بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

تشریح سوالات امتحانات نهایی

ریاضی (۳)

پایه دوازدهم علوم تجربی

درس به درس (تا دی ماه ۱۴۰۰)

فصل ۲

درس ۲

معادلات مثلثاتی

@MATHCLASS2
Majid.ghaderi.mathclass.2
m.ghaderi.5165@gmail.com
09177635165

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹ خارج از کشور

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۹

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۹

مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \rightarrow 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \rightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x$$

$$\xrightarrow{\text{۱۵ درجه در ربع اول است}} \sin x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$\rightarrow \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

دقیقاً مثال صفحه ۴۳ کتاب درسی

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹
خارج از کشور

اگر $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه ای حاده باشد، $\cos ۲\alpha$ را به دست آورید.

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱ \xrightarrow{\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}} \cos ۲\alpha = ۲\left(\frac{۵}{۱۳}\right)^{۲} - ۱ = ۲\left(\frac{۲۵}{۱۶۹}\right) - ۱$$

$$= \frac{۵۰}{۱۶۹} - ۱ = \frac{-۱۱۹}{۱۶۹}$$

دقیقاً قسمت «الف» تمرین ۱ صفحه ۴۸ کتاب درسی

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۸

مقدار $\sin ۲۲/۵^\circ$ به دست آورید.

$$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x \rightarrow ۱ - \cos ۲x = ۲\sin^۲ x \rightarrow \frac{۱ - \cos ۲x}{۲} = \sin^۲ x$$

$\xrightarrow{\text{۲۲/۵ درجه در ربع اول است}}$ $\sin x = \sqrt{\frac{۱ - \cos ۲x}{۲}}$

$$\rightarrow \sin ۲۲/۵^\circ = \sqrt{\frac{۱ - \cos ۴۵^\circ}{۲}} = \sqrt{\frac{۱ - \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}{۲}} = \sqrt{\frac{\frac{۲ - \sqrt{۲}}{۲}}{۲}} = \sqrt{\frac{۲ - \sqrt{۲}}{۴}} = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}$$

دقیقا قسمت «ب» تمرین ۲ صفحه ۴۸ کتاب درسی

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۰

حاصل عبارت $۴\sin x.\cos x.\cos ۲x$ را به ازای $x = ۷/۵^\circ$ محاسبه کنید.

$$۴\sin x.\cos x.\cos ۲x = ۲\underbrace{(۲\sin x.\cos x)}_{۲\sin\theta\cos\theta = \sin ۲\theta}.\cos ۲x = \overbrace{۲\underbrace{\sin ۲x}.\cos ۲x}^{۲\sin\theta\cos\theta = \sin ۲\theta} = \sin ۴x$$

$$\sin ۴x \xrightarrow{x = ۷/۵^\circ} \sin ۴(۷/۵^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

سوالی متفاوت برای دانش آموزان
برگرفته از روابط صفحه ۴۲ کتاب درسی

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹
خارج از کشور

جواب های معادلهٔ $\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را به دست آورید.

$$\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad \rightarrow \quad \cos x = \cos\frac{\pi}{۶}$$

$$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}\ ,k \in \mathbb{Z} \quad \text{یا} \quad x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶}\ ,k \in \mathbb{Z}$$

فعالیت صفحه ۴۵ کتاب درسی

امتحان نهایی تیر ماه ۱۳۹۸

معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin x+\sqrt{۲}=\sqrt{۸}$ را حل کنید.

$$۲\sin x+\sqrt{۲}=\sqrt{۸} \rightarrow ۲\sin x=\sqrt{۸}-\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=\sqrt{۲} \rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

سینوس زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ برابر با $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. پس نتیجه می شود،

$$\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) \rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴} \quad ,k\in\mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ x=۲k\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{۴}\right) \rightarrow x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴} \quad ,k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

مشابه کاردرکلاس صفحه ۴۵ کتاب درسی

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۹ **امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰**

معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \,.\, \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را حل کرده و جواب های کلی آن را بنویسید.

$$\sin x \,.\, \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

طرفین معادله را در ۲ ضرب می کنیم، تا داشته باشیم : $۲\sin x \,.\, \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

سمت چپ معادله برابر است با $\sin ۲x$ ؛ پس داریم: $\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

سینوس زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. پس نتیجه می شود،

$$\sin ۲x = \sin\frac{\pi}{۳} \rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ ۲x = ۲k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right) \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

دقیقا مثال ۳ صفحه ۴۵ کتاب درسی

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۸

معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \,.\, \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ را حل کرده و جواب های کلی آن را بنویسید.

$$\sin x \,.\, \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

طرفین معادله را در ۲ ضرب می کنیم، تا داشته باشیم: $۲\sin x \,.\, \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

سمت چپ معادله برابر است با $\sin ۲x$ ؛ پس داریم: $\sin ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

سینوس زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ برابر با $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. پس نتیجه می شود.

$$\sin ۲x = \sin \frac{\pi}{۴} \rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۸} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ ۲x = ۲k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{۴}\right) \rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

$$\rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۸} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

مشابه مثال ۳ صفحه ۴۵ کتاب درسی

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹
خارج از کشور

معادلهٔ مثلثاتی مقابل را حل کنید. $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰ \quad \rightarrow \quad ۲\sin ۳x = \sqrt{۲} \quad \rightarrow \quad \sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

سینوس زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ برابر با $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. پس نتیجه می شود،

$$\sin ۳x = \sin\frac{\pi}{۴} \rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \quad \rightarrow \quad x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ ۳x = ۲k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{۴}\right) \rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

دقیقا مثال ۱ صفحه ۴۷ کتاب درسی

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹

معادلهٔ مثلثاتی $\cos x\,(۲\cos x - ۹) = ۵$ را حل کنید.

$$\cos x\,(۲\cos x - ۹) = ۵ \quad \to \quad ۲\cos^۲ x - ۹\cos x = ۵$$

$$\to \quad ۲\cos^۲ x - ۹\cos x - ۵ = ۰ \xrightarrow[\cos x = t]{\text{تغییر متغیر می دهیم}} ۲t^۲ - ۹t - ۵ = ۰$$

معادلهٔ درجه دوم فوق را به روش دلخواه (تجزیه ، دلتا و ...) حل می کنیم.

$\boxed{-۱ \le \cos x \le ۱}$

$$\to \frac{۱}{۲}(۲t - ۱۰)(۲t + ۱) = ۰ \to \begin{cases} ۲t - ۱۰ = ۰ \quad \to t = ۵ \quad \to \cos x = ۵ & \text{غیر قابل قبول} \\ ۲t + ۱ = ۰ \quad \to t = -\frac{۱}{۲} \quad \to \cos x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{۱}{۲} \quad \to \quad \cos x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \quad \to \quad x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

دقیقا مثال صفحه ۴۸ کتاب درسی

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۹

معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

$$\underbrace{\cos ۲x} - \cos x + ۱ = ۰ \quad \rightarrow \quad \underbrace{۲\cos^۲ x - ۱} - \cos x + ۱ = ۰$$

$$\boxed{\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱}$$

$$\rightarrow \quad ۲\cos^۲ x - \cos x = ۰ \xrightarrow{\text{فاکتور گیری}} \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \quad \rightarrow \quad \cos x = \cos \frac{\pi}{۲} \quad \rightarrow \quad x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ ۲\cos x - ۱ = ۰ \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{۱}{۲} \quad \rightarrow \quad \cos x = \cos \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

دقیقاً قسمت «ب» تمرین ۳ صفحه ۴۸ کتاب درسی

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۹

معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \to 1 - \sin^2 x - \sin x - \frac{1}{4} = 0 \to -\sin^2 x - \sin x + \frac{3}{4} = 0$$

$$\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}$$

$$\to \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow[\sin x = t]{\text{تغییر متغیر می دهیم}} t^2 + t - \frac{3}{4} = 0 \to 4t^2 + 4t - 3 = 0$$

معادلهٔ درجه دوم فوق را به روش دلخواه (تجزیه ، دلتا و ...) حل می کنیم.

$$\to \frac{1}{4}(4t+6)(4t-2) = 0 \to \begin{cases} 4t + 6 = 0 \to t = -\frac{3}{2} \to \sin x = -\frac{3}{2} & \text{غیر قابل قبول} \\ 4t - 2 = 0 \to t = \frac{1}{2} \to \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \to \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \to \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \to x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

دقیقا قسمت «ث» تمرین ۳ صفحه ۴۸ کتاب درسی

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۷

معادلهٔ مثلثاتی $\sin x - \cos ۲x = ۰$ را حل کنید.

$$\sin x - \cos ۲x = ۰ \rightarrow \sin x - (۱ - ۲\sin^۲ x) = ۰ \rightarrow \sin x - ۱ + ۲\sin^۲ x = ۰$$

$\boxed{\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x}$

دقیقاً قسمت «ج» تمرین ۳ صفحه ۴۸ کتاب درسی

$$\rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰ \xrightarrow[\sin x = t]{\text{تغییر متغیر می دهیم}} ۲t^۲ + t - ۱ = ۰$$

معادلهٔ درجه دوم فوق را به روش دلخواه (تجزیه ، دلتا و ...) حل می کنیم.

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}(۲t+۲)(۲t-۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} ۲t + ۲ = ۰ \rightarrow t = -۱ \rightarrow \sin x = -۱ & (۱) \\ ۲t - ۱ = ۰ \rightarrow t = \frac{۱}{۲} \rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right) \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ x = ۲k\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{۲}\right) \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(۲) \rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۶} \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ x = ۲k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{۶}\right) \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۸

معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x - \sin x = ۰$ را حل کرده و جواب های کلی آن را بنویسید.

$$\cos ۲x - \sin x = ۰ \rightarrow (۱ - ۲\sin^۲ x) - \sin x = ۰ \rightarrow -۲\sin^۲ x - \sin x + ۱ = ۰$$

$$\boxed{\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x}$$

برگرفته از قسمت «ج» تمرین ۳ صفحه ۴۸ کتاب درسی

$$\rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰ \xrightarrow[\sin x = t]{\text{تغییر متغیر می دهیم}} ۲t^۲ + t - ۱ = ۰$$

معادلهٔ درجه دوم فوق را به روش دلخواه (تجزیه ، دلتا و ...) حل می کنیم.

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}(۲t + ۲)(۲t - ۱) = ۰ \rightarrow \begin{cases} ۲t + ۲ = ۰ \rightarrow t = -۱ \rightarrow \sin x = -۱ & (۱) \\ ۲t - ۱ = ۰ \rightarrow t = \frac{۱}{۲} \rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right) \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ x = ۲k\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{۲}\right) \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(۲) \rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۶} \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ x = ۲k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{۶}\right) \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

امتحان نهایی دی ماه ۱۴۰۰

معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$ را حل کنید.

$$\underbrace{\cos 2x}_{} - \sin x = 0 \rightarrow \underbrace{(1 - 2\sin^2 x)}_{} - \sin x = 0 \rightarrow -2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$\boxed{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x}$

برگرفته از قسمت «ج» تمرین ۳ صفحه ۴۸ کتاب درسی

$$\rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \xrightarrow[\sin x = t]{\text{تغییر متغیر می دهیم}} 2t^2 + t - 1 = 0$$

معادلهٔ درجه دوم فوق را به روش دلخواه (تجزیه ، دلتا و ...) حل می کنیم.

$$\rightarrow \frac{1}{2}(2t + 2)(2t - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2t + 2 = 0 \rightarrow t = -1 \rightarrow \sin x = -1 & (1) \\ 2t - 1 = 0 \rightarrow t = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰

مثلثی با مساحت $۸\sqrt{۲}$ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۴ و ۸ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟

مساحت مثلث با داشتن اندازهٔ طول دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$S = \frac{۱}{۲} a \times b \times \sin\theta$$

$$\rightarrow \quad ۸\sqrt{۲} = \frac{۱}{۲}(۴)(۸)\sin\theta \quad \rightarrow ۸\sqrt{۲} = ۱۶\sin\theta \quad \rightarrow \quad \sin\theta = \frac{۸\sqrt{۲}}{۱۶} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

در یک مثلث سینوس چه زاویه هایی می تواند برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد.

۴۵ درجه یا همان $\theta = \frac{\pi}{۴}$ ۱۳۵ درجه یا همان $\theta = \frac{۳\pi}{۴}$

مشابه تمرین ۴ صفحه ۴۸ کتاب درسی

تهیه و تنظیم: مجید قادری (دبیر ریاضی از بندرعباس)

پایان

تهیه و تنظیم : **مجید قادری**
(دبیر ریاضی از بندرعباس)

mathclass2

@MATHCLASS2

Majid.ghaderi.mathclass.2

m.ghaderi.5165@gmail.com

09177635165