

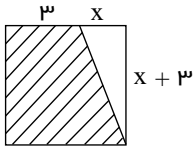
دبيرستان جمهوري اسلامي

فاطمه سرايي

تست فصل چهارم

سال دهم
رياضي





۱ در مربع زیر، اگر مساحت قسمت هاشورخورده 20 باشد، x کدام است؟

۵

۲

۴

۳

۲ اگر معادله‌ی درجه دوم $(2m+1)x^2 + (m+2)x + 1 = 0$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، این ریشه کدام می‌تواند باشد؟

$\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}$

۳ اگر معادله‌ی درجه دوم $2x^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف $x = 4$ باشد، مقدار $b + c$ کدام است؟

۳۲

۸

۴

۱۶

۴ اگر ریشه‌های معادله $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2 = 0$ باهم برابر باشند، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

-7

۲

صفر

$-\frac{1}{2}$

۵ معادله $(x+2)(-x^2+x-1) = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۳

۲

۱

صفر



۶ اگر یکی از ریشه‌های معادله $(a-1)x^2 - 2ax + 4 = 0$ برابر ۱ باشد، ریشه دیگر آن کدام است؟

$$-\frac{3}{2} \quad \text{۴}$$

$$-2 \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۱}$$

۷ اگر $(-6, 1)$ و $(4, 1)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، محور تقارن سهمی کدام است؟

$$x = -2 \quad \text{۴}$$

$$x = -1 \quad \text{۳}$$

$$x = 2 \quad \text{۲}$$

$$x = 1 \quad \text{۱}$$

۸ معادله‌ی درجه دوم $x(2x - 5) = a$ به ازای یک مقدار a ریشه مضاعف دارد مقدار ریشه مضاعف کدام است؟

$$\frac{5}{2} \quad \text{۴}$$

$$\frac{5}{4} \quad \text{۳}$$

$$-\frac{5}{4} \quad \text{۲}$$

$$-\frac{5}{2} \quad \text{۱}$$

۹ اگر $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله $mx^2 - 3x - 2m = 0$ باشد. جواب دیگر و m به ترتیب از راست به چپ کدامند؟

$$2 \text{ و } 2 \quad \text{۴}$$

$$1 \text{ و } \text{صفر} \quad \text{۳}$$

$$\text{صفر و } 1 \quad \text{۲}$$

$$-1 \text{ و } 3 \quad \text{۱}$$



۱۰ یکی از جواب‌های معادله‌ی $(m-1)x^2 - 7x + 2m = 0$ برابر $x = 2$ است. جواب دیگر معادله کدام است؟

۱ ۴

۳ $\frac{7}{2}$

۳ ۲

۱ $\frac{3}{2}$

۱۱ مجموع جواب‌های معادله‌ی $(x+2)^2 = (3x-1)^2$ کدام است؟

۴ $\frac{7}{4}$

۳ $\frac{5}{4}$

۲ $\frac{3}{5}$

۱ $\frac{1}{4}$

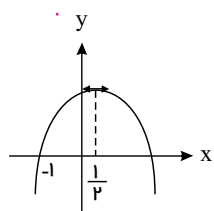
۱۲ نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + 2bx + 4$ محور x ها را در دو نقطه با طول‌های -3 و 5 قطع کرده است. طول رأس این سهمی کدام است؟

۴ -1

۳ -4

۲ 4

۱ 1



۱۳ سهمی $y = mx^2 - \frac{x}{m} + n$ به صورت زیر می‌باشد، $m+n$ کدام است؟

۲ -1

۱ -3

۴ 3

۳ 1

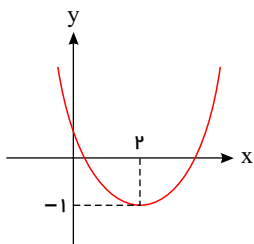
۱۴ خط $x = -1$ محور تقارن سهمی به معادله $y = 2x^2 - mx + n$ است. اگر این سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -2 قطع کند، عرض رأس سهمی کدام است؟

۴ ۴

۲ ۳

-۲ ۲

-۴ ۱



۱۵ اگر معادله سهمی زیر به صورت $y = \frac{x^2}{a} - ax + b$ باشد، مقدار ab کدام است؟

-۲ ۲

۲ ۱

-۴ ۴

۴ ۳

۱۶ خط به معادله $y = -\frac{5}{2}x$ نمودار سهمی به معادله $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + m$ را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. کدام گزینه است؟

۲ ۴

۱ ۳

-۱ ۲

-۲ ۱

۱۷ یک سهمی در نقاطی به طول ۱ و ۳ محور x ها را قطع می‌کند و بر خط $y = 4$ مماس است. عرض از مبدأ این سهمی کدام است؟

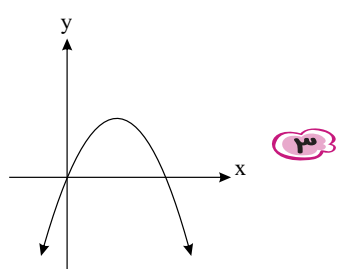
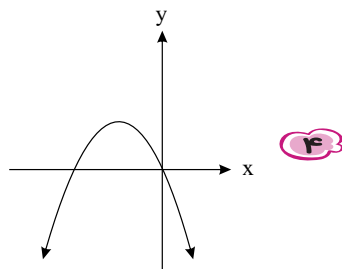
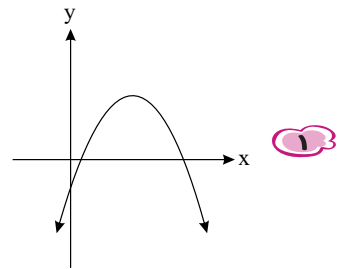
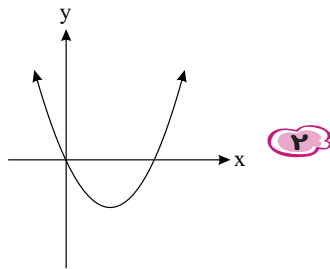
-۱۲ ۴

-۸ ۳

-۶ ۲

-۳ ۱

۱۸ در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ اگر $a < 0$ ، $b > 0$ و $c = 0$ باشد، آن گاه شکل کلی سهمی کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



۱۹ اگر $(-1, 20)$ و $(2, 5)$ دو نقطه از یک سهمی و $x = 1$ خط تقارن آن باشد، این سهمی در نقطه‌ای با کدام عرض محور y ها را قطع می‌کند؟

۲ ۴۳ ۳۴ ۲۵ ۱

۲۰ اگر مینیمم عرض سهمی $y = x^2 + ax + 4$ برابر ۳ باشد، آنگاه a کدام است؟

±۱ ۴±۲ ۳±۳ ۲±۴ ۱

پاسخنامه تشریحی

گزینه ۱

$$S_{\text{هائور}} = S_{\text{کل}} - S_{\text{مقت}} = ۲۰ \Rightarrow (x+۳)(x+۳) - \frac{1}{۲} \times x \times (x+۳) = ۲۰$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 - \frac{1}{۲}x^2 - \frac{۳}{۲}x = ۲۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲x^2 + 12x + 18 - x^2 - 3x = ۴۰ \Rightarrow x^2 + 9x + 18 - ۴۰ = ۰$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x - ۲۲ = ۰ \Rightarrow (x+11)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ x = ۲ \end{cases}$$

چون x برابر با طول ضلع مثلث است، نمی‌تواند منفی باشد؛ پس $x = ۲$ را می‌پذیریم.

گزینه ۲

معادله‌ی درجه‌ی ۲ ریشه‌ی مضاعف دارد، هرگاه $\Delta = ۰$ باشد.

$$\Delta = ۰ \rightarrow b^2 - 4ac = ۰ \rightarrow (m+۲)^2 - 4(۲m+1) \times 1 = ۰$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 8m - 4 = ۰ \Rightarrow m(m-4) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = ۰ \Rightarrow (x+1)^2 = ۰ \Rightarrow x = -1 \\ m = 4 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = ۰ \Rightarrow (3x+1)^2 = ۰ \Rightarrow 3x+1 = ۰ \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

گزینه ۳

$x = 4$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی درجه‌ی دوم است؛ داریم:

$$۲x^2 + bx + c = ۲(x-4)^2 = ۲x^2 - 16x + ۳۲ \Rightarrow b + c = -16 + ۳۲ = 16$$

معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = ۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف است هرگاه: $\Delta = ۰$ می‌دانیم: گزینه ۴

$$x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2 = ۰$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (-(3a+1))^2 - 4(1)(2a^2+2) = ۰$$

$$\Rightarrow 9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 - 8 = ۰ \Rightarrow a^2 + 6a - 7 = ۰$$

$$\Rightarrow (a+7)(a-1) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -7 \end{cases}$$

تعداد جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = ۰$ با توجه به رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ به صورت زیر است: می‌دانیم: گزینه ۵

$$\begin{cases} \Delta > ۰ : \text{ریشه حقیقی } ۲ \\ \Delta = ۰ : \text{ریشه مضاعف} \\ \Delta < ۰ : \text{فاقد ریشه} \end{cases}$$

$$(x+۲)(-x^2+x-1) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \\ \text{یا} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2+x-1 = ۰ \Rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3 < ۰ : \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

گزینه ۶

می‌دانیم: ریشه‌ی هر معادله در خودش صدق می‌کند

$$(x+a)(x-b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

راه‌حل اول: یا جایگذاری $x = 1$ داریم:

$$(a-1)x^2 - 2ax + 4 = ۰ \xrightarrow{x=1} a-1-2a+4 = ۰ \Rightarrow -a+3 = ۰ \Rightarrow a = 3$$

$$۲x^2 - 6x + 4 = ۰ \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = ۰ \Rightarrow (x-2)(x-1) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x-2 = ۰ \Rightarrow x = 2 \\ x-1 = ۰ \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

راه حل دوم:

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها $x_1 = +1$ باشد، آنگاه $a + b + c = 0$ و ریشه دیگر $x^2 = \frac{c}{a}$ است. پس:

$$a - 1 - 2a + 4 = 0 \Rightarrow -a + 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{a-1} = \frac{4}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

گزینه ۷ دو نقطه A و B عرض برابری دارند؛ عمود منصف پاره خط AB محور تقارن سهمی است. بنابراین:

$$\text{معادله خط تقارن: } x = \frac{-6+4}{2} = \frac{-2}{2} \Rightarrow x = -1$$

گزینه ۸ برای داشتن ریشه‌ی مضاعف باید $\Delta = 0$ باشد، بنابراین:

$$x(2x - 5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$$

$$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 25 - (4 \times 2 \times (-a)) = 0 \Rightarrow 25 + 8a = 0 \Rightarrow a = \frac{-25}{8}$$

$$\text{معادله: } 2x^2 - 5x + \frac{25}{8} = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - (4 \times 2 \times \frac{25}{8})}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{5}{4}$$

گزینه ۹ با قرار دادن $x = 2$ در معادله داریم:

$$4m - 6 - 2m = 0 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(3)(-6) = 9 + 72 = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 9$$

$$x_1, x_2 = \frac{3 \pm 9}{6} = \begin{cases} \frac{12}{6} = 2 \\ \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

چون در سوال $x = 2$ را به عنوان یکی از پاسخ‌ها مطرح کرده پس پاسخ دیگر -1 و m نیز ۳ است.

گزینه ۱۰

$$(m-1)x^2 - 7x + 2m = 0 \xrightarrow{x=2} (m-1) \times 4 - 7 \times 2 + 2m = 0$$

$$\Rightarrow 4m - 4 - 14 + 2m = 0 \Rightarrow 6m - 18 = 0 \Rightarrow 6m = 18 \Rightarrow m = \frac{18}{6} = 3$$

$m = 3$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 2 \times 6 = 49 - 48 = 1$$

$$x = \frac{+7 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = +2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

گزینه ۱۱ $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

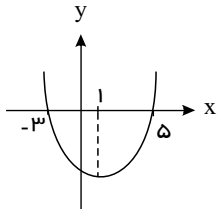
$$(x+2)^2 = (3x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} |x+2| = |3x-1|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2 = 3x-1 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = +\frac{3}{2} \\ x+2 = -(3x-1) \Rightarrow x+2 = -3x+1 \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{6-1}{4} = \frac{5}{4}$$

گزینه ۱

می‌دانیم: $S \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} \\ f(\frac{-b}{2a}) \end{array} \right.$ طول رأس سهمی، برابر است با محل عبور خط تقارن
 معادله تقارن سهمی $x = \frac{-b}{2a}$
 ریشه‌های معادله از رأس سهمی به یک فاصله هستند.

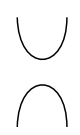


$$x = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

گزینه ۳


می‌دانیم: در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ مختصات رأس سهمی $S \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} \\ f(\frac{-b}{2a}) \end{array} \right.$ است.

$a > 0 \rightarrow$ تقعر رو به بالا $a > 0$
 $a < 0 \rightarrow$ تقعر رو به پایین $a < 0$



$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} = \frac{-(-\frac{1}{m})}{2m} \Rightarrow \frac{1}{2m^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

دهانه سهمی به سمت پایین است. $m < 0 \Rightarrow y = -x^2 + x + n$



نقطه $A(-1, 0)$ روی سهمی قرار دارد. در نتیجه:

$$0 = -(-1)^2 + (-1) + n \Rightarrow 0 = -1 - 1 + n \Rightarrow n = 2 \Rightarrow m + n = -1 + 2 = 1$$

گزینه ۱

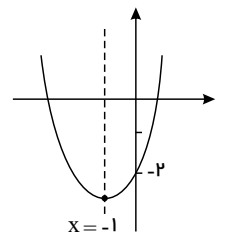
می‌دانیم: رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه $S \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} \\ f(\frac{-b}{2a}) \end{array} \right.$ است.

با رسم سهمی مفروض داریم:

$$S \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{2a} \\ f(\frac{-b}{2a}) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{-b}{2a} = -\frac{(-m)}{2(2)} = -1 \Rightarrow \frac{m}{2} = -1 \Rightarrow m = -4$$

$$y = 2x^2 + 4x + n \xrightarrow{(0, -2)} -2 = n$$

$$\Rightarrow f(\frac{-b}{2a}) = f(\frac{-4}{2}) = f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 2 = -4$$



می‌دانیم طول رأس سهمی به معادله $y = a'x^2 + b'x + c'$ به صورت $\frac{-b'}{2a'}$ است، پس: گزینه ۱

$$\text{طول رأس سهمی} = \frac{-(-a)}{2a} = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{2} = 2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -2$$

چون سهمی رو به بالا است یعنی ضریب x^2 مثبت است، پس a نیز مثبت است.

$$\xrightarrow{a=2} y = \frac{x^2}{2} - 2x + b \xrightarrow{(2,-1) \in \text{سهمی}} \frac{2^2}{2} - 2(2) + b = -1 \Rightarrow 2 - 4 + b = -1 \Rightarrow -2 + b = -1 \Rightarrow b = 1 \xrightarrow{b=1, a=2} ab = 2 \times 1 = 2$$

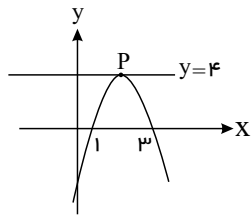
گزینه ۴ $y = -\frac{5}{2}$ خط و منحنی سهمی فقط یک نقطه تلاقی دارند. بنابراین آن نقطه رأس سهمی است و عرض رأس سهمی برابر $-\frac{5}{2}$ است. پس:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + m \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -3, c = m$$

در نتیجه:

$$\text{عرض رأس سهمی: می‌دانیم} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times \frac{1}{2} \times m - 9}{4 \times \frac{1}{2}} = -\frac{5}{2} \Rightarrow 2m - 9 = -5 \Rightarrow 2m = 4$$

$$\Rightarrow m = 2$$



گزینه ۴ ۱۷

سهمی مورد نظر به صورت مقابل است:

معادله این سهمی به صورت $y = k(x-1)(x-3)$ است.

از طرفی طول نقطه P، طول رأس سهمی است و از آنجاکه وسط دو ریشه است، برابر با ۲ است. عرض P هم (چون روی خط $y = 4$ است) برابر با ۴ است؛ حال مختصات P را در سهمی قرار می‌دهیم:

$$4 = k(2-1)(2-3) \Rightarrow 4 = -k \Rightarrow k = -4$$

پس معادله سهمی عبارت است از:

$$y = -4(x-1)(x-3) \xrightarrow{x=0} y = -4(-1)(-3) = -12 = \text{عرض از مبدأ}$$

گزینه ۳ ۱۸

در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ داریم:

c : عرض از مبدأ

a : تقعر سهمی

$-\frac{b}{2a}$: طول رأس سهمی

می‌دانیم:

باتوجه به $c = 0$ سهمی باید از مبدأ مختصات بگذرد پس گزینه ۱ حذف می‌شود.

باتوجه به منفی بودن a دست‌های سهمی رو به پایین است پس گزینه ۲ حذف می‌شود.

$$\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{-b}{2a} > 0$$

باتوجه به مثبت بودن $-\frac{b}{2a}$ طول رأس سهمی مثبت است و تنها گزینه ۳ قابل قبول می‌باشد.

گزینه ۱ ۱۹

در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، معادله خط تقارن سهمی $x = \frac{-b}{2a}$ است.

می‌دانیم:

$$x = \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow -b = 2a \quad (I)$$

$$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{I} y = ax^2 - 2ax + c \xrightarrow{(2,5)} 5 = 4a - 4a + c \Rightarrow c = 5$$

گزینه ۳ ۲۰

عرض رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ برابر $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$ است.

$$y = x^2 + ax + 4 \Rightarrow \text{عرض رأس سهمی} = \frac{4 \times 1 \times 4 - a^2}{4 \times 1} = \frac{16 - a^2}{4}$$

$$y = 3 \Rightarrow \frac{16 - a^2}{4} = 3 \Rightarrow 16 - a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$



دورستان جمهوري اسلامي

پاسخنامه کلیدی

۱	۱
۲	۱
۳	۱
۴	۴

۵	۲
۶	۲
۷	۳
۸	۳

۹	۱
۱۰	۱
۱۱	۳
۱۲	۱

۱۳	۳
۱۴	۱
۱۵	۱
۱۶	۴

۱۷	۴
۱۸	۳
۱۹	۱
۲۰	۳



جمهوری اسلامی ایران

فاطمه سرایی