آمارواحتمال یازدهم ریاضی

شامل:
نمونه سوال و درسنامه مختصر

تهیه و تنظیم:
فاطمه سرایی

تعاریف فصل ۱ درس اول

❖**تعریف گزاره** : گزاره جمله ای خبری است به طوری که بتوان دقیق و بدون ابهام ارزش درستی یا نادرستی آن را مشخص کرد، هرچند در حال حاضر نتوان ارزش آن را تعیین کرد.

جملاتی که کامل نیستند و جمله های پرسشی ، امری و عاطفی و بیان کننده احساسات گزاره محسوب نمیشوند.

❖**تعریف حدس یا انگاره:**گزاره ای است که ارزش درستی یا نادرستی آن در حال حاضرمعلوم نیست و تاکنون کسی نه این گزاره را ثابت کرده و نه رد کرده است(به عبارت دیگر مثال نقضی برای آن پیدا نشده است)

❖**تعریف گزاره نما**: هر جمله خبری که شامل یک یا چندمتغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره نما نامیده می شود. گزاره نماها را بر حسب تعداد متغیرهای به کاررفته در آن ها، یک متغیره، دومتغیره و .... می نامند.

❖**نقیض یک گزاره:** عبارت است از ساختن یک گزاره جدیدی که ارزش آن دقیقا مخالف ارزش گزاره اصلی باشد نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می دهند.

❖**دو گزاره هم ارز:** دو گزاره q, p را هم ارز منطقی (هم ارزش) می گوییم هرگاه ستون مربوط به هر کدام از این دو گزاره در جدول ارزش درستی یکسان باشد.

🕮 مثال : کدام جمله یک گزاره نیست؟

۱)در پرتاب یک تاس سالم احتمال آنکه عدد ظاهر شده مضرب ۳ باشد برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۲)ای کاش میتوانستم در یک هوای پاک زندگی کنم. ۳)هرمعادله درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی است

۴)هرعددزوج بزرگ تر از ۲ را میتوان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

مثال : کدام یک از گزینه ها گزاره نما نیست؟

۱) a عددی زوج است. ۲) در پرتاب یک تاس؛ احتمال رخداد پیشامد A برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۳) همه اعداد اول فرد هستند. ۴)حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر ۶ است.

گزاره های مرکب

۱-**ترکیب عطفی**: برای دو گزاره دلخواه q, p گزاره مرکب $(p$ و $q)$ را ترکیب عطفی میگوییم و با نماد $p \wedge q$ نمایش میدهیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی درست است که هردو درست باشند.

p	q	$p\wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

۲-**ترکیب فصلی**: برای دو گزاره دلخواه q, p گزاره مرکب $(p$ یا $q)$ را ترکیب فصلی میگوییم و با نماد $p \vee q$ نمایش میدهیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی نادرست است که هردو نادرست باشند.

p	q	$p\vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال : ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید

۱)۳ عددی فرد است و $\sqrt{۵}$ عددی گویا است.

۲) خورشید به دور زمین می چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

۳)۷ عددی اول است و $a \in \{a,b,c\}$

۴)پاریس پایتخت انگلستان است یا تهران پایتخت ایران است.

۵) $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست.

۶)عدد π گویا است یا در مستطیل دو قطر برهم عمودند.

مثال : ارزش کدام گزاره مرکب درست است؟

۱) $(۲<۳)\wedge(۴+۳=۱۰)$

۲) $(۵>۳)\vee(x^۲+۱=۰)$

۳) $\left(\frac{۱}{۲}\neq\frac{۳}{۶}\right)\vee\left(۱\in\{۲,۳,۴\}\right)$

۴) $\left(\sqrt{۲}\notin R\right)\wedge\left(\{۱\}\subseteq\{۱,۲,۳\}\right)$

مثال : اگر گزاره $\sim p\vee q$ یک گزاره نادرست باشد، ارزش کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

۱) q ۲) p ۳) $p\vee q$ ۴) $p\vee\sim q$

مثال : اگر $\sim p\wedge q$ گزاره ای درست باشد، کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

۱) $p\vee\sim q$ ۲) $p\wedge q$ ۳) $p\vee q$ ۴) $p\wedge\sim q$

مثال : هرگاه ارزش گزاره $p\vee q$ درست و ارزش q نادرست باشد، در مورد ارزش گزاره P چه می توان گفت؟

۳- **ترکیب شرطی**: برای دو گزاره دلخواه q, p گزاره مرکب (اگر p آنگاه q) را ترکیب فصلی میگوییم و با نماد $p \Rightarrow q$ نمایش میدهیم. p را **مقدم** و q را **تالی** مینامیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نکته: اگر **مقدم نادرست** باشد(□ $\Rightarrow$ ن)ارزش این ترکیب شرطی همواره درست است. در این حالت میگوییم به **انتفای مقدم** درست است.

نکته ۲: اگر تالی درست باشد ارزش ترکیب شرطی همواره درست است. یعنی $P \Rightarrow$ د همواره درست است.

مثال : اگر عکس گزاره $q \Rightarrow p$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره نادرست است؟

۱) $q \Rightarrow q$ ۲) $\sim p \vee q$ ۳) $p \wedge \sim q$ ۴) $\sim p \Rightarrow q$

تبدیل یک گزاره شرطی به ترکیب فصلی

$$\boxed{p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q}$$

مثال : با جدول نشان دهید $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

📖 مثال: گزاره $p \vee \left(\sim \left(p \wedge q\right) \wedge \sim p\right)$ با کدام گزاره هم ارز است؟

۱) p ۲) $p \vee q$ ۳) $\sim q \vee p$ ۴)همواره درست است.

📖 مثال: گزاره $\left(\sim q \wedge p\right) \Rightarrow p$ معادل با کدام است؟

۱) p ۲) $\sim p$ ۳) q ۴)همواره درست است.

📖 مثال : <u>به کمک جدول</u> ارزش گزاره ها نشان دهید گزاره زیر همواره درست است. $p \Rightarrow \left[\left(q \Rightarrow p\right) \wedge \left(\sim q \Rightarrow p\right)\right]$

📖 مثال : <u>به کمک جدول</u>، ارزش گزاره $p \wedge \left[\left(p \Rightarrow q\right) \wedge \sim q\right]$ را مشخص کنید.

📖 مثال : <u>بدون استفاده از جدول</u> و با کمک ویژگی ها هم ارزش مقابل را ثابت کنید.

$$p \Rightarrow \left(q \wedge r\right) \equiv \left(\sim q \Rightarrow \sim p\right) \wedge \left(\sim r \Rightarrow \sim p\right)$$

مثال : اگر ارزش گزاره $p \Rightarrow \left[\sim q \Rightarrow \left(r \Rightarrow q\right)\right]$ درست و ارزش گزاره q نادرست باشد، ارزش گزاره $p \Rightarrow \sim r$ را با ذکر دلیل بیان کنید.

مثال : هرگاه $q, \sim p$ نادرست باشند، باذکر دلیل و بدون استفاده از جدول ارزش گزاره $\sim\left(p \Rightarrow q\right) \vee \left(p \wedge q\right)$ را تعیین کنید

مثال: برای سه گزاره r, q, p هم ارزی های منطقی زیر را بدون جدول ثابت کنید.

الف) $\left(p \Rightarrow r\right) \wedge \left(q \Rightarrow r\right) \equiv \left(p \vee q\right) \Rightarrow r$

ب) $p \Rightarrow \left(q \Rightarrow r\right) \equiv \left(p \Rightarrow q\right) \Rightarrow \left(p \Rightarrow r\right)$

پ) $\left[\left(p \Rightarrow r\right) \wedge \left(q \Rightarrow r\right)\right] \wedge r \equiv r$

مثال : اگر q و p دو گزاره باشند ارزش گزاره $p \Longrightarrow (p \land \sim q)$ کدام است؟

۱) T ۲) F ۳) T است اگر P درست باشد ۴) F است اگر P درست باشد

مثال : اگر گزاره $X \Leftrightarrow \left[(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)\right]$ همواره درست باشد، گزاره X کدام است؟

۱) p ۲) q ۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

مثال: کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

۱) $(۲+۱=۴) \vee (۵>۱۳)$ ۲) $۲<۳ \Rightarrow -۴<-۶$

۳) اگر ۴ فرد است آنگاه مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ است و برعکس

۴) $۳<۵ \Rightarrow ۴ \in \{۱,۲,۳\}$

عکس یک ترکیب شرطی : گزاره $q \Rightarrow p$ را عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ می گوییم. یعنی برای عکس ترکیب شرطی کافی است جای مقدم و تالی را عوض کنیم.

ارزش عکس یک ترکیب شرطی ربطی به ارزش ترکیب شرطی ندارد.

نقیض یک ترکیب شرطی: برای هر دو گزاره دلخواه q, p نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ عبارت است از $p \wedge \sim q$

$$\boxed{\sim\left(p \Rightarrow q\right) \equiv p \wedge \sim q}$$

📖 مثال : با جدول نشان دهید: $\sim\left(p \Rightarrow q\right) \equiv p \wedge \sim q$

📖 مثال : نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

۱) عدد ۴ فرد است و ۳ عددی اول است.

۲) قطرهای مستطیل برابرند یا π عددی گویاست.

📖 مثال : اگر q و p دو گزاره باشند، گزاره $\sim\left(q \vee \sim p\right)$ هم ارز با کدام یک از گزاره ی زیر است؟

۱) $p \wedge q$ ۲) $\sim p \Rightarrow \sim q$ ۳) $p \wedge \sim q$ ۴) $\sim p \wedge q$

عکس نقیض یک ترکیب شرطی: گزاره ی $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ میگوییم.

در واقع میتوان نشان داد که هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم ارز است.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

مثال : با جدول نشان دهید: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

مثال : عکس نقیض گزاره ی "اگر او متدین باشد، آنگاه درستکار است." کدام گزینه است؟

۱)اگر او درستکار باشد، آنگاه او متدین است. ۲)اگر او متدین نباشد، آنگاه او درستکار نیست.

۳) اگر او درستکار نباشد، آنگاه او متدین نیست. ۴) او درستکار نیست ولی او متدین است.

مثال : اگر q و p دو گزاره باشند، عکس نقیض گزاره $\sim q \Rightarrow p$ با کدام یک از گزاره های زیر هم ارزاست؟

۱) $\sim(p \vee q)$ ۲) $p \Rightarrow q$ ۳) $p \vee \sim q$ ۴) $\sim p \Rightarrow q$

ترکیب دو شرطی: برای هر دو گزاره دلخواه q, p ، ترکیب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را ترکیب دو شرطی می‌نامیم و با نماد $p \Leftrightarrow q$ نشان میدهیم. $\boxed{p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$

ارزش آن وقتی درست است که هر دوطرف $\Leftrightarrow$ دارای ارزش یکسان باشند. یعنی اگر دو طرف $\Leftrightarrow$ ارزش متفاوت داشته باشند نادرست است.

برای اثبات درستی گزاره $p \Leftrightarrow q$ کافی است نشان دهیم $p \equiv q$. در این صورت گزاره درست دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ را قضیه دوشرطی مینامیم.

مثال : با جدول نشان دهید: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

مثال : جدول زیر قسمتی از یک جدول ارزش گزاره ها را نشان می دهد. گزاره X کدام می تواند باشد؟

۱) $p \vee q$

۲) $q \Rightarrow \sim p$

۳) $q \Rightarrow p$

۴) $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	X
ن		د	ن

مثال : برای سه گزاره دلخواه r, q, p **<u>بدون استفاده از جدول</u>** نشان دهید هر یک از گزاره زیر یک قضیه دوشرطی هستند. (راهنمایی: کافی است نشان دهید دو طرف هرگزاره دوشرطی هم ارز منطقی هستند.)

$$\left[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)\right] \Leftrightarrow \sim p$$

مثال : به <u>کمک جدول</u> ارزش گزاره ها نشان دهید گزاره دو شرطی زیر یک گزاره همیشه درست است.

$$\left[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)\right] \Leftrightarrow \sim p$$

صورت های مختلف بیان شرطی

درصورتی که گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، آن را به صورت های زیر بیان میکنند:

- اگر p آنگاه q وبرعکس
- اگر q آنگاه p وبرعکس
- p اگر وتنها اگر q
- q اگر وتنها اگر p
- p یک شرط لازم و کافی برای q است.
- q یک شرط لازم وکافی برای p است.
- یک شرط لازم وکافی برای q عبارت است از p
- یک شرط لازم و کافی برای p عبارت است از q

نقیض ترکیب دو شرطی:

برای دو گزاره دلخواه q, p داریم:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$
$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

مثال : به کمک جدول رابطه بالا را ثابت کنید.

سورها

❶ **سورعمومی**: گزاره ای که خاصیتی را در مورد همه عضوهای یک مجموعه بیان میکند را "گزاره کلی" یا "گزاره با سور عمومی" می گویند.

❖ اگر $p(x)$ گزاره نمایی باشد که خاصیتی را در مورد عضوهای دامنه متغیرگزاره نمای بیان میکند. گزاره ای که این خاصیت را به همه عضوهای دامنه نسبت می دهد سور عمومی نامیده می شود و به صورت زیر نمایش داده میشود.

$$\forall x: p(x)$$

و اینگونه خوانده می شود: ❈ همه x هایی که در خاصیت $p(x)$ صدق میکند.

❈ به ازای هر x ای، عبارت $p(x)$ برقرار است.

❷ **سوروجودی**: گزاره ای که خاصیتی را در مورد بعضی از عضوهای یک مجموعه بیان می‌کند را "گزاره با سور وجودی" می گویند.

❖اگر $p(x)$ گزاره نمایی باشد که خاصیتی را در مورد عضوهای دامنه متغیرگزاره نمای بیان می‌کند. گزاره ای که این خاصیت را به برخی از عضوهای دامنه نسبت می دهد سور وجودی نامیده می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\exists x: p(x)$$

و اینگونه خوانده می شود: ❖ وجود دارد x ای که در خاصیت $p(x)$ صدق میکند.

❖ به ازای بعضی مقادیر x ای، عبارت $p(x)$ برقرار است.

🕮 مثال : ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $(\exists x \in Z; x^{۲} = ۱۶) \Rightarrow (\forall x \in N; x^{۲} > ۱)$

ب) $\forall a,b \in Z; (a > b \Rightarrow a^{۲} > b^{۲})$

پ) $\forall x \in R; \tan x . \cot x = 1$

ت) $\left(\forall x \in N; x^{2} > 1\right) \Rightarrow \left(\exists x \in Z; x^{2} = 9\right)$

نقیض سورعمومی: $\sim\left(\forall x; p\left(x\right)\right) \equiv \exists x; \sim p\left(x\right)$

نقیض "همه x ها در خاصیت $p\left(x\right)$ صدق میکنند" عبارتست از "وجود دارد x که در خاصیت $p\left(x\right)$ صدق نمیکند. "

نقیض سور وجودی: $\sim\left(\exists x; p\left(x\right)\right) \equiv \forall x; \sim p\left(x\right)$

نقیض گزاره "به ازای بعضی مقادیر x عبارت $p\left(x\right)$ برقرار است." عبارت است از "به ازای هر x ای عبارت $p\left(x\right)$ برقرار نیست."

گزاره با **سورعمومی** وقتی درست است که نتوان مثال نقضی برایش پیدا کرد به عبارتی $S = D$

گزاره با **سور وجودی** وقتی درست است که بتوانیم حدااقل یک عضو از دامنه یافت که به ازای آن گزاره نما به گزاره درست تبدیل شود.

📖 مثال : ارزش گزاره زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

$$\left(\forall x \in R; x^{2} > 0\right) \Rightarrow \left(\forall x \in R; x^{2} < 0\right)$$

📖 مثال : نقیض گزاره $\forall x > 0; x^{2} > x$ را بنویسید.

📖 مثال : نقیض گزاره های زیر را بنویسید

۱)۲ عددی گویا است.

۲) $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

۳)سعدی یک ریاضی دان است.

📖 مثال : نقیض گزاره همه دانشجویان بعضی از دانشگاه های تهران باهوشند، کدام است؟

۱) همه دانشجویان همه دانشگاه های تهران باهوش نیستند.

۲) بعضی دانشجویان بعضی از دانشگاه های تهران باهوش نیستند.

۳) بعضی از دانشجویان هر دانشگاهی در تهران باهوش نیست.

۴) لا اقل یکی از دانشجویان همه دانشگاه های تهران باهوش نیست.

📖 مثال : نقیض گزاره "مریم ریاضی دان است" ، کدام گزینه نیست؟

۱)مریم ریاضی دان نیست. ۲)این طورنیست که مریم ریاضی دان است.

۳)مریم ریاضی کار نمی کند. ۴)مریم ریاضی نمی داند.

📖 مثال: نقیض گزاره زیر را بنویسید. $\left(\exists x\in Z; \frac{۱}{x-۱}\in Z\right)\vee\left(\forall x\in R; \sqrt{x}\in R\right)$

📖 مثال : نقیض گزاره سوری زیر را بنویسید. $\forall n\in N\ \exists a\in Z;\ ۱<n!\le n^n$

📖 مثال : ارزش گزاره سوری $\forall x \in R\ \exists y \in R; x+y>0$ را مشخص کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

📖 مثال : نقیض گزاره سوری $\exists x \forall y;\ p(x) \wedge \sim q(y)$ را بنویسید.

📖 مثال : گزاره سوری "عددی حقیقی وجود دارد که از هر عدد دیگر بزرگتر است" را به زبان ریاضی بنویسید.

سپس نقیض آن را بنویسید.

📖 مثال : ثابت کنید گزاره های زیر همیشه درست اند.

الف) $\forall x; p(x) \Rightarrow \exists x; p(x)$

ب) $\left[\forall x; p(x)\right] \vee \left[\forall x; q(x)\right] \Rightarrow \forall x; \left[p(x) \vee q(x)\right]$

دامنه متغیر گزاره نما: در هر گزاره نما به مجموعه مقادیری که میتوان آن ها را به جای متغیر(های) آن قرار داد تا این گزاره نما تبدیل به گزاره شود؛ دامنه متغیر گزاره نما می گویند و آن را با حرف D نمایش می دهند.

مجموعه جواب گزاره نما: در هر گزاره نما به مجموعه عضوهایی از دامنه که به ازای آنها گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره نما می گویندو آن را با حرف S نمایش میدهند. بدیهی است که $S \subseteq D$

📖 مثال: دامنه متغیر گزاره نمای $\sqrt{۲-|x|}<۱$ کدام است؟

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $[-۲,۲]$ ۴) $R-[-۲,۲]$

📖 مثال : مجموعه جواب هرکدام از گزاره نماهای زیر را با توجه به دامنه متغیر گزاره نما مشخص کنید.

۱)در پرتاب یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{۱}{۲}$ است. $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

۲) x مضرب ۷ است. $D=Z$

۳) $x^۲+۴x=۲$ $\quad D=R$

۴) در پرتاب یک تاس $P(\{x\})=\frac{۱}{۶}$ $\quad D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

۵) $x+۱>۲$ $\quad D=\{۰,۱,۲,۳\}$

۶) $\frac{۲x+۱}{۳}\leq -۱$ $\quad D=Z$

📖 مثال : خاصیت شرکت پذیری را با کمک جدول ارزش ها نشان دهید.

$$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$$
$$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$$

مثال : خاصیت توزیع پذیری (پخشی) را با کمک جدول ارزش ها نشان دهید.

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

مثال: قانون جذب و شبه جذب(همپوشانی) را با کمک جدول نشان دهید.

الف) **جذب**

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

ب) **شبه جذب**

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$
$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

مثال: **قانون دمرگان** را با جدول ارزش ثابت کنید.

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

مجموعه

تعریف مجموعه : دسته ای از اشیا معین است که بدون هیچ ابهامی می توان معلوم کرد که یک شی معین در آن قرار دارد یا نه

❖ نکات مهم :

۱) اشیایی که با هم مجموعه را تشکیل می دهند، عضو یا عضوهای آن مجموعه نامیده می شوند.

۲) در مجموعه ترتیب مهم نیست و نباید اعضای تکراری وجود داشته باشد. بنابراین :

$$\{۳,۳,۲,۲,۲,۱,۱,۱,۱\} =$$

۳) اگر A یک مجموعه باشد در صورتی که عضوی مانند x در مجموعه A وجود داشته باشد، می نویسیم : $x \in A$

و در صورتی که x متعلق به مجموعه A نباشد می نویسیم : $x \notin A$

نماد $\in$ به معنای عضویت است.

مثال: کدام یک از گزاره های زیر یک مجموعه را بیان نمی کند ؟

۱) دسته اعداد فرد طبیعی کوچکتر از عدد ۲۰ ‏ ۲) دسته اعداد اول یک رقمی

۳) دسته شامل اعداد بزرگ ‏ ۴) دسته اعداد طبیعی مربع کامل بزرگتر از عدد ۵۰

مثال: اگر $A=\{x,\{x\},\{\{y\}\}\}$ آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $x\in A$ ‏ ۲) $\{x\}\in A$ ‏ ۳) $\{y\}\in A$ ‏ ۴) $\{\{y\}\}\in A$

مثال: کدام یک از گزاره های زیر یک مجموعه را بیان نمی کند؟

۱) دسته افراد فرد طبیعی کوچکتر از عدد۲۰ ‏ ۲)دسته شامل اعداد بزرگ

۳)دسته اعداد اول یک رقمی ‏ ۴)دسته اعداد طبیعی مربع کامل بزرگتر از عدد ۵۰

تعریف مجموعه مرجع: در هر مجموعه معین، عناصری قرار می گیرند که همه آن ها عضوهای یک مجموعه به نام مرجع (عام ، جهانی) می باشند. مجموعه مرجع را با حرف U نشان می دهیم.

❖ معمولاً مجموعه مرجع را با مستطیل و سایر مجموعه های داخل مجموعه مرجع را با دایره یا بیضی نمایش می دهیم.

مثال: اگر مجموعه مرجع را اعداد طبیعی فرض کنیم، متمم مجموعه $A=\{x\in N; x^{2}<3^{x}\}$ چند عضو دارد؟

۱)۱ ‏ ۲)۲ ‏ ۳)۳ ‏ ۴)صفر

تعریف مجموعه تهی : مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی نام دارد.

و با نماد $\varnothing$ نمایش داده میشود. بنابراین : $\varnothing = \{\ \}$

مثال: کدام مجموعه تهی است؟

۱) $A=\{x\in Z; x^{۲}=۴, ۳x=۶\}$ ۲) $B=\{x\in Z; x+۵=۵\}$

۳) $C=\{x\in Z; x>۳, ۲^{x}<۱۰\}$ ۴) $D=\{x\in N; x^{۲}=۸x\}$

روش های مشخص کردن یک مجموعه : معمولاً به یکی از دو روش زیر عمل می کنیم:

- نام بردن (فهرست کردن) اعضای مجموعه
- معرفی خاصیت مشترک عضوهای مجموعه با زبان ریاضی (گزاره نما) توجه شود که در این روش باید مجموعه مرجع مشخص باشد.

مثال: هریک از مجموعه های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

۴) $B=\{n\in Z \mid n^{۳}=n\}$ ۳) $A=\{x\in Z \mid |x|\le ۲\}$

۶) $D=\{a\in S \mid$ فضای نمونه ای پرتاب یک تاس است $S\}$ ۵) $C=\{x\in R \mid x^{۳}-x=۰\}$

۸) $F=\left\{\dfrac{x^{۲}+۴}{۳x+۲}\in Z \mid x\in N,\ x<۵\right\}$ ۷) $E=\{۲^{x}\times ۳^{y} \mid x,y\in N,\ x+y=۵\}$

$9)\, G=\{x\in \mathrm{Z} \mid x^2-12x+35=0 \vee x^2\leq 10\}$ $\qquad$ $10)\, H=\{x\in \mathrm{N} \mid x^3+1=0\}$

مثال: اگر $A=\{a,\{a\},\{\{b\}\}\}$ آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\{a\}\in A$ $\qquad$ ۲) $a\in A$ $\qquad$ ۳) $\{b\}\in A$ $\qquad$ ۴) $\{\{b\}\}\in A$

مثال: مجموع تمام عضوهای مجموعه $A=\{k^2+1\,;\, k\in N, k<5\}$ کدام است؟

۱) ۳۴ $\qquad$ ۲) ۳۵ $\qquad$ ۳) ۳۶ $\qquad$ ۴) ۳۷

مثال: هر یک از مجموعه های زیر را به صورت گزاره نما (به زبان ریاضی) نمایش دهید.

$14)\, B=\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$ $\qquad$ $13)\, A=\{-8,-1,0,1,8,27,\ldots\}$

مثال: هر یک از مجموعه های زیر را به صورت گزاره نما نشان دهید.

$A=\{-1,0,1,8,27,\ldots\}$ $\qquad$ $B=\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

📖 مثال: دو مجموعه $A=\{x\in Z \mid |x|\le ۳\}$, $B=\{\ \{۱,۲\}\ ,\ \{-۳\}\ ,\ ۳\}$ مفروضند. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را مشخص کنید.

۱) $\{۲\}\in A$ ۲) $\{۳\}\in A$ ۳) $۳\in B$

۴) $\{۱,۲\}\in B$ ۵) $-۳\in B$ ۶) $-۲\in A$

زیرمجموعه: مجموعه A را یک زیرمجموعه B مینامیم اگر وتنها اگر هر عضوی از A، عضوی از B باشد که در این صورت می نویسیم: $A\subseteq B$ پس: $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x\in A \Rightarrow x\in B)$

❖ چنانچه عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو متعلق به مجموعه B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه B نیست و مینویسیم $A\not\subseteq B$ پس: $A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x\in A \wedge x\notin B)$

📖 مثال: اگر $A=\{x,\{x\},\{x,\{x\}\}\}$ کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست است؟(باذکر دلیل)

الف) $\{x\}\subseteq A$ ب) $\{\{x\}\}\in A$

📖 مثال: اگر $A=\{۲\}$ و $B=\{۲,\{۲\}\}$ و $C=\{\{۲\},\{۲,\{۲\}\}\}$ سه مجموعه باشند، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $B\subseteq C$ ۲) $A\subseteq B$ ۳) $A\in B$ ۴) $B\in C$

📖 مثال: اگر $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,\{a,b\}\}$, $C=\{a,b,\{b\},\{a,b\}\}$ کدام گزینه درست است؟

$A\in B$ $\qquad$ $A\subseteq B$ $\qquad$ $A\in C$ $\qquad$ $B\in C$

📖 مثال: فرض کنید $A=\{۱,۲,...,۹\}$, $B=\{۲,۴,۶,۸\}$, $C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$, $D=\{۳,۴,۵\}$, $E=\{۳,۵\}$ در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید X می تواند کدام یک از این مجموعه ها باشد؟

X,B عضو مشترکی ندارند. $\qquad$ $X\subseteq A$ ولی $X\subseteq C$

$X\subseteq D$ ولی $X\not\subseteq B$ $\qquad$ $X\subseteq C$ ولی $X\not\subseteq A$

📖 مثال: مجموعه های B, A را طوری مشخص کنید که:

الف) $A\subseteq B, A\in B$

ب) $A\subseteq B, A\notin B$

پ) $A\not\subseteq B, A\in B$

📖 مثال: کدام گزاره نادرست است؟

$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$ $\qquad$ $\varnothing=\{\varnothing\}$ $\qquad$ $\varnothing\in\{\varnothing\}$ $\qquad$ $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$

تعریف **دو مجموعه مساوی**: دو مجموعه B, A با مرجع U را مساوی می‌گوییم اگر و تنها اگر هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد. به عبارت دیگر :

$$A = B \Leftrightarrow \left[\forall x; \left(x \in A \Leftrightarrow x \in B\right)\right]$$
$$A = B \Leftrightarrow \left[\left(A \subseteq B\right) \wedge \left(B \subseteq A\right)\right]$$

مثال: فرض کنید $A = \{۱,۲\}$ با ذکر دلیل توضیح دهید کدام یک از مجموعه های زیر با مجموعه A مساوی است؟

$\{x \in Q | x^۲ - ۳x + ۲ = ۰\}$ $\{x \in R | ۱ \le x \le ۲\}$ $\{x \in Q | ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰\}$ $\{x \in N | ۱ \le x \le ۲\}$

مثال: اگر $A = \{۲, x + ۲y, ۴\}, B = \{۴, ۵, x - y\}, A = B$ در این صورت دوتایی (x, y) کدام است؟

$(۲,۱)$ $(۲,۳)$ $(۱,۳)$ $(۳,۱)$

مثال: اگر $A = \{۲, x + ۲y, ۴\}$, $B = \{۴, ۵, x - y\}$, $A = B$. در این صورت دوتایی (x, y) کدام است؟

۱) $(۲,۱)$ ۲) $(۲,۳)$ ۳) $(۱,۳)$ ۴) $(۳,۱)$

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه:

❖ اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه های A برابر است با : ۲^n

❖اگر از زیر مجموعه های یک مجموعه ، خود مجموعه را کنار بگذاریم، سایر زیرمجموعه ها را زیرمجموعه محض یا سَره آن مجموعه می‌گوییم.

🕮 مثال: مجموعه $A=\{a,\{a\},\varnothing\}$ چند زیر مجموعه دارد؟ تمام آن‌ها را بنویسید.

🕮 مثال: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه های $(k+۳)$ عضوی ۵۶ واحد بیشتر از زیرمجموعه های یک مجموعه k عضوی است. k را بیابید.

🕮 مثال: اگر ۲ عضو به اعضای مجموعه A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن ۴۸ واحد افزایش می یابد. در این صورت مجموعه A دارای چند زیر مجموعه سره ناتهی است؟

📖 مثال: اگر تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $۲k$ عضوی، ۴۸ واحد کمتر از تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $۳k$ عضوی باشد، آنگاه برای k چند جواب وجود دارد؟

📖 مثال: اگر ۲ عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود. مجموعه A چند زیر مجموعه دارد؟

📖 مثال: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر با $۸^{۳n-۸}$ است. تعداد زیر مجموعه های محض مجموعه $n+۲$ عضوی را بیابید.؟

📖 مثال: مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعه شامل عضو a و فاقد عضو b دارد؟

۳۲ ۶۲ ۱۶ ۱۴

مجموعه توانی: مجموعه همه زیرمجموعه های مجموعه A را ، مجموعه توانی A مینامیم

و با $P(A)$ نمایش می‌دهیم: $P(A)=\{X \mid X \subseteq A\}$

❖ واضح است که اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، در این صورت $P(A)$ دارای ۲^n عضو است.

❖ نتیجه: $X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$

🕮 مثال: اگر $A=\{a,b\}$ مجموعه $P(P(A))$ چند عضو دارد؟

🕮 مثال: مجموعه های $A=\{\varnothing,\{\varnothing,۳\}\}, B=\{\varnothing,۳\}$ مفروض اند

الف) مجموعه $A \cap B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید ب) مجموعه توانی A را بنویسید

🕮 مثال: اگر $A=\{\varnothing,۳\}, B=\{\varnothing,\{\varnothing,۳\}\}$ ، آنگاه مجموعه $P(A \cup B)$ دارای چند زیرمجموعه دارد؟

❖ اجتماع و اشتراک تعدادی مجموعه با الگویی خاص:

$$\bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n \qquad \bigcap_{i=۱}^{n} A_i = A_۱ \cap A_۲ \cap \ldots \cap A_n$$

📖 مثال: اگر $A_i = [-i, ۱۰-i]$ و $i \in \{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$ آنگاه مجموعه های $\bigcup_{i=۱}^{۱۰} A_i , \bigcap_{i=۱}^{۱۰} A_i$ را مشخص کنید.

📖 مثال: اگر $A_n = (-n, n)$, $n \in N$ آنگاه $\bigcup_{i=۱}^{۶} A_i , \bigcap_{i=۱}^{۶} A_i$ را مشخص کنید.

📖 مثال: اگر $i \in \{۱,۲,۳,\ldots,۹\}$, $A_i = \left[-i, \frac{۹-i}{۲}\right]$، آنگاه مجموعه $(A_۴ \cap A_۵)$ را مشخص کنید.

افراز یک مجموعه

بخش بندی یک مجموعه به زیر مجموعه های ناتهی، که دو به دو با هم اشتراک ندارند واجتماع همه آنها برابر با مجموعه اولیه است، افراز یک مجموعه است.

فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی است و $A_۱, A_۲, ..., A_n$ زیر مجموعه های A باشند در این صورت میگوییم A به n زیر مجموعهٔ $A_۱, A_۲, ..., A_n$ افراز شده است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) $\forall i \;\; ۱ \le i \le n : A_i \neq \varnothing$

۲) $\forall i, j \;\; \left(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing\right)$

۳) $A_۱ \cup A_۲ \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$

📖 مثال: فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ باشد، کدام یک از موارد زیر یک افراز برای مجموعه A نیست؟

۱) $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}$ ۲) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

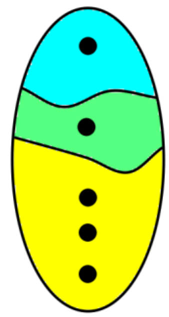
۳) $\{a, b, e, g\}, \{c\}, \{d, f\}$ ۴) $\{a, e, g\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}$

❖ **نکته** : برای یافتن تمام افرازهای یک مجموعه n عضوی، کافی است افرازهای یک مجموعه ای(یک بخشی) افرازهای دو مجموعه ای (دوبخشی) و .... و افرازهای n عضوی آن مجموعه رابیابیم.

❖ برای پیدا کردن تعداد افرازهایی که مجموعه را به k قسمت (زیرمجموعه) افراز می‌کند ابتدا حالت های کلی که می‌توان مجموعه را به k قسمت تقسیم کرد پیدا می‌کنیم و سپس با استفاده از آنالیز ترکیبی(شمارش بدون شمردن) مساله را حل و فصل می‌کنیم.

به طور مثال اگر بخواهیم مجموعه $\{a,b,c,d,e\}$ را به سه زیر مجموعه افراز کنیم حالات کلی زیر ممکن است:

$$\frac{\binom{۵}{\boxed{۱}}\binom{۴}{\boxed{۱}}\binom{۳}{۳}}{\boxed{۲}!}=۱۰$$



$$\frac{\binom{۵}{\boxed{۲}}\binom{۳}{\boxed{۲}}\binom{۱}{۱}}{\boxed{۲}!}=۱۵$$

📖 مثال: تمام افرازهای مجموعه $A=\{۱,۲\}$ را بیابید.

📖 مثال: تمام افرازهای مجموعه $B=\{a,b,c\}$ را تعیین کنید.

📖 مثال: مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ دارای چند افراز فاقد مجموعه یک عضوی است؟

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۷

مثال: اگر مجموعه $\{\{a\},\{b\},\{\{a,b\}\},\{c\}\}$ یک افراز از مجموعه A باشد، آنگاه مجموعه A دارای چند افراز دو عضوی است؟

۱) ۶   ۲) ۷   ۳) ۲   ۴) ۵

مثال: برای مجموعه $A=\{a,b,c,d,e\}$ ، چند افراز مختلف وجوددارد به طوری که سه عضو c,b,a در یک مجموعه قرار داشته باشند؟

۴   ۵   ۷   ۸

مثال: مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ دارای چند افراز سه عضوی است؟

۶   ۷   ۵   ۴

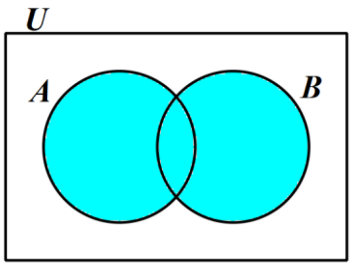
مثال: یک مجموعه ۶ عضوی چند افراز ۲ عضوی و چند افراز ۳ عضوی و چند افراز ۴ عضوی دارد؟

قوانین بین مجموعه ها

همان گونه که می‌توان در مجموعه اعداد حقیقی دو یا چند عدد را جمع، ضرب یا تفریق نمود و اعدادی جدید به دست آورد، در مورد مجموعه ها هم می توانیم مشابه این اعمال را انجام دهیم و مجموعه هایی جدید به دست آوریم.

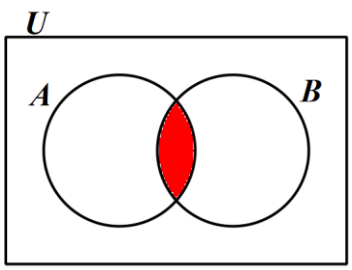
❖ **اجتماع دو مجموعه**: مجموعه ای است که عضوهای آن "متعلق به A یا متعلق به B یا متعلق به هر دو" می باشد. با نماد $A\bigcup B$ نمایش داده میشود و عبارت است از $A\bigcup B=\{x\in U | x\in A\vee x\in B\}$

یعنی: $x\in(A\bigcup B)\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B$



❖ **اشتراک دو مجموعه**: مجموعه ای است که عضوهای آن "متعلق به A و متعلق به B " می باشد. با نماد $A\bigcap B$ نمایش داده میشود و عبارت است از $A\bigcap B=\{x\in U | x\in A\wedge x\in B\}$ یعنی:

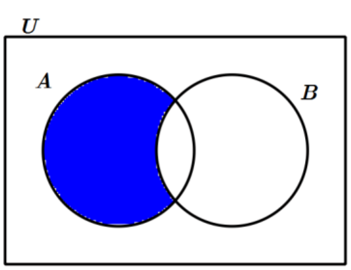
$x\in(A\bigcap B)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B$



❖ **تعریف تفاضل دو مجموعه** : تفاضل دو مجموعه B, A مجموعه ای است که اعضای آن متعلق به A می باشند ولی در مجموعه B قرار ندارند و آن را به صورت $A-B$ نشان می دهیم و داریم:

$$A-B=\{x\in U | x\in A\wedge x\notin B\}$$

به بیان دیگر: $x\in A-B\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)$



❖ تعریف تفاضل متقارن دو مجموعه :

$$A\Delta B=(A-B)\bigcup(B-A)$$

مثال: اگر C,B,A سه مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، آن گاه هریک از موارد زیر را به کمک نمودار ون نمایش دهید. و بیان جبری آنها را بنویسید.

الف) عضوهایی که فقط در A باشند.	ب) عضوهایی که فقط در یکی از مجموعه ها باشند.
پ) عضوهایی که در C,A باشند ولی در B نباشند.	ت) عضوهایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند.
ث) عضوهایی که فقط متعلق به دو مجموعه باشند.	ج) عضوهایی که حدااقل به ئو مجموعه تعلق داشته باشند.

قوانین جبر مجوعه ها

۱) $(A')'=$ ۲) $A\cup A'=$ ۳) $A\cap A'=$

۴) $A\cup U$ ۵) $A\cap U$ ۶) $A\cup A=$ $A\cap A=$

۷) جا به جایی اجتماع و اشتراک $\begin{cases} A\cup B=B\cup A \\ A\cap B=B\cap A \end{cases}$

اثبات:

۸) شرکتپذیری اجتماع و اشتراک $\begin{cases} A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \end{cases}$

اثبات:

۹) توزیع پذیری(پخشی) اجتماع و اشتراک نسبت به هم $\begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$

اثبات:

۱۰) قوانین جذب $A \cup (A \cap B) = A$ $\quad\quad$ $A \cap (A \cup B) = A$

اثبات:

۱۱) قوانین دمورگان $(A \cap B)' = A' \cup B'$ $\quad\quad$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

اثبات:

۱۲) $A - B = A \cap B'$ $\quad\quad$ متمم دومی $\cap$ اولی

اثبات:

مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید.

$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید.

$$(A - B) - C = (A - C) - B$$

مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید.

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید.

$$(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$$

مثال: ثابت کنید: (تفاضل از راست داریم)

الف) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ب) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

مثال: اگر B و A دو مجموعه ی غیر تهی باشند مجموعه ی $\left[A\cup(A\cap B)\right]'\cap\left[(B\cap A)\cup(B-A)\right]$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

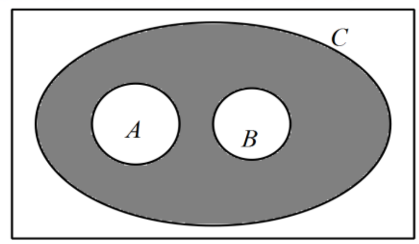
۱) $A'-B'$ ۲) $\varnothing$ ۳) A' ۴) $(A-B)'$

📖 مثال: متمم مجموعه $(B-A)'-A$ کدام است؟ ریاضی خارج ۸۸

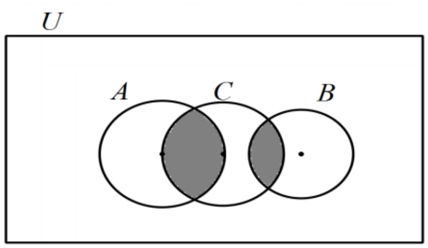
۱) $A\bigcup B$ ۲) $A\bigcap B$ ۳) A ۴) B

📖 مثال: نمودار ون مربوط به مجموعه $C-(A\bigcup B)'$ کدام میتواند باشد؟

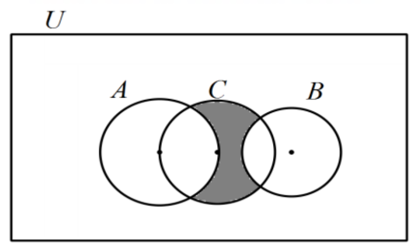
الف)



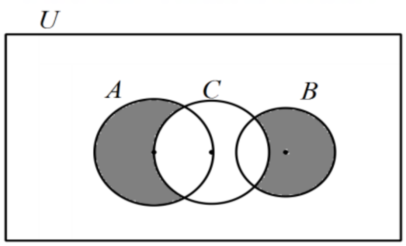
ب)



پ)



ت)



تعریف زوج مرتب

هر دوتایی مانند (a,b) را که در آنها ترتیب هم مهم است زوج مرتب مینامیم. a را مولفه یا مختص اول و b را مولفه یا مختص دوم می نامیم.

❖ دو زوج مرتب در صورتی با هم برابرند که مولفه های نظیر آنها با هم برابر باشند یعنی :

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow(a=c)\wedge(b=d)$$

📖 مثال: اگر $\left((x-1)^{2}+(y-2)^{2},3\right)=(0,z+x)$ باشد، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

📖 مثال: اگر $\left(128,3^{2x-y}\right)=\left(2^{2x+y},27\right)$ ، آنگاه $x+y$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{11}{2}$

📖 مثال: اگر $(13,xy)=\left(x^{2}+y^{2},6\right)$ ، آنگاه مقادیر مثبت y,x را بیابید.

تعریف ضرب دکارتی دو مجموعه

❖ برای دو مجموعه B,A ضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B ،مجموعه ای است شامل تمام زوج های مرتبی که مولفه اول آنها از A و مولفه دوم آنها از B می باشد یعنی :

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}$$

A \ B	-۱	۲
a	$(a,-1)$	$(a,2)$
b	$(b,-1)$	$(b,2)$

❖ در حالت خاص ضرب دکارتی یک مجموعه مانند A در خودش به صورت زیر تعریف می شود:

$$A^{2}=A\times A=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in A\}$$

❖در حالتی که عضوی در ضرب دکارتی باشد داریم:

$$(x,y)\in(A\times B)\Leftrightarrow[(x\in A\wedge y\in B)]$$

❖ در حالتی که عضوی در ضرب دکارتی نباشد:

$$(x,y)\notin(A\times B)\Leftrightarrow[(x\in A\wedge y\notin B)\vee(x\notin A\wedge y\in B)\vee(x\notin A\wedge y\notin B)]$$

📖 مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳\}$, $B=\{a,b\}$ باشند، آنگاه حاصلضرب دکارتی $B\times A$ و $A\times B$ را تشکیل دهید. چه نتایجی می گیرید؟

۵ ویژگی مهم ضرب دکارتی:

۱-اگر A مجموعه ای دلخواه از مرجع U باشد: $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

۲- برای دو مجموعه B,A از مرجع U داریم: $A\times B=B\times A\Leftrightarrow(A=\varnothing)\vee(B=\varnothing)(A=B)$

۳- برای چهار مجموعه ناتهی D,C,B,A از مرجع U داریم: $(A\subseteq C\wedge B\subseteq D)\Leftrightarrow(A\times B)\subseteq(C\times D)$

۴- ضرب دکارتی روی تمام عملگرهای مجموعه ای $(-,\cup,\cap)$ توزیع پذیر است، هم از راست و هم از چپ.

$$A\times(B\ \square\ C)=(A\times B)\ \square\ (A\times C)$$

۵- برای چهار مجموعه ناتهی D,C,B,A از مرجع U داریم: $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

📖 مثال: هرگاه $A=\{x-y,۳\},B=\{x+y,۱\}$ وداشته باشیم: $A\times B=B\times A$ مقادیر y,x رابیابید.

📖 مثال: اگر $A=\{2^n \mid n\in N \wedge n<4\}$ و $B=\{2k+1 \mid k\in Z \wedge |k|\le 1\}$ آنگاه $A\times B$ دارای چند عضو است؟

📖 مثال: اگر $A=\{2k-1 | k\in Z, 1\le k\le 5\}$, $B=\{k\in Z \mid |k-3|\le 2\}$ باشد آنگاه مجموعه ی $(A\times B)\cap(B\times A)$ چند عضو دارد؟ ریاضی ۹۲

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

📖 مثال: اگر $A=\{k : k\in N ; k\le 5\}$, $B=\{2k : k\in Z ; 0\le k\le 3\}$ باشد، مجموعه های $A\times A, B\times B$ چند عضو مشترک دارند؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۹ ۴) ۴

نکته در مورد مساوی بودن ضرب دکارتی دو مجموعه

$$\boxed{A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee A=B}$$

📖 مثال: اگر $B=\{x+۱,۴,-۲\}, A=\{y+۲,۵,z\}$ در این صورت با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

📖 مثال: اگر $B=\{۲^{۳x-۲y},۸۱\}\ ,\ A=\{۵۱۲,۳^{۲x+y}\}$ و $A\times B=B\times A$ ، آنگاه حاصل عبارت $۵x+۴y$ کدام است؟

۱) $\frac{۵۱}{۷}$ ۲) $\frac{۵۷}{۷}$ ۳) $\frac{۵۹}{۷}$ ۴) $\frac{۶۱}{۷}$

نمودار مختصاتی ضرب دکارتی دو مجموعه

❖دو مجموعه B,A از مرجع U را در نظر میگیریم به کمک تعریف ضرب دکارتی، مجموعه $(A\times B)$ را تشکیل می دهیم.

۱) در صورتی که عضوهای مجموعهٔ $A\times B$ به صورت زوج مرتب باشد، هر عضو را همانند مختصات یک نقطه در دستگاه مختصات نمایش می دهیم. (توجه کنید برای انجام این کار، عضوهای مجموعهٔ اول، در اینجا مجموعه A ، روی محور افقی (x ها) و عضوهای مجموعهٔ دوم،در اینجا مجموعه B ، روی محور عمودی مشخص می شود.)

۲) درصورتی که عضوهای مجموعهٔ $(A\times B)$ به کمک بازه های حقیقی نمایش داده شوند، بازه متعلق به مجموعهٔ A را روی محور x ها و بازه متعلق به مجموعهٔ B را روی محور عمودی در نظر میگیریم. به این ترتیب معمولاً یک سطح حاصل میشود.

🕮 مثال: اگر $A=\{1,2\}$, $B=\{-1,-2,0\}$ آنگاه مجموعه های $B\times A$, $A\times B$ را مشخص نمایید و سپس نمودار مختصاتی هرکدام را رسم کنید.

🕮 مثال: فرض کنیم $B=\{1,2\}, A=(1,4]$ در این صورت تعریف مجموعه های $B\times A, A\times B$ را تشکیل و نمودار هندسی آنها را رسم کنید.

🕮 مثال: اگر $B=[1,3], A=[0,2]$ باشند، نمودارهای $B\times A$, $A\times B$ را رسم کنید.

🕮 مثال: $B=\{4\}, A=\{x\in R | 1\leq x\leq 3\}$ آنگاه نمودار مختصاتی $A\times B$ را رسم کنید.

🕮 مثال: فرض کنیم $A=\{-۱,۲\}$, $B=[-۱,۲]$ تعریف مجموعه های $A\times B, B\times A$ را تشکیل و نمودار هندسی آنها را رسم کنید.

🕮 مثال: اگر $A=\{x\in R \mid ۱\leq x\leq ۳\}$ آنگاه نمودار مختصاتی $A^{۲}$ را رسم کنید.

🕮 مثال: اگر $A=[۰,۱]$, $B=\{۰,۱\}$ باشند، نمودار مختصاتی $A\times B, B\times A$ را رسم کنید.