}{289}$$

۳۰-  $\sin 3\theta$  را بر حسب  $\sin \theta$  بنویسید.

$$\sin 3\theta = \sin (2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \cdot \sin\theta$$

$$= 2 \sin\theta \cos\theta \cdot \cos\theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot \sin\theta$$

$$= 2 \sin\theta (1 - \sin^2 \theta) + (1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot \sin\theta$$

$$= 3 \sin\theta - 4 \sin^3 \theta$$

۳۱- درستی اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\sin(a+b) \cdot \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

$$\text{سمت چپ: } (\sin a \cos b + \cos a \sin b) \cdot (\sin a \cos b - \cos a \sin b)$$

$$= \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b = \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \sin^2 a) \sin^2 b$$

$$= \sin^2 a - \sin^2 b$$

۳۲- حاصل  $\tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ \tan 18^\circ$  را بیابید.

$$27^\circ + 18^\circ = 45^\circ \Rightarrow \frac{\tan 27^\circ + \tan 18^\circ}{1 - \tan 27^\circ \times \tan 18^\circ} = \tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 27^\circ + \tan 18^\circ = 1 - \tan 27^\circ \times \tan 18^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ \times \tan 18^\circ = 1$$

۳۳- اگر  $\tan(2x + 3y) = \sqrt{3} - 1$  و  $\tan(2x - 3y) = \sqrt{3} + 1$  آن‌گاه حاصل  $\tan 6y$  را بیابید.

$$\tan 6y = \tan[(2x + 3y) - (2x - 3y)]$$

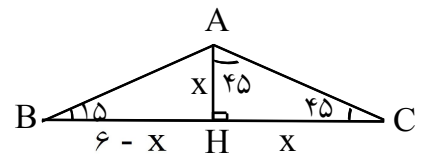
$$\tan(2x + 3y) - \tan(2x - 3y) = (\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 1)$$

$$= \frac{-2}{1+3-1} = -\frac{2}{3}$$

۳۴- اگر  $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a$  آن‌گاه مقدار  $\cos 2x$  را بر حسب  $a$  بیابید.

۳۵- در مثلث  $ABC$  اگر  $BC = 6$  و  $\hat{B} = 15^\circ$  و  $\hat{C} = 135^\circ$  باشد، اندازه‌ی ارتفاع  $AH$  چه قدر است؟

$$\tan 15^\circ = \frac{x}{6-x} = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$$



$$\Rightarrow \frac{x}{6-x} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow 3x + \sqrt{3}x = -3x + \sqrt{3}x + 18 - 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 6x = 18 - 6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = 3 - \sqrt{3}$$

۳۶- فرض کنید  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  و  $\cos \beta = \frac{-12}{13}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع اول و انتهای کمان  $\beta$  در ربع دوم قرار دارد.

مطلوبست محاسبه‌ی عددی  $\sin(\alpha + \beta)$  و  $\cos(\alpha - \beta)$ .

$$\alpha \text{ حاده, } \cos \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\beta \text{ منفرجه, } \cos \beta = \frac{-12}{13} \Rightarrow \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin \beta = \pm \frac{5}{13}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{3}{5} \times \left(\frac{-12}{13}\right) + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{-36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{-16}{65}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \left(\frac{-12}{13}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{-33}{65}$$

۳۷- زاویه‌ای حاده و  $\beta$  زاویه‌ای منفرجه است و  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  و  $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  مقدار  $\cos(\alpha - \beta)$  را محاسبه کنید.

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (0/25),$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0/25) \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \underbrace{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}_{(0/25)} = -\frac{\sqrt{2}}{10} \quad (0/25)$$

۳۸- فرض کنید  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$  و  $\alpha$  زاویه‌ای منفرجه باشد، عبارت  $\cos 2\alpha$  را محاسبه کنید.

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(0/25)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(0/25)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(0/25)}$$

$$\cos 2\alpha = \underbrace{2 \cos^2 \alpha - 1}_{(0/25)} = 2 \times \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^2}_{(0/25)} - 1 = \frac{3}{5}$$

(با توجه به این که در سؤال در اثر اشکال تایپی به جای  $-\frac{1}{3}$  عدد  $\frac{1}{3}$  تایپ شده است، در زمان تصحیح چنانچه

داوطلب با  $\frac{1}{3}$  حل نموده است، نمره کامل منظور گردد.) صفحات ۳۶ و ۳۷

۳۹- درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left( \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (0/25) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) \quad (0/25)$$

۴۰- درستی برابری زیر را ثابت کنید.

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\text{طرف چپ: } \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$