

سؤالات موضوعی نهایی

((ریاضیات گسسته))

پایه دوازدهم رشته‌ی ریاضی فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

آخرین نسخه: دی ۱۴۰۰

تهیه‌کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

((فصل اول : آشنایی با نظریه‌ی اعداد))



درس ۱ : استدلال ریاضی

استدلال ریاضی

۰/۲۵ نمره	دی ۹۷	<p>۱ درست‌ی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید.</p> <p>اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.</p>
۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	<p>۲ اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.</p>
۰/۵ نمره	شهریور ۹۸	<p>۳ درست‌ی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف : مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.</p> <p>ب : برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.</p>
۱/۷۵ نمره	خرداد ۹۹	<p>۴ گزاره‌ی درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.</p> <p>الف : مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.</p> <p>ب : اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.</p>
۱ نمره	شهریور ۹۹	<p>۵ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف : برای هر دو عدد حقیقی x و y، داریم : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$</p> <p>ب : اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$</p> <p>پ : اگر $a, b \in R$ داریم : $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$</p> <p>ت : حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.</p>
۰/۵ نمره	دی ۹۹	<p>۶ درست‌ی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کرده و اگر نادرست است، مثال نقض ارائه کنید.</p> <p>برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.</p>
۰/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>۷ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف : حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.</p> <p>ب : هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه‌ی $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ برقرار باشد.</p>

شهریور ۱۴۰۰	نمره ۱	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۸
-------------	--------	--	---

اثبات با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها (روش اشباع)

			۱
			۲

اثبات غیر مستقیم

دی ۹۷	نمره ۱/۲۵	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد. ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.	۱
تیر ۹۸	نمره ۱/۲۵	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.	۲
خرداد ۹۹	نمره ۱	با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید، اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.	۳
دی ۹۹	نمره ۱/۵	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت $\alpha - \beta$ گنگ است.	۴
دی ۱۴۰۰	نمره ۰/۲۵	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ ، گویا) است.	۵
دی ۱۴۰۰	نمره ۱/۵	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.	۶

اثبات بازگشتی / گزاره های هم ارز

دی ۹۷	نمره ۱	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید. برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۱
-------	--------	--	---

۱ نمره	۹۸ خرداد	ثابت کنید، میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.	۲
۱/۷۵ نمره	۹۸ تیر	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید. برای هر عدد حقیقی $a > 0$ داریم: $a + \frac{1}{a} \geq 2$	۳
۱ نمره	۹۸ خرداد	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی ثابت کنید. برای دو عدد حقیقی x و y نشان دهید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۴
۱/۵ نمره	۹۸ شهریور	برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ثابت کنید. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$	۵
۱ نمره	۹۸ دی	به روش بازگشتی، ثابت کنید، اگر $a > 0$ آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$	۶
۱ نمره	۹۹ خرداد	اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$	۷
۱/۲۵ نمره	۹۹ شهریور	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	۸
۱/۲۵ نمره	۱۴۰۰ خرداد	به روش بازگشتی، ثابت کنید حاصل هر دو عدد حقیقی، کوچکتر یا مساوی با نصف مجموع مربعات آنها است.	۹

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

عاد کردن و ویژگی های آن

۱ نمره	۹۷ دی	اگر $a > 1$ و $a \mid 9k + 4$ و $a \mid 5k + 3$ ثابت کنید a عددی اول است.	۱
۱/۲۵ نمره	۹۸ تیر	اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $4k + 1 \mid 5$ ، ثابت کنید $16k^2 + 28k + 6 \mid 25$	۲

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه دوازدهم رشته ریاضی

۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a^2 b^3$ آنگاه $a b$	۲۵/۰ نمره	خرداد ۹۸
۴	اگر عدد طبیعی $a > 1$ در دو شرط $a 4k + 9$ و $a 6k + 14$ صدق کند، مقدار a را بیابید.	۱ نمره	دی ۹۸
۵	اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $3 + 2a$ بر ۸ را به دست آورید.	۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹
۶	اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n 9k + 7$ و $n 7k + 6$ ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$	۱ نمره	خرداد ۹۹
۷	اگر $2 - 5m a$ و $3m + 1 a$ ، برای a چند جواب طبیعی وجود دارد؟	۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹
۸	فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $4 + 3n a$ و $3 + 2n a$. نشان دهید: $a = 1$	۱/۲۵ نمره	شهریور ۹۹
۹	جاهای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب پر کنید. دو عدد a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a b$ آنگاه عدد شمارنده‌ی عدد است.	۵/۰ نمره	خرداد ۱۴۰۰
۱۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $a b$ و m و n دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$ ، آنگاه $a^n b^n$	۲۵/۰ نمره	شهریور ۱۴۰۰
۱۱	اگر $a > 1$ ، $a 4 + 9k$ و $a 3 + 5k$ ، ثابت کنید a عددی اول است.	۱ نمره	شهریور ۱۴۰۰
۱۲	عبارت مناسب را از داخل پراکنده انتخاب کنید. اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم، $a b$ ، برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم: $(a mb, ma b)$	۲۵/۰ نمره	دی ۱۴۰۰

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

۲۵/۰ نمره	دی ۹۷	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول اند.
۵/۰ نمره	تیر ۹۸	در جای خالی عدد مناسب قرار دهید. حاصل $[(۱۲, (۶, ۸)]$ برابر خواهد شد.
۲۵/۰ نمره	خرداد ۹۸ خ	حاصل عبارت مقابل کدام یک از گزینه های زیر است؟ $([m^۲, m], m^۵) = \dots$ الف) m ب) $m^۰$ ج) $m^۵$ د) $m^۲$
۵/۰ نمره	شهریور ۹۸	جای خالی را پر کنید. $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند. و $\forall m > 0$ ۲) $a c$ و $b c$ ۱)
۲۵/۰ نمره	دی ۹۸	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a b$ ، آنگاه $[a, b] = b $
۱ نمره	دی ۹۸	فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[۲۱a^۲, ۳۵a^۳]$ را به دست آورید.
۱ نمره	خرداد ۹۹ خ	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف: اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم، $(a, b) = ۱$ ، می گوئیم a و b دو عدد هستند. ب: اگر $a b$ ، مقدار $[a, b]$ برابر با است.
۲۵/۰ نمره	خرداد ۹۹ خ	بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $۴k$ و $۱ - ۱۶k^۲$ را بیابید.
۲۵/۰ نمره	دی ۹۹	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کرده و اگر نادرست است، مثال نقض ارائه کنید. برای دو عدد طبیعی a و b ، اگر $a b$ آنگاه $[a, b] = b $
۲۵/۱ نمره	دی ۹۹	اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(۳ + ۲a, ۴ + ۵a)$ را به دست آورید.

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه دوازدهم رشته ریاضی

۱۱	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب پر کنید. عدد m یک عدد صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با است.	۱۴۰۰ خرداد	۱/۲۵ نمره
۱۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $a b$ آنگاه $(a, b) = a$	۱۴۰۰ شهریور	۱/۲۵ نمره
۱۳	عبارت مناسب را از داخل پراتز انتخاب کنید. اگر $a b$ آنگاه ب. م. م دو عدد a و b برابر با (a, a) است.	۱۴۰۰ دی	۱/۲۵ نمره

قضیه‌ی تقسیم و کاربردها

۱	پاسخ سؤال زیر را به دست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. اگر عددی صحیح و فرد باشد و $2 + a b$ در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $3 + a^2 + b^2$ را بر ۸ بیابید.	۹۷ دی	۱/۲۵ نمره
۲	اگر باقی مانده‌ی تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را به دست آورید.	۹۸ خرداد	۱/۵ نمره
۳	در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید. در تقسیم عدد $127 -$ بر ۱۵ باقیمانده برابر و خارج قسمت است.	۹۸ خرداد	۰/۵ نمره
۴	اگر باقی مانده‌ی تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید.	۹۸ شهریور	۱/۵ نمره
۵	اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۱ برابر ۱۹ باشد، باقی مانده‌ی $2a - 1$ تقسیم بر ۳۱ را به دست آورید.	۹۹ خرداد	۱/۲۵ نمره
۶	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد؛ آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ ($k \in W$) نوشته می شود.	۹۹ شهریور	۱/۵ نمره
۷	اگر باقی مانده‌ی تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $5n - 2m$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۹۹ شهریور	۱/۲۵ نمره

۱ نمره	دی ۹۹	اگر باقی مانده‌ی تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $2a - 5b$ بر ۱۷ را بیابید.	۸
۰/۱۷۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می شود.	۹
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش پذیر است.	۱۰
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۰	ثابت کنید، باقی مانده‌ی تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ برابر یک است.	۱۱
۱/۲۵ نمره	دی ۱۴۰۰	اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو عدد بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده‌ی تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.	۱۲

افراز مجموعه‌ی اعداد صحیح

۰/۲۵ نمره	تیر ۹۸	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. مربع هر عدد فرد را می توان به صورت $8k - 1$ نوشت. ($k \in Z$)	۱
			۲

درس ۳: بخش پذیری در اعداد صحیح و کاربرد ها

همنهستی و ویژگی های آن

۱ نمره	دی ۹۷	پاسخ سؤال زیر را به دست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. باقی مانده‌ی تقسیم عدد $10 + 12 \times (1000)^{13}$ بر ۷ را به دست آورید.	۱
۱ نمره	خرداد ۹۸	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از همنهستی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۲

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. الف: اگر $a \equiv b^m$ و $n m$ آنگاه $a \equiv b^n$ ب: باقیمانده تقسیم عدد $A = 4985327$ بر عدد ۱۱ برابر ۶ است.	خرداد ۹۸ خارج ک	۰/۵ نمره
۴	در جای خالی کلمه‌ی مناسب قرار دهید. اگر ۱۲ بهمن جمعه باشد، ۳۱ مرداد همان سال است.	خرداد ۹۸ خ	۰/۲۵ نمره
۵	باقی مانده‌ی تقسیم $19 + (27)^7$ را بر ۱۳ بیابید.	شهریور ۹۸	۱/۵ نمره
۶	باقی مانده‌ی تقسیم 13^{22} را بر ۱۷ به دست آورید.	دی ۹۸	۱ نمره
۷	ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه‌ی هم نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد. به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، اگر $a \equiv b^m$ آنگاه $ac \equiv bc^m$	دی ۹۸	۱ نمره
۸	باقی مانده‌ی تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.	خرداد ۹۹	۱/۵ نمره
۹	رقم یکان عدد $2^{11} + 7$ را به دست آورید.	شهریور ۹۹	۱/۲۵ نمره
۱۰	فرض کنیم $m \in N$ و $a, b \in Z$ ، اگر $a \equiv b^m$ و $n \in N$ ، ثابت کنید $a^n \equiv b^{nm}$	شهریور ۹۹	۱ نمره
۱۱	باقی مانده‌ی تقسیم $19 + 38^{36}$ را بر ۴ به دست آورید.	دی ۹۹	۱/۲۵ نمره
۱۲	باقی مانده‌ی تقسیم عدد $A = (1000)^{25} \times 9 + 11$ را بر ۷ بیابید.	خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره

شهریور ۱۴۰۰	شماره ۳۵/۱	۱۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $a \equiv b \pmod{m}$ باشد، آنگاه باقی مانده های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی اند.
شهریور ۱۴۰۰	شماره ۱	۱۴	اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یک عدد $9a + 6$ را به دست آورید.
دی ۱۴۰۰	شماره ۲۵/۱	۱۵	عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $(c, m) = d$ ، آنگاه رابطه‌ی $(a \equiv b \pmod{m}, a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}})$ است.

معادله‌ی همنهشتی

دی ۹۷	شماره ۱	۱	معادله‌ی همنهشتی $3x \equiv 13 \pmod{7}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بدست آورید.
تیر ۹۸	شماره ۱	۲	جواب عمومی معادله‌ی $4x \equiv 17 \pmod{5}$ را به دست آورید.
دی ۹۸	شماره ۳۵/۱	۳	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. معادله‌ی هم نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a, m) b$
خرداد ۹۹	شماره ۲۵/۱	۴	معادله‌ی هم نهشتی $5x \equiv 2 \pmod{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.
دی ۹۹	شماره ۵/۱	۵	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کرده و اگر نادرست است، مثال نقض ارائه کنید. معادله‌ی هم نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, m) b$
دی ۹۹	شماره ۱	۶	معادله‌ی همنهشتی $8x \equiv 20 \pmod{12}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل اول درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۱ نمره	۱۴۰۰ خرداد	معادله‌ی $۷x \equiv ۱ \pmod{۴}$ را حل کنید.	۷
۰/۲۵ نمره	۱۴۰۰ شهریور	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. منظور از حل معادله‌ی هم نهشتی، پیدا کردن همه‌ی جواب‌های حقیقی است که در معادله- $ax \equiv b \pmod{m}$ صدق کند.	۸

معادله‌ی سیاله

۱/۵ نمره	۹۸ خرداد	با تبدیل معادله‌ی سیاله‌ی خطی $۵x + ۲y = ۱۸$ به معادله‌ی هم نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.	۱
۱ نمره	۹۸ خرداد	جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله‌ی خطی $۷x + ۵y = ۱۱$ را بدست آورید.	۲
۱/۵ نمره	۹۸ شهریور	با تبدیل معادله‌ی سیاله‌ی خطی $۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۲۹۰۰۰$ به معادله‌ی هم نهشتی و حل آن، جواب عمومی این معادله را بیابید.	۳
۱/۵ نمره	۹۸ دی	جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله‌ی خطی $۹x + ۱۳y = ۷$ را بدست آورید.	۴
۱/۷۵ نمره	۹۹ خرداد	معادله‌ی سیاله‌ی $۴x + ۳y = ۱۹$ را در نظر بگیرید. الف: نشان دهید معادله‌ی سیاله دارای جواب است. ب: جواب عمومی معادله‌ی سیاله‌ی داده شده را بیابید.	۵
۱ نمره	۹۹ شهریور	معادله‌ی سیاله‌ی $۲x + ۵y = ۱۹$ را حل کنید.	۶
۱/۵ نمره	۱۴۰۰ شهریور	معادله‌ی سیاله‌ی $۵x + ۲y = ۱۸$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۷
۱/۷۵ نمره	۱۴۰۰ دی	معادله‌ی سیاله‌ی $۶x + ۷y = ۱۸۵$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۸

تهیه کننده: جابر عامری

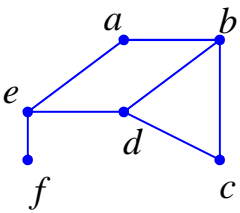
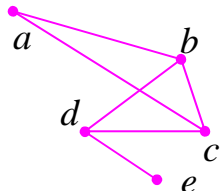
((فصل دوّم : گراف و مدل سازی))

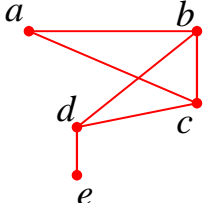
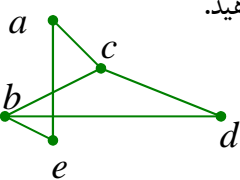
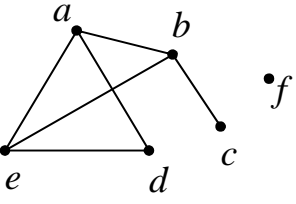


درس ۱: معرفی گراف

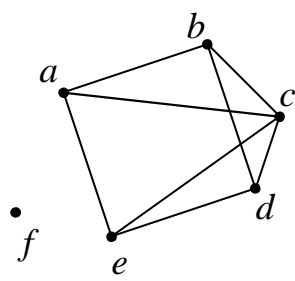
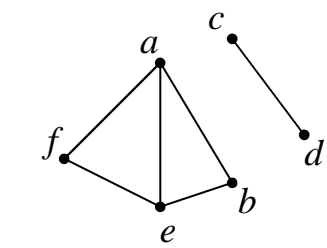
تعاریف و اثبات ها

۰/۵ نمره	دی ۹۷	<p>درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف : گراف حاصل از مدل سازی پل کونیکسبرگ یک گراف ساده است.</p> <p>ب : گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.</p>
۱/۵ نمره	دی ۹۷	<p>با توجه به گراف شکل مقابل (گراف G) به سئوالات زیر پاسخ دهید.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>الف : یک $a - c$ مسیر به طول ۳ بنویسید.</p> <p>ب : یک دور به طول ۴ مشخص کنید.</p> <p>پ : درجه ی رأس a در گراف G را تعیین کنید.</p> <p>ت : آیا گراف G همبند است؟ چرا؟</p> <p>ث : یک زیر گراف تهی ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>گراف G با مجموعه ی رأس های $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه ی یال های $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است. با توجه به این گراف به سئوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف : مجموعه ی همسایگی های باز رأس d را بنویسید.</p> <p>ب : اندازه ی گراف را مشخص کنید.</p> <p>ج : مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. مرتبه ی گراف و مقادیر $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را تعیین کنید.</p>

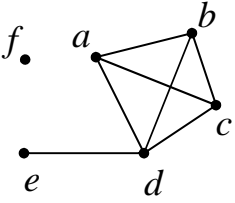
۰/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۶ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>یک گراف کامل ۸ رأسی ، یال دارد.</p>
۱/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۷ شکل مقابل نمودار گراف G می باشد.</p> <p>الف: مرتبه و اندازه‌ی گراف G را بنویسید.</p> <p>ب: مجموعه‌ی $N_G(b)$ را بنویسید.</p> <p>ج: مجموع درجه‌های رأس‌های گراف \bar{G} را مشخص کنید.</p> 
۰/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>۸ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر است.</p>
۱/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>۹ گراف G را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید.</p> <p>الف) مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌ها را بنویسید.</p> <p>ب) در گراف G، یک دور به طول ۳ بنویسید.</p> <p>ج) درجه‌ی رأس e را در گراف \bar{G} مشخص کنید.</p> 
۰/۲۵ نمره خ	<p>۱۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>مینیمم درجه در یک گراف ساده عددی غیر صفر است.</p>
۰/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۱۱ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>P_n گرافی است که تنها از یک مسیر تشکیل شده است.</p>
۲ نمره	شهریور ۹۸	<p>۱۲ گراف G با مجموعه‌ی رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه‌ی یال‌های زیر را در نظر بگیرید.</p> <p>$E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$</p> <p>الف: نمودار گراف را رسم کنید.</p> <p>ب: $N_G[b]$ را مشخص کنید.</p> <p>ج: یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.</p>

۱۳	شهریور ۹۸	در هر مورد یک گراف ۵ رأسی غیر تهی k - منتظم رسم کنید، به طوری که: الف: بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب: k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.
۱۴	دی ۹۸	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است.
۱۵	دی ۹۸	گراف G به صورت مقابل است را در نظر بگیرید و به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف: $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب: اندازه‌ی گراف را تعیین کنید. پ: مجموعه‌ی همسایگی بسته رأس b را بنویسید. ت: اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد. x کدام رأس است؟
		
۱۶	دی ۹۸	هر یک از موارد زیر را پاسخ دهید. الف: گراف k - منتظم از مرتبه‌ی n را تعریف کنید. ب: آیا گراف ۳-منتظم از مرتبه‌ی ۵ وجود دارد؟ دلیل خود را بنویسید.
۱۷	دی ۹۸	اگر G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف: دوری به طول ۵ مشخص کنید. ب: مکمل گراف G را رسم کنید.
		
۱۸	خرداد ۹۹	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف: مجموع درجه‌های رأس‌های هر گراف تعداد یال‌ها است. ب: در یک گراف k - منتظم، ماگزیمم درجه‌ی رأس برابر با است.
۱۹	خرداد ۹۹	گراف G را در نظر گرفته و به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف: $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. ب: یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. پ: یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.
		
۲۰	۹۹	در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف \overline{G} برابر ۱۲ است. مرتبه‌ی گراف G را مشخص کنید.

۱ نمره	۹۹ خرداد	گراف G ، ۶ رأسی ۳- منتظم است. الف : اندازه‌ی گراف G را بیابید. ب : نمودار گراف G را رسم کنید.	۲۱
۱ نمره	۹۹ خرداد	ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۲۲
۱ نمره	۹۹ خرداد	در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف : تعداد رئوس یک گراف را (اندازه ، مرتبه) می نامیم. ب : گرافی را همبند می نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر ، یال) وجود داشته باشد. پ : اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $(n(n-1))$ ، $\frac{n(n-1)}{2}$ است. ت : گراف C_n تنها یک (دور ، مسیر) n رأسی دارد.	۲۳
۲ نمره	۹۹ خرداد	گراف G در شکل مقابل را در نظر بگیرید. الف : $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب : دوری به طول ۴ برای b بنویسید. پ : مکمل گراف G را رسم کنید. ت : $N_G(e)$ را با اعضا مشخص کنید.	۲۴
۱ نمره	۹۹ خرداد	در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r - منتظم از مرتبه‌ی p رسم کنید. در صورتی که ترسیم گراف امکان پذیر نبود، دلیل را ارائه کنید. الف : $p = 5$ و $r = 2$ ب : $p = 7$ و $r = 3$	۲۵
۲/۵ نمره	۹۹ شهریور	گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سؤالات زیر را پاسخ دهید. الف : $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب : سه دور به طول ۳ بنویسید. پ : ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟ ت : $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. ث : آیا گراف G همبند است.	۲۶

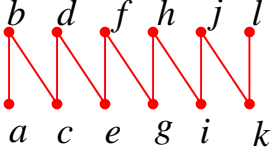


شهریور ۹۹	شماره ۱	گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید. سپس گراف را رسم کنید.	۲۷
شهریور ۹۹	شماره ۱	آیا گراف ۷ رأسی ۳-منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.	۲۸
شهریور ۹۹	شماره ۱	گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.	۲۹
دی ۹۹	شماره ۱	جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. الف: مرتبه‌ی گراف نشان دهنده‌ی تعداد گراف می باشد. ب: اگر یک یال، یک رأس به خود آن رأس وصل کند، این یال را می نامیم. پ: دو یال را می نامیم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها را به هم متصل کند. ت: تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی است.	۳۰
دی ۹۹	شماره ۲	گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید. الف: درجه‌ی رأس e در گراف مکمل G چند است؟ ب: تمام دوره‌های موجود در گراف G را بنویسید. پ: $\Delta(G)$ را مشخص کنید.	۳۱
دی ۹۹	شماره ۱	به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف: گراف k -منتظم را تعریف کنید. ب: گراف P_7 را رسم کنید. پ: آیا گراف‌های C_n منتظم هستند.	۳۲
خرداد ۱۴۰۰	شماره ۲	گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید. الف) $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید. ب) بزرگترین درجه در گراف \overline{G} را با اعضا مشخص کنید. پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید. ت) آیا گراف G همبند است؟	۳۳
شهریور ۱۴۰۰	شماره ۲/۳۵	با توجه به گراف G در شکل مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ) درجه‌ی رأس a در گراف \overline{G} را تعیین کنید. ت) مجموعه‌ی $N_G(f)$ را معین کنید.	۳۴

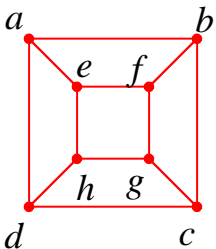
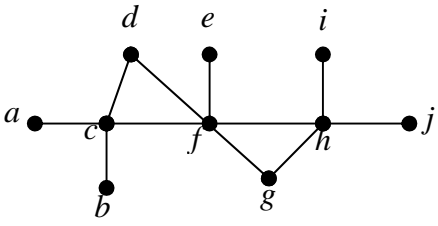
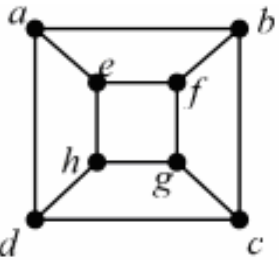
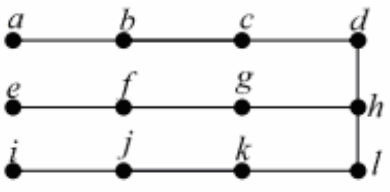
شهریور ۱۴۰۰	نمره ۱/۲۵	گراف G ، ۳- منتظم است و اندازه‌ی آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس های گراف است. مرتبه‌ی گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.	۳۵
دی ۱۴۰۰	نمره ۲	 <p>با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف) مقدار $q - \Delta(G)$ را بیابید. ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ) با ذکر دلیل مشخص کنید، گراف مکمل G چند یال دارد؟</p>	۳۶

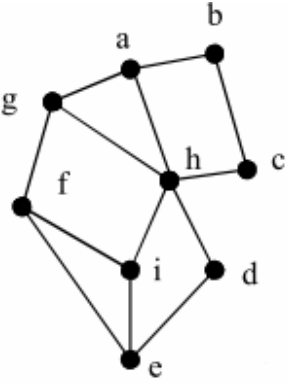
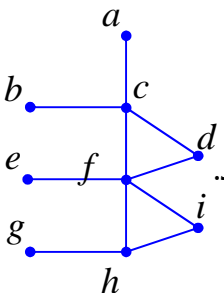
درس ۲: مدل سازی با گراف

احاطه گری

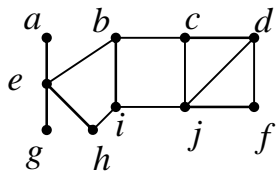
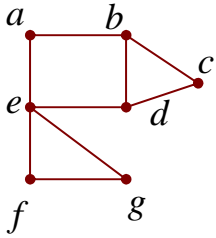
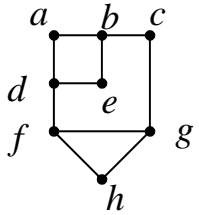
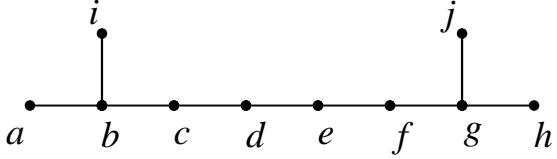
دی ۹۷	نمره ۱	 <p>گراف $P_{۶}$ در شکل مقابل رسم شده است. الف: یک γ - مجموعه از این گراف مشخص کنید. ب: یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.</p>	۱
خرداد ۹۸	نمره ۱	<p>در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف: در یک گراف از مرتبه‌ی ۱۰ با $\Delta = ۳$ حداقل رأس برای احاطه‌ی همه‌ی رئوس لازم است. ب: اگر در گراف G از مرتبه‌ی p داشته باشیم، $\gamma(G) = ۱$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر است.</p>	۲
خرداد ۹۸	نمره ۱/۵	<p>گراف $C_۷$ را در نظر بگیرید و به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف: یک مجموعه‌ی احاطه گر ۴ عضوی بنویسید. ب: عدد احاطه گری $C_۷$ را به دست آورید. ج: دو مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.</p>	۳

<p>نمبره ۱/۵</p> <p>خرداد ۹۸</p>		<p>الف: ثابت کنید هر مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال را می توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال تبدیل کرد.</p> <p>ب: در گراف روبرو یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.</p>	<p>۴</p>
<p>نمبره ۱</p> <p>خرداد ۹۸</p>		<p>الف: یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p> <p>ب: یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p>	<p>۵</p>
<p>نمبره ۰/۵</p> <p>تیر ۹۸</p>		<p>جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.</p> <p>عدد احاطه گری گراف C_n برابر می باشد.</p>	<p>۶</p>
<p>نمبره ۰/۵</p> <p>تیر ۹۸</p>		<p>درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف: یک $\gamma -$ مجموعه در گراف P_5، دارای ۲ عضو است.</p> <p>ب: تعداد کمتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ رأس نمی توانند تمام n رأس گراف را احاطه کنند.</p>	<p>۷</p>
<p>نمبره ۱/۵</p> <p>تیر ۹۸</p>		<p>در هر قسمت، گراف خواسته شده را رسم کنید.</p> <p>الف) یک گراف ۲ منتظم از مرتبه‌ی ۸، که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.</p> <p>ب) یک گراف ۵ رأسی که $\gamma -$ مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی یک باشد.</p> <p>ج) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ که یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p>	<p>۸</p>
<p>نمبره ۱/۵</p> <p>تیر ۹۸</p>		<p>اگر عدد احاطه گری در یک گراف ۵ رأسی برابر یک باشد، در این صورت $V(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یالهایی را که گراف G می تواند داشته باشد را مشخص کنید.</p>	<p>۹</p>

۱۰	در گراف شکل مقابل :	الف) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم مشخص کنید. ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.	
۱۱	مفاهیم زیر را تعریف کنید.	الف) مجموعه‌ی احاطه گر ب) عدد احاطه گری	
۱۲	در گراف شکل مقابل :	الف) یک مجموعه‌ی احاطه گر بنویسید. ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال بنویسید. پ) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم بنویسید.	
۱۳	عدد احاطه گری گراف های زیر را تعیین کرده و سپس برای هر گراف یک γ -مجموعه بنویسید.	الف) ب)	 
۱۴	الف) گراف ۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه گری آن یک باشد. ب) گراف ۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۲ بوده و مجموعه‌ی احاطه گری مینیمم آن یکتا باشد.		
۱۵	الف : گراف P_8 را رسم کنید. ب : یک γ - مجموعه از آن را مشخص کنید. ج : یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.		

<p>شهریور ۹۸ نمبره ۱</p>		<p>۱۶ در گراف شکل زیر یک مجموعه‌ی احاطه گر غیرمینیمال انتخاب کنید. سپس با حذف برخی از رأس ها، آن را به یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید.</p> 	<p>۱۶</p>
<p>دی ۹۸ نمبره ۱/۲۵</p>		<p>۱۷ برای گراف روبرو:</p>  <p>الف: یک مجموعه‌ی احاطه گر با ۴ عضو مشخص کنید. ب: مجموعه ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه گر مینیمال باشد.</p>	<p>۱۷</p>
<p>دی ۹۸ نمبره ۱/۲۵</p>		<p>۱۸ اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه ی گراف باشد.</p> <p>الف: گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ است.</p> <p>ب: گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه گری بزرگتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ باشد.</p>	<p>۱۸</p>
<p>خرداد ۹۹ نمبره ۰/۵</p>		<p>۱۹ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف: در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه‌ی احاطه گر گراف G می نامیم.</p> <p>ب: یک مجموعه‌ی احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم.</p>	<p>۱۹</p>
<p>خرداد ۹۹ نمبره ۱</p>		<p>۲۰ گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که:</p> <p>الف: مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p> <p>ب: بیش از یک مجموعه‌ی احاطه گر با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p>	<p>۲۰</p>

۱/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	<p>عدد احاطه‌گری گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.</p>	۲۱
۱/۲۵ نمره	۹۹ خرداد	<p>عدد احاطه‌گری گراف زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.</p>	۲۲
۰/۷۵ نمره	۹۹ خرداد	<p>مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال را تعریف کنید.</p>	۲۳
۱/۵ نمره	۹۹ شهریور	<p>عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص کنید.</p>	۲۴
۲ نمره	۹۹ دی	<p>در گراف G که شکل آن در مقابل داده شده است: الف: یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید. ب: عدد احاطه‌گری G را تعیین کنید.</p>	۲۵
۱ نمره	۱۴۰۰ خرداد	<p>تفاوت بین مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.</p>	۲۶
۱ نمره	۱۴۰۰ خرداد	<p>در گراف شکل زیر یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p>	۲۷

۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>عدد احاطه گری گراف شکل زیر را با ارائه‌ی راه حل، تعیین کنید.</p> 	۲۸
۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	<p>الف) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی یک باشد، رسم کنید. ب) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی دو باشد، رسم کنید.</p>	۲۹
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	<p>با ارائه‌ی راه حل، عدد احاطه گری گراف مقابل را تعیین کنید.</p> 	۳۰
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۰	<p>در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p> 	۳۱
۱ نمره	دی ۱۴۰۰	<p>درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف: هر مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال، یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم است. ب: اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه‌ی Δ باشد، آنگاه $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil > \gamma(G)$ پ: در گراف P_n عدد احاطه گری برابر با $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$ است. ت: $\lceil 3/48 \rceil = 4$</p>	۳۲
۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۰	<p>عدد احاطه گری گراف G واقع در شکل زیر را با ارائه‌ی راه حل، تعیین کنید.</p> 	۳۳

۱/۵ نمره	دی ۱۴۰۰	گراف C_1 را رسم کنید. الف: یک γ - مجموعه از آن را مشخص کنید. ب: یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال ۵ عضوی از تعیین نمایید.	۳۴
-------------	------------	--	----

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

((فصل سوم : ترکیبیات (شمارش)))



درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

یادآوری و تکمیل

۱ نمره	دی ۹۷	اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. در این صورت چند کد رمز ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم (متمایز) از A و سه رقم (متمایز) از B باشد؟
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	۶ دانش آموز پایه‌ی دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه‌ی یازدهم به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند؟ به طوری که : الف : به صورت یک در میان قرار بگیرند. ب : همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند. ج : یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.
۱ نمره	تیر ۹۸	می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف یک میز مستطیل شکل بنشانیم، اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد.
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که : الف : همواره کتابهای فیزیک کنار هم باشند. ب : هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند. ج : یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک همواره کنار هم باشند.
۱/۲۵ نمره	دی ۹۸	۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می توان در کنار هم در یک ردیف قرار داد، به طوری که : الف : کتاب ها یکی در میان قرار گیرند؟ ب : کتاب های ریاضی کنار هم و کتاب های فیزیک نیز کنار هم باشند؟
۱ نمره	خرداد ۹۹	۴ دانش آموز پایه‌ی دهم و ۳ دانش آموز پایه‌ی یازدهم، به چند طریق می توانند در یک ردیف قرار گیرند. به طوری که : الف : هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند. ب : همواره دانش آموزان پایه‌ی دهم کنار هم باشند.

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۱ نمره	دی ۹۹	۷ با ارقام ۴ و ۳ و ۷ و ۸ و ۶ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت که : الف : اعداد زوج کنار هم باشند. ب : اعداد فرد کنار هم باشند.
۱ نمره	خرداد ۱۴۰۰	۸ به سؤالات زیر، پاسخ کوتاه بنویسید. می‌خواهیم با حروف «ب» و «ج» و ارقام ۸ و ۶ و ۵ و ۴ و ۲ و ۱ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است: الف) تعداد رمزهایی که هر یک از آنها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد. ب) تعداد رمزهایی که در آنها حروف کنار هم باشند.
۱ نمره	شهریور ۱۴۰۰	۹ کوتاه پاسخ دهید : علی و حسین و ۵ نفر دیگر را به چند طریق می‌توان در یک صف کنار هم قرار داد، به طوری که : الف : علی و حسین کنار هم باشند. ب : ابتدا و انتهای صف علی و حسین ایستاده باشند.
۵/۱ نمره	دی ۱۴۰۰	۱۰ می‌خواهیم با حروف «ش»، «الف» و «ث» و ۵ عدد ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ یک رمز شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است، تعداد کل رمزهایی که در هر یک از آنها حروف کنار هم باشند.

معادلات حسابی

۱ نمره	دی ۹۷	۱ به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟
۱ نمره	خرداد ۹۸	۲ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0$ و $i = 2, 3, 4, 5$ را محاسبه کنید.
۵/۱ نمره	تیر ۹۸	۳ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر را بدست آورید. $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 12$ $x_1 > 2$, $x_5 \geq 4$
۲ نمره	خرداد ۹۸	۴ الف) به چند طریق از بین ۴ نوع گل، دسته‌گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟ ب) اگر از هر ۴ نوع گل حداقل یکی انتخاب شود، به چند طریق می‌توان ۸ شاخه گل را انتخاب کرد؟
۱ نمره	شهریور ۹۸	۵ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ با شرط $x_5 \geq 4$ و $x_1 > 2$ را محاسبه کنید.

۱ نمره	دی ۹۸	معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب های صحیح و نامنفی به شرط آن که $x_1 > 2$ و $x_3 > 3$ دارد؟ چرا؟	۶
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۹	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد. اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.	۷
۱/۵ نمره	خرداد ۹۹	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ چند جواب صحیح و مثبت دارد، به شرط آن که $x_2 > 2$ و $x_5 \geq 4$ باشند.	۸
۱/۲۵ نمره	شهریور ۹۹	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 \geq 1$ و $x_1 > 3$ باشند؟	۹
۱/۵ نمره	دی ۹۹	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد. به شرط آنکه $x_5 = 2$ و $x_2 > 2$ باشند.	۱۰
۲ نمره	خرداد ۱۴۰۰	به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.	۱۱
۱/۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 > 2$ و $x_4 \geq 4$ باشد.	۱۲
۱/۷۵ نمره	دی ۱۴۰۰	به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل متفاوت، ۱۰ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که از گل نوع سوم، حداقل ۴ شاخه و از نوع ششم بیش از ۲ شاخه انتخاب کنیم؟	۱۳

جایگشت های با تکرار

۱ نمره	خرداد ۹۸	با ارقام ۵ و ۴ و ۴ و ۲ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟	۱
۱ نمره	تیر ۹۸	۹ نفر به چند طریق می توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند.	۲

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۳	در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید. تعداد رمزهای چهار رقمی که با ارقام ۱ و ۱ و ۲ و ۱ می‌توان ساخت برابر است.	۵/۰ نمره	خرداد ۹۸ خ
۴	با حروف کلمه‌ی « می سی سی پی » چند جایگشت ۸ حرفی با معنا یا بی معنا می‌توان نوشت؟	۱ نمره	دی ۹۸
۵	با ارقام عدد ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟	۷۵/۰ نمره	خرداد ۹۹
۶	با ارقام عدد ۱۱۳۲۸۸۱۱۳۳ چند عدد ۱۰ رقمی می‌توان نوشت. (ساده کردن پاسخ نهایی الزامی نیست.)	۱ نمره	خرداد ۹۹ خ
۷	هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟	۷۵/۰ نمره	شهریور ۹۹
۸	می‌خواهیم ۲۰ نفر را به ۴ گروه ۵ نفره تقسیم کنیم. به چند طریق این کار امکان پذیر است؟	۱ نمره	شهریور ۱۴۰۰
۹	با حروف کلمه‌ی « جیرجیرک » چند کلمه‌ی ۷ حرفی می‌توان نوشت؟	۱ نمره	دی ۱۴۰۰

مربع های لاتین

۱	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.	۱/۵ نمره	دی ۹۷
۲	در جای خالی عدد مناسب قرار دهید. مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با است.	۵/۰ نمره	خرداد ۹۸
۳	اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، بنویسید که چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟	۱/۵ نمره	خرداد ۹۸

۴	تیر ۹۸	نمره ۰/۲۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای $n = 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی n وجود ندارد.																																				
۵	تیر ۹۸	نمره ۱/۵	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی ۳ بنویسید.																																				
۶	خرداد ۹۸ خارج کشور	نمره ۱	برای مربع لاتین مقابل یک جایگشت مشخص کرده، نشان دهید مربع جدید، خود مربع لاتین است؟ <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tbody> <tr><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </tbody> </table>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱																				
۴	۲	۱	۳																																				
۳	۱	۲	۴																																				
۱	۴	۳	۲																																				
۲	۳	۴	۱																																				
۷	شهریور ۹۸	نمره ۱	قرار است چهار مدرس T_1 و T_2 و T_3 و T_4 در چهار جلسه‌ی متوالی در چهار کلاس C_1 و C_2 و C_3 و C_4 تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه ریزی نمایید.																																				
۸	دی ۹۸	نمره ۰/۲۵	بررسی کنید، آیا دو مربع لاتین روبرو متعامدند؟ چرا؟ <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tbody> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </tbody> </table> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tbody> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </tbody> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲																		
۱	۲	۳																																					
۳	۱	۲																																					
۲	۳	۱																																					
۱	۲	۳																																					
۲	۳	۱																																					
۳	۱	۲																																					
۹	خرداد ۹۹	نمره ۱	مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۴ و ۳ و ۲ و ۱ یک مربع لاتین به دست آورید. <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tbody> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> </tbody> </table>	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴																				
۲	۱	۴	۳																																				
۴	۳	۲	۱																																				
۳	۴	۱	۲																																				
۱	۲	۳	۴																																				
۱۰	خرداد ۹۹	نمره ۱	در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین را بررسی کنید. الف: <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tbody> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </tbody> </table> ب: <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tbody> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> </tbody> </table> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tbody> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </tbody> </table> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tbody> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </tbody> </table>	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۱	۲	۱	۳	۱	۳	۲	۳	۲	۱
۳	۲	۱																																					
۱	۳	۲																																					
۲	۱	۳																																					
۳	۱	۲																																					
۲	۳	۱																																					
۱	۲	۳																																					
۱	۲	۳																																					
۴	۱	۲																																					
۲	۳	۱																																					
۲	۱	۳																																					
۱	۳	۲																																					
۳	۲	۱																																					

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۱۱	خرداد ۹۹	نوع ۱ نمره	قرار است سه کارگر W_1 و W_2 و W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ ریزی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه ریزی کنید.																					
۱۲	خرداد ۹۹ خ	نوع ۱ نمره	یک مربع لاتین 4×4 چرخشی رسم کنید.																					
۱۳	شهریور ۹۹	نوع ۱ نمره	متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید. <table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="padding: 0 10px;"> </td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="padding: 0 10px;"> </td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="padding: 0 10px;"> </td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> </tr> </table>	۱	۲	۳		۱	۲	۳	۴	۱	۲		۲	۳	۱	۲	۳	۱		۳	۱	۲
۱	۲	۳		۱	۲	۳																		
۴	۱	۲		۲	۳	۱																		
۲	۳	۱		۳	۱	۲																		
۱۴	شهریور ۹۹	نوع ۵/۰ نمره	یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.																					
۱۵	دی ۹۹	نوع ۲ نمره	مربع لاتین A را نظر بگیرید. الف: با اعمال یک جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین A ، مربع لاتین B را تولید کنید. ب: متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$																					
۱۶	خرداد ۱۴۰۰	نوع ۵/۱ نمره	مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابجا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابجا کنید و مربع حاصل را B نامگذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$																					
۱۷	شهریور ۱۴۰۰	نوع ۲۵/۱ نمره	الف: تمام مربع‌های لاتین 2×2 را بنویسید. ب: آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟ دلیل بیاورید.																					

۱۸	در مربع لاتین A (در شکل زیر) جای سطر اول و سوم را باهم جابجا کنید، تا مربع لاتین B ایجاد شود. سژس با ذکر دلیل بررسی کنید، آیا A و B دو مربع لاتین متعامد هستند؟
دی ۱۴۰۰	$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
۱/۲۵ نمره	

درس ۲: روش هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

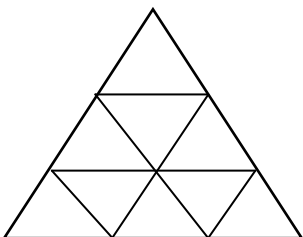
۱	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود).
دی ۹۷	۲ نمره
۲	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟ راه حل خود را بنویسید.
خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره
۳	چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ بخش پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش پذیر نباشند و بر ۴ بخش پذیر نباشند).
تیر ۹۸	۱/۵ نمره
۴	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم؟
خرداد ۹۸ خ	۱/۵ نمره
۵	بین اعداد طبیعی ۱ تا ۴۰۰ ($1 \leq n \leq 400$) چند عدد وجود دارد که : الف) بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۷ بخش پذیر نباشد؟ ب) فقط بر یکی از اعداد ۴ یا ۷ بخش پذیر باشد؟
خرداد ۹۸ خ	۱/۵ نمره
۶	چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشند؟
شهریور ۹۸	۱/۵ نمره
۷	درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید. تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه‌ی ۲ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی برابر ۶ است.
دی ۹۸	۰/۲۵ نمره
۸	با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی را به دست آورید.
دی ۹۸	۱/۷۵ نمره
۹	به چند طریق می توان ۴ خودکار را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم).
خرداد ۹۹	۱ نمره

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۱۰	در بین اعداد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟	انمره	خرداد ۹۹
۱۱	چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۲ و ۷ بخش پذیر نباشند؟	انمره ۱/۷۵	خرداد ۹۹ خ
۱۲	الف: چند تابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی می‌توان تعریف کرد؟ ب: چند تابع یک به یک از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۶ عضوی وجود دارد؟	انمره	خرداد ۹۹ خ
۱۳	۸ نفر را برای یک برنامه‌ی تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرئنه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است. (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)	انمره	شهریور ۹۹
۱۴	تعداد تابع‌های یک به یک از یک مجموعه‌ی ۳ عضوی به یک مجموعه‌ی ۶ عضوی چند تا است؟ (با ذکر دلیل)	انمره	شهریور ۹۹
۱۵	در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.	انمره	شهریور ۹۹
۱۶	مجموعه‌ی $S = \{1, 2, \dots, 400\}$ را در نظر بگیرید، چند عدد در S وجود دارند به طوری که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند.	انمره ۱/۵	دی ۹۹
۱۷	در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟	انمره ۱/۷۵	خرداد ۱۴۰۰
۱۸	الف) به چند طریق می‌توان ۴ کلاه را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ ب) به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟	انمره	خرداد ۱۴۰۰

شهریور ۱۴۰۰	نمره ۱/۵	در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند، ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند.	۱۹
دی ۱۴۰۰	نمره ۱/۵	از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰ ($1 \leq n \leq 300$)، چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر است ولی بر ۵ بخش پذیر نیست؟	۲۰

اصل لانه کبوتری

دی ۹۷	نمره ۱/۵	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه‌ی کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کبیسه در نظر بگیرید.)	۱
خرداد ۹۸	نمره ۱/۲۵	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۲
تیر ۹۸	نمره ۱/۲۵	تعیین کنید که در یک اردوی دانش آموزش چند دانش آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟	۳
خرداد ۹۸ خارج کشور	نمره ۱/۵	یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ۳ واحد را تقسیم بندی کرده ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.	۴
			
شهریور ۹۸	نمره ۱/۵	۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله‌ی آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.	۵
دی ۹۸	نمره ۱	مجموعه‌ی اعداد $A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه‌ی ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.	۶
خرداد ۹۹	نمره ۱	در یک اردوی دانش آموزی، حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن ها ماه تولد یکسانی دارند؟	۷

سؤالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۸	خرداد ۹۹ خ	۰/۷۵ نمره	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای کشتی باشند تا مطمئن باشیم، لااقل ۲۰ نفر آنها روز تولدشان در هفته یکسان است؟
۹	شهریور ۹۹	۱ نمره	نشان دهید در یک خانواده‌ی ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.
۱۰	دی ۹۹	۱ نمره	حداقل چند نفر در یک سالن همایش باید حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آنها مانند هم و غیر تکراری است.
۱۱	خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره	۵۴ شاخه گل را حداکثر در چندگلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم، گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟
۱۲	شهریور ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه‌ی کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آن‌ها روز تولدشان در هفته، یکسان است؟
۱۳	دی ۱۴۰۰	۱ نمره	ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است؟

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سؤالات موضوعی نهایی

فصل اول ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس ۱: استدلال ریاضی

استدلال ریاضی

درست	۱
با توجه به فرد بودن عدد ab نتیجه می گیریم هر دو عدد a و b فرد هستند، لذا با فرض صحیح بودن اعداد n و m ، می توان در نظر گرفت $a = 2n - 1$ و $b = 2m - 1$. بنابراین:	۲
$a^2 + b^2 = (2n - 1)^2 + (2m - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4m^2 - 4m + 1$ $= 2(2n^2 - 2n + 2m^2 - 2m + 1) = 2k \quad k \in Z$	
یعنی $a^2 + b^2$ یک عدد زوج است.	
الف: درست ب: نادرست	۳
الف: نادرست	۴
$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^c \rightarrow \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^c$	
ب: درست	
$(2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1) = 4 \times 2q = 8q$	
الف: نادرست ب: درست پ: نادرست ت: نادرست	۵
نادرست	۶
$n = 4 \rightarrow 2^4 - 1 = 14 \notin P$	
الف: درست ب: نادرست	۷

۸	فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. فرض خلف: فرض کنیم $r + x$ گویا باشد. می دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $(r + x) - r \in Q$ یعنی $x \in Q$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می شود.
---	--

اثبات با در نظر گرفتن همه‌ی حالت ها

۱	
۲	

اثبات غیر مستقیم

۱	اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. در نتیجه: $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in Q$ اما با توجه به فرض مسئله β گنگ است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.
۲	فرض کنید r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. فرض کنید که $r + x$ گنگ نباشد (فرض خلف). بنابراین عددی گویا است. از طرفی می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است. پس تفاضل r و $r + x$ باید عددی گویا باشد. یعنی $(r + x - r) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم ثابت می گردد.
۳	فرض کنید که $\frac{1}{x}$ عدد گنگ نباشد. پس گویا است یعنی $(\frac{1}{x} \in Q)$ و لذا معکوس آن یعنی x باید گویا باشد و این مخلف فرض مسئله می باشد. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.
۴	فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویا است. $\left. \begin{matrix} \alpha - \beta = m \in Q \\ \alpha + \beta = n \in Q \end{matrix} \right\} \rightarrow 2\alpha = m + n \rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \in Q$ با فرض تناقض دارد.
۵	گنگ

۶	فرض خلف: فرض کنیم $\alpha - \beta$ گویا باشد. می دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است. پس $(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \in \mathbb{Q}$. یعنی $2\alpha \in \mathbb{Q}$. در نتیجه $\alpha \in \mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن α تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می شود.
---	---

اثبات بازگشتی / گزاره های هم ارز

۱	$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0.$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0.$ <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>
۲	<p>اگر دو عدد نامنفی باشند، حکم چنین خواهد بود. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$</p> $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$ <p>همواره درست</p> <p>حال چون تمام مراحل اثبات، بازگشت پذیر هستند، لذا حکم درست است.</p>
۳	$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0.$ <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>
۴	<p>ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می کنیم:</p> $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0.$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0.$ <p>همیشه درست</p> <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>

۵	<p>ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می کنیم:</p> $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (x^2 - 2xz + z^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0$ <p>همیشه درست است.</p> <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>
۶	<p>رجوع شود به پاسخ سؤال ۳</p>
۷	<p>بدیهی است. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \xrightarrow{\times xy} x^2 + y^2 \geq 2xy \rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \rightarrow (x - y)^2 \geq 0$</p> <p>و چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، لذا حکم درست است.</p>
۸	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \xrightarrow{\times 2} a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2$ $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ <p>نابرابری آخر برای دو عدد حقیقی نامنفی a و b همیشه درست است. اکنون چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند نتیجه می شود که حکم برقرار است.</p>
۹	$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ <p>گزاره همواره بدیهی است و مراحل بازگشت پذیر می باشند.</p>

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

عادکردن و ویژگی های آن

۱	$a \mid 9k + 4 \Rightarrow a \mid 5(9k + 4) \Rightarrow a \mid 45k + 20$ $a \mid 5k + 3 \Rightarrow a \mid 9(5k + 3) \Rightarrow a \mid 45k + 27$ $\rightarrow a \mid 7 \xrightarrow{a > 1} a = 7$
---	--

$5 \mid 4k + 1 \rightarrow (5)^2 \mid (4k + 1)^2 \rightarrow 25 \mid 16k^2 + 8k + 1 \quad (1)$ $5 \mid 4k + 1 \xrightarrow{\times 5} 25 \mid 20k + 5 \quad (2)$ $\xrightarrow{(1),(2)} 25 \mid (16k^2 + 8k + 1) + (20k + 5) \rightarrow 25 \mid 16k^2 + 28k + 6$	۲
نادرست	۳
$\left. \begin{array}{l} a \mid 4k + 9 \\ a \mid 6k + 14 \end{array} \right\} \rightarrow a \mid -6(4k + 9) + 4(6k + 14) \rightarrow a \mid 2 \xrightarrow{a > 1} a = 2$ <p>حال اگر در رابطه‌ی $a \mid 4k + 9$ مقدار a را برابر ۲ قرار دهیم به دست می‌آوریم $2 \mid 4k + 9$ و چون $4k + 9 = 2(2k + 4) + 1$ همواره فرد است، پس $4k + 9$ نمی‌تواند بر ۲ بخشپذیر باشد و لذا مقداری برای a با شرایط وجود ندارد.</p>	۴
$a = 4q + 3 \rightarrow 2a + 3 = 8q + 9 = 8(q + 1) + 1 = 8q' + 1 \Rightarrow r = 1$	۵
$\left\{ \begin{array}{l} n \mid 9k + 7 \\ n \mid 7k + 6 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-7) \\ \times 9 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} n \mid -63k - 49 \\ n \mid 63k + 54 \end{array} \right. \rightarrow n \mid (-63k - 49) + (63k + 54)$ $\rightarrow n \mid 5 \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ or \\ n = 5 \end{cases}$	۶
$\left\{ \begin{array}{l} a \mid 3m + 1 \\ a \mid 5m - 2 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} \times 5 \\ \times 3 \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} a \mid 15m + 5 \\ a \mid 15m - 6 \end{array} \right. \rightarrow a \mid (15m + 5) - (15m - 6)$ $\rightarrow a \mid 11 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 11 \end{cases}$ <p>لذا برای a دو جواب طبیعی وجود دارد.</p>	۷
$\left\{ \begin{array}{l} a \mid 3n + 4 \\ a \mid 2n + 3 \end{array} \right. \rightarrow a \mid -2(3n + 4) + 3(2n + 3) \rightarrow a \mid 1 \xrightarrow{a \in N} a = \pm 1$	۸
عدد a شمارنده‌ی عدد b است.	۹
درست	۱۰

$a \mid 9(5k + 3) - 5(9k + 4) \rightarrow a \mid 27 - 20 \rightarrow a \mid 7 \xrightarrow{a > 1} a = 7 \in P$	۱۱
$a \mid mb$	۱۲

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

درست	۱
۱۲	۲
گزینه‌ی د یعنی m^2 درست است.	۳
$\forall m > 0, a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m$	۴
درست	۵
$A = 21a^2 = 3 \times 7 \times a^2$ و $B = 35a^3 = 5 \times 7 \times a^3 \rightarrow [A, B] = 105a^3$	۶
الف : متباین (نسبت به هم اول) ب : $ b $	۷
فرض می کنیم $d = (16k^2 - 1, 4k)$ در این صورت :	۸
$\left. \begin{array}{l} d \mid 4k \\ d \mid 16k^2 - 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} d \mid 16k^2 \\ d \mid 16k^2 - 1 \end{array} \right\} \rightarrow d \mid (16k^2) - (16k^2 - 1) \rightarrow d \mid 1$	
درست	۹
$(5a + 4, 2a + 3) = d \rightarrow \begin{cases} d \mid 5a + 4 \\ d \mid 2a + 3 \end{cases} \rightarrow d \mid -2(5a + 4) + 5(2a + 3) \rightarrow d \mid 7$ $\rightarrow d = 1 \text{ or } d = 7$	۱۰
$2m$	۱۱
نادرست	۱۲
$ a $	۱۳

قضیه‌ی تقسیم و کاربردها

<p>۱ عدد a عددی فرد است. بنابراین $a + 2$ عددی فرد است و $b \mid a + 2$. بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. می دانیم که مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ بعلاوه یک است. پس:</p> $a^2 + b^2 + 3 = (\lambda m + 1) + (\lambda n + 1) + 3 = \lambda(m + n) + 5 \rightarrow r = 5$	۱
$\begin{cases} m = 13q_1 + 2 \\ n = 13q_2 + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3m = 13(3q_1) + 6 \\ \Delta n = 13(\Delta q_2) + 45 \end{cases} \rightarrow \Delta n - 3m = 13q' + 39$ $\rightarrow \Delta n - 3m = 13q' + 3(13) \rightarrow \Delta n - 3m = 0 \rightarrow r = 0$	۲
<p>۳ باقیمانده ۸ و خارج قسمت -۹ است.</p>	۳
$\begin{cases} a = 5q_1 + 2 \\ a = 6q_2 + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6a = 30q_1 + 12 \\ 5a = 30q_2 + 45 \end{cases} \rightarrow a = 30q - 3 \rightarrow a = 30r + 27$	۴
$a = 31q + 19 \xrightarrow{\times 2} 2a = 31(2q) + 38 \xrightarrow{-1} 2a - 1 = 31(2q) + 37$ $\rightarrow 2a - 1 = 31(2q) + 31 + 6 \rightarrow 2a - 1 = 31(2q + 1) + 6 \rightarrow 2a - 1 = 31k + 6$ $\rightarrow r = 6$	۵
<p>۶ هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:</p> $p = 6k \quad (1)$ $p = 6k + 1 \quad (2)$ $p = 6k + 2 = 2(3k + 1) \quad (3)$ $p = 6k + 3 = 3(2k + 1) \quad (4)$ $p = 6k + 4 = 2(3k + 2) \quad (5)$ $p = 6k + 5 \quad (6)$ <p>در حالات ۱ و ۳ و ۵ نشان می دهد که p زوج است و در حالات ۲ بر ۳ بخش پذیر است. که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ و ۴ می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود.</p>	۶
$\begin{cases} m = 17q + 5 \\ n = 17q' + 3 \end{cases} \rightarrow 2m - \Delta n = 2(17q + 5) - 5(17q' + 3) = 17(2q - 5q') - 5$ $\rightarrow 2m - \Delta n = 17(2q - 5q' - 1) + 12 \rightarrow r = 12$	۷

$\left. \begin{aligned} a &= 17q + 5 \\ b &= 17q' + 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow 2a - 5b = 2(17q + 5) - 5(17q' + 3)$ $\rightarrow 2a - 5b = 2(17q) - 5(17q') + 10 - 15 = 2(17q) - 5(17q') - 5$ $\rightarrow 2a - 5b = 17(2q - 5q') - 17 + 12 = 17(2q - 5q' - 1) + 12 = 17k + 12 \rightarrow r = 12$	۸
<p>عدد p به یکی از صورتهای زیر نوشته می شود.</p> $p = 4k \quad (۱)$ $p = 4k + 1 \quad (۲)$ $p = 4k + 2 \quad (۳)$ $p = 4k + 3 \quad (۴)$ <p>در حالت های (۱) و (۳)، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود.</p>	۹
<p>طبق الگوریتم تقسیم وقتی خارج قسمت تقسیم a بر ۳ باشد. در این صورت یکی از حالت های زیر را داریم :</p> $a = 3k$ $a = 3k + 1 \rightarrow a + 2 = 3(k + 1)$ $a = 3k + 2 \rightarrow a + 4 = 3(k + 2)$ <p>که در هر مورد بر ۳ بخش پذیر هستند.</p>	۱۰
$a = 2k + 1 \rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 = 4(2q) + 1$ $= 8q + 1 \rightarrow r = 1$	۱۱
$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b \rightarrow a - bq = r \xrightarrow{n a, n b} n a - bq \rightarrow n r$	۱۲

افراز مجموعه‌ی اعداد صحیح

نادرست	۱
	۲

درس ۳: بخش پذیری در اعداد صحیح و کاربرد ها

همنهستی و ویژگی های آن

$1 \dots \equiv 6 \xrightarrow{6 \equiv -1} 1 \dots \equiv -1 \rightarrow (1 \dots)^{13} \equiv (-1)^{13} \rightarrow (1 \dots)^{13} \equiv -1$ $\rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 \equiv -1 \times 12 \rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 \equiv -12$ $\rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv -12 + 10 \rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv -2$ $\rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv -2 + 7 \rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv 5 \rightarrow r = 5$	۱														
<p>روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می گیریم. ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله‌ی اول مهر تا ۱۲ بهمن است. که روی هم ۱۳۱ روز می شوند. حال باقی مانده‌ی تقسیم ۱۳۱ بر ۷ را تعیین می کنیم که برابر ۵ است. لذا ۱۲ بهمن متناظر با روز پنجشنبه است.</p> <table border="1" data-bbox="357 904 1201 1050"> <thead> <tr> <th>شنبه</th> <th>یک شنبه</th> <th>دوشنبه</th> <th>سه شنبه</th> <th>چهارشنبه</th> <th>پنجشنبه</th> <th>جمعه</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>۵</td> <td>۶</td> </tr> </tbody> </table>	شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۲
شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه									
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶									
<p>الف : درست ب : درست</p>	۳														
<p>چهارشنبه</p>	۴														
$27 \equiv 1 \rightarrow (27)^{13} \equiv (1)^{13} \rightarrow (27)^{13} + 19 \equiv 1 + 19 \rightarrow (27)^{13} + 19 \equiv 20 \rightarrow (27)^{13} + 19 \equiv 7$	۵														
$13 \equiv -4 \rightarrow (13)^2 \equiv (-4)^2 \rightarrow (13)^2 \equiv 16 \xrightarrow{16 \equiv -1} (13)^2 \equiv -1$ $\rightarrow (13^2)^{11} \equiv (-1)^{11} \rightarrow (13)^{22} \equiv -1 \xrightarrow{16 \equiv -1} (13)^{22} \equiv -1 + 17 \rightarrow (13)^{22} \equiv 16$ $\rightarrow r = 16$	۶														
$a \equiv b \rightarrow m a - b \rightarrow m c(a - b) \rightarrow m ac - bc \rightarrow ac \equiv bc$	۷														

$49 \equiv 4 \rightarrow 7^2 \equiv 4 \rightarrow (7^2)^2 \equiv (4)^2 \rightarrow 7^4 \equiv 16 \rightarrow 7^4 \equiv 1 \rightarrow (7^4)^7 \equiv (1)^7 \rightarrow 7^{28} \equiv 1$ $\frac{7^2 \equiv 4}{7^2 \equiv 4} \rightarrow 7^{28} \times 7^2 \equiv 1 \times 4 \rightarrow 7^{30} \equiv 4$	۸
<p>رقم یکان هر عدد طبیعی برابر باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۱۰ است. می‌دانیم که $32 \equiv 2$ پس:</p> $25 \equiv 2 \rightarrow (25)^2 \equiv (2)^2 \rightarrow 2^{10} \equiv 4 \rightarrow 2^{10} \times 2 \equiv 4 \times 2 \rightarrow 2^{11} \equiv 8$ $\rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 8 + 7 \rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 15 \xrightarrow{15 \equiv 5} 2^{11} + 7 \equiv 5$ <p>لذا رقم یکان برابر ۵ است.</p>	۹
$\frac{m}{a \equiv b} \rightarrow m a - b \rightarrow m (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$ $\rightarrow m a^n - b^n$	۱۰
$\begin{cases} 38^{36} \equiv 0 \\ 19 \equiv 3 \end{cases} \rightarrow 38^{36} + 19 \equiv 0 + 3 \rightarrow 38^{36} + 19 \equiv 3$	۱۱
$1000 \equiv -1 \rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \rightarrow r = 2$	۱۲
<p>درست</p>	۱۳
$4a - 7 \equiv 3a - 5 \rightarrow a \equiv 2 \rightarrow 9a + 6 \equiv 24 \rightarrow 9a + 6 \equiv 4 \rightarrow r = 4$	۱۴
$\frac{m}{d} \\ a \equiv b$	۱۵

معادله‌ی همنهشتی

$3x \equiv 13 \rightarrow 3x \equiv 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \equiv 2 \rightarrow x = 7k + 2$	۱
--	---

$4x \equiv 17 \rightarrow 4x \equiv 15 + 2 \rightarrow 4x \equiv 2 \rightarrow 4x \equiv 2 + 10 \rightarrow 4x \equiv 12$ $\xrightarrow{(4,5)=1} x \equiv 3 \rightarrow x = 5k + 3$	۲
نادرست	۳
$2 \equiv 35 \xrightarrow{11} 5x \equiv 2 \rightarrow 5x \equiv 35 \xrightarrow{(5,11)=1} x \equiv 7 \rightarrow x = 11k + 7$	۴
نادرست، معادله‌ی $2x \equiv 10$ دارای جواب است در حالی که $(2,10) = 2 \nmid 3$	۵
$8x \equiv 20 \rightarrow 8x \equiv 20 + 12 \rightarrow 8x \equiv 32 \xrightarrow{(8,12)=4} x \equiv 4 \rightarrow x = 3k + 4$	۶
$7x \equiv 1 \rightarrow 7x \equiv 4 \times 5 + 1 \rightarrow 7x \equiv 21 \xrightarrow{(7,4)=1} x \equiv 3 \rightarrow x = 4k + 3$	۷
نادرست	۸

معادله‌ی سیاله

$\begin{aligned} 5x + 2y = 18 &\rightarrow 2y \equiv 18 \xrightarrow{(2,5)=1} y \equiv 9 \rightarrow y \equiv 5 + 4 \rightarrow y \equiv 4 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} y = 5k + 4 \\ 5x + 2y = 18 &\xrightarrow{y=5k+4} 5x + 2(5k+4) = 18 \rightarrow x = -2k + 2 \end{aligned}$	۱
$\begin{aligned} 7x \equiv 11 &\rightarrow 7x \equiv 11 + 2 \times 5 \rightarrow 7x \equiv 21 \xrightarrow{(7,5)=1} x \equiv 3 \rightarrow x = 5k + 3 \quad k \in \mathbb{Z} \\ 7x + 5y = 11 &\xrightarrow{x=5k+3} 7(5k+3) + 5y = 11 \rightarrow y = -7k - 2 \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$	۲
$2x + 5y = 29 \rightarrow 2x \equiv 29 \rightarrow 2x \equiv 4 \rightarrow x = 5k + 2 \rightarrow y = 5k + 2$	۳
$\begin{aligned} 13y \equiv 7 &\xrightarrow{9} 13y \equiv 4, \quad 7 \equiv 16 \xrightarrow{9} 4y \equiv 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \equiv 4 \\ \rightarrow y = 9k + 4, \quad x = -13k - 5 \end{aligned}$	۴

الف :	۵
معادله دارای جواب است. $\rightarrow 19 \mid 1, (3, 4) = 1$	
ب :	
$4x + 3y = 19 \rightarrow 4x \equiv 19, 19 \equiv 1 \rightarrow 4x \equiv 1 \rightarrow 4x \equiv 1 + 3 \rightarrow 4x \equiv 4$	
$\rightarrow x \equiv 1 \rightarrow x = 3k + 1 \quad k \in Z$	
$4x + 3y = 19 \xrightarrow{x=3k+1} 4(3k+1) + 3y = 19 \rightarrow 3y = -12k + 15$	
$\xrightarrow{\div 3} y = -4k + 5$	
	۶
$2x \equiv 19 \xrightarrow{19 \equiv 4} 2x \equiv 4 \xrightarrow{(2,5)=1} x \equiv 2 \rightarrow x = 5k + 2 \rightarrow y = -2k + 3$	
	۷
$2y \equiv 18 \xrightarrow{(2,5)=1} y \equiv 9 \rightarrow y \equiv 4 \rightarrow y = 5k + 4$	
$5x + 2y = 18 \rightarrow 5x + 2(5k + 4) = 18 \rightarrow x = -2k + 2$	
	۸
$6x \equiv 185 \rightarrow 6x \equiv (23 \times 7) + 24 \rightarrow 6x \equiv 24 \xrightarrow{(6,7)=1} x \equiv 4 \rightarrow x = 7k + 1$	
$6x + 7y = 185 \rightarrow 6(7k + 1) + 7y = 185 \rightarrow y = -6k + 23$	

تهیه کننده: جابر عامری عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان

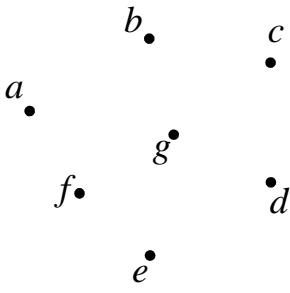
خوزستان

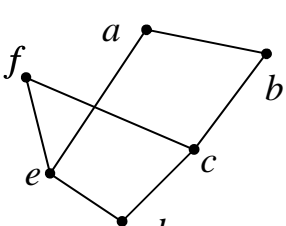
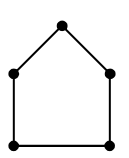
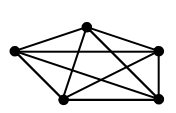
پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

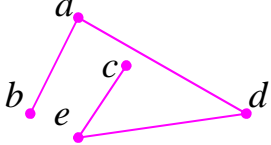
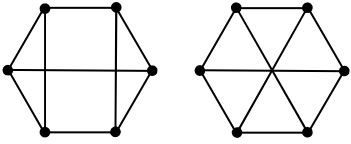
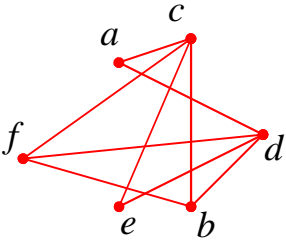
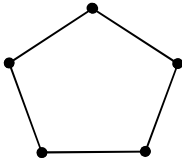
فصل دوّم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

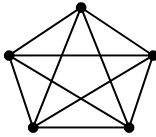
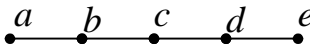
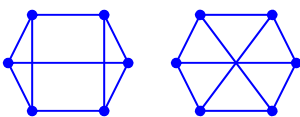
درس ۱: معرفی گراف

تعاریف و اثبات ها

الف : نادرست	ب : درست	۱	
الف : $abgc$	ب : $bcdgb$	۲	
<p>پ : درجه‌ی رأس a $\deg(a) = 5$</p> <p>ت : خیر ، زیرا برای مثال از f به a مسیری وجود ندارد.</p> <p>ث :</p>			
			
<p>۳ اگر مجموع درجات رئوس فرد در گراف $G = (V, E)$ را با A و مجموع درجات رئوس زوج را با B نشان دهیم، خواهیم داشت.</p> $D = \sum_{i=1}^p \deg(v_i) = A + B$ <p>بنابراینکه مجموع درجات رئوس یعنی D زوج است. از طرفی عدد B نیز زوج است (چون از مجموع تعدادی عدد زوج بدست می آید). در نتیجه $A = D - B$ نیز یک عدد زوج می باشد و چون A مجموع تعدادی عدد فرد می باشد. لذا این تعداد باید زوج باشد، پس تعداد رئوس با درجه‌ی فرد، همیشه زوج است.</p>			
الف : $N_G(d) = \{b, e\}$	ب : $q = 6$	ج : مجموع درجات رئوس $= 12$	۴
$q = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \rightarrow p = 9 \rightarrow \Delta = \delta = p - 1 = 8$			۵
			۶
			۲۸

$N_G(b) = \{a, b, c\}$	الف: $p = 6$ و $q = 7$ ج:	۷
$\overline{G} \text{ تعداد یالهای } G + \text{تعداد یال های } \overline{G} = \frac{p(p-1)}{2}$		
$\overline{G} \text{ تعداد یال های } G + 7 = \frac{6(6-1)}{2} \rightarrow \overline{G} \text{ تعداد یال های } G + 7 = 15$		
$\rightarrow \overline{G} \text{ تعداد یال های } G = 8$		
لذا مجموع درجه های رئوس \overline{G} برابر ۱۶ است.		
$\frac{n(n-1)}{2}$		۸
$E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$ و $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$	الف: $abca$ یا $bcd b$ ج: درجه‌ی رأس c در گراف مکمل ۳ خواهد بود.	۹
	نادرست	۱۰
	n رأسی	۱۱
	الف: $N_G[b] = \{a, b, c\}$ ج: b, a, e, f, c, d	۱۲
	الف:  ج:	۱۳
	نادرست	۱۴
$x = c$: ت	الف: $\delta(G) = 1$ ج: $q = 6$ د: $N_G[b] = \{b, a, c, d\}$	۱۵

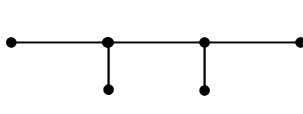
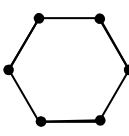
۱۶	الف : گرافی از مرتبه n که در جهی تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k ، $(0 \leq k \leq n)$ باشد. ب : وجود ندارد. زیرا با قبول این حالت داریم $5 \times 3 = 2q \rightarrow \sum_{i=1}^5 \deg v_i = 2q$ که تناقض است.
۱۷	الف : a, c, d, b, e, a ب :
	
۱۸	الف : دو برابر ب : k
۱۹	الف : $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$ ب : دور به طول ۴ $(abeda)$ یا $(adeba)$ پ : مسیر به طول ۳ $(aebc)$ و مسیر به طول ۴ $(adebc)$
۲۰	$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1 \rightarrow 9 + 12 = p - 1 \rightarrow p = 22$
۲۱	الف : $3 \times 6 = 2q \rightarrow q = 9$ ب : رسم یک گراف کافی است.
	
۲۲	به جواب سئوال ۳ رجوع کنید.
۲۳	الف : مرتبه ب : مسیر پ : $\frac{n(n-1)}{2}$ ت : دور
۲۴	الف : $\Delta(G) = 3$ و $\delta(G) = 1$ ب : $bafeb$ پ : ت : $N_G(e) = \{a, b, f\}$
	
۲۵	الف :
	
	ب : چنین گرافی وجود ندارد، زیرا تعداد رئوس با درجه‌ی فرد گراف باید زوج باشد.

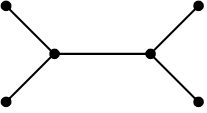
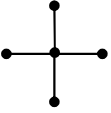
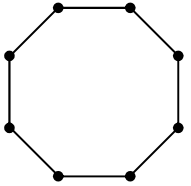
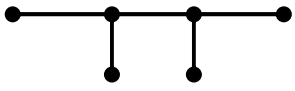
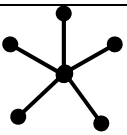
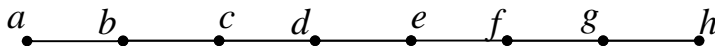
الف : $\Delta(G) = 4$ و $\delta(G) = 0$	ب : $cab c$ و $caec$ و $cedc$	۲۶
پ : ۵	ت : $N_G(e) = \{a, c, d\}$	ث : خیر
۲۷	$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \rightarrow p(p-1) = 20 \rightarrow p = 5$	
۲۸	$\sum_{i=1}^7 \deg(v_i) = 2q \rightarrow 3 \times 7 = 2q \rightarrow 21 = 2q$	و این یعنی ۲۱ عدد زوج است که ممکن نیست. همین جا نتیجه گرفته می شود که چنین گرافی وجود ندارد.
۲۹	$abcd$ و $bcde$	
۳۰	الف : رئوس ب : طوقه پ : مجاور ت : زوج	
۳۱	الف : ۳	ب : $abdca$ و $abca$ و $bdcb$
	توجه : در قسمت (ب) ممکن است، دانش آموز شروع دور را با رأس دیگری آغاز کرده باشد. مثلاً دور $bdcb$ را به فرم $dbcd$ نوشته باشد. به این دوره ها نیز نمره داده شود.	پ : ۴
۳۲	الف : گرافی که درجه‌ی تمام رئوس آن با مساوی و برابر با عدد k باشد.	ب : پ : بله
۳۳	الف) $N_G(c) = \{a, e, d\}$ (ب) رأس f ، ۵	پ) $abecda$ (ت) خیر
۳۴	الف : $abgc$ ب : $bcdgb$ پ : ۵	ت : خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است و هیچ مسیری به سایر رئوس وجود ندارد. ث : $N_G(f) = \{\}$
۳۵	$q = 2p - 3 \rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 3 \rightarrow p = 6$	

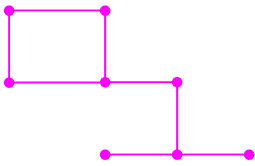
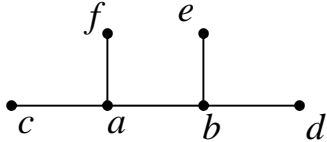
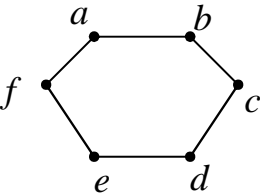
الف) $q - \Delta(G) = 7 - 4 = 3$	۳۶
ب) $abcd$ یا $adbca$	
پ) $q(G) + q(\bar{G}) = \binom{p}{2} \rightarrow q(\bar{G}) = \binom{p}{2} - q(G) = 15 - 7 = 8$	


درس ۲: مدل سازی با گراف

احاطه گری

الف: $\{b, e, h, k\}$	ب: $\{a, c, e, g, i, k\}$	۱
الف: ۳ رأس	ب: $p - 1$	۲
الف: $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$	ب: $\gamma(G) = 3$	۳
ج: $\{v_1, v_3, v_5\}$ و $\{v_2, v_4, v_6\}$		
<p>الف: اگر $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر غیر مینیمال باشد. در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال باقی می ماند. بنابراین عضوی مانند a_1 را در نظر می گیریم. اگر با حذف آن هنوز مجموعه‌ی احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم، در غیر اینصورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم.</p> <p>ب: $A = \{h, g, f, i, j\}$</p>		۴
الف:	ب:	۵
		
۲		۶
الف: درست	ب: درست	۷

 <p>ج :</p>	 <p>ب :</p>	 <p>الف :</p>	۸
$\Delta(G) = 4$ حداکثر تعداد یالها $= \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ حداقل تعداد یالها $= n - 1 = 5 - 1 = 4$			۹
الف : $\{f, d\}$ ب : $\{e, f, g, h\}$			۱۰
۱۱ الف) زیر مجموعه‌ی D از مجموع رئوس گراف G را مجموعه‌ی احاطه گر می نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس موجود در D مجاور باشد. ب) تعداد اعضای مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم گراف G را عدد احاطه گری آن گراف گوئیم .			
الف) $\{c, f, h, j\}$ ب) $\{a, b, f, h\}$ پ) $\{c, f, h\}$			۱۲
۱۳ الف) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$ از طرفی مجموعه‌ی $\{a, g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. بنابراین $\gamma(G) = 2$ است و مجموعه‌ی $\{a, g\}$ همان ۲- مجموعه است . ب) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{3+1} \right\rceil = 3$ از طرفی مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گری برای آن است. از طرفی با کمتر از ۴ رأس نمی توان رئوس گراف را احاطه کرد، بنابراین $\gamma(G) = 4$ است و مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ همان ۴- مجموعه است .			
 <p>ب)</p>			 <p>الف)</p>
 <p>الف :</p> <p>ب : $\{a, d, g\}$ ج : $\{a, d, e, h\}$</p>			۱۵
۱۶ یک مجموعه‌ی احاطه گر غیرمینیمال به صورت $\{a, h, f, b\}$ اکنون به حذف رأس a از آن ، یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال به دست آید.			

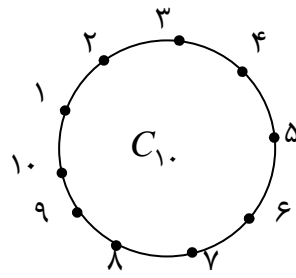
<p>الف: مجموعه‌ی احاطه گر برابر ۴ عضو مانند $\{c, f, h, g\}$ ب: احاطه گر مینیمال مانند $\{c, f, g\}$</p>	<p>۱۷</p>
<p>الف: برای مثال اگر $n = 10$، رسم C_1 یا P_1 کافی است. در این گراف ها $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 4$ ب: در گرافی مشابه گراف زیر $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 2$ است ولی $\gamma(G) = 3$ می باشد.</p> 	<p>۱۸</p>
<p>الف: مینیمم ب: مینیمال</p>	<p>۱۹</p>
<p>الف: گراف روبرو از مرتبه‌ی ۶ و دارای تنها یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا $\{a, b\}$ است. ب: گراف مقابل دارای سه مجموعه‌ی احاطه‌گری به اندازه‌ی ۲ است که عبارتند از $\{a, d\}$ و $\{f, c\}$ و $\{e, b\}$</p>  	<p>۲۰</p>
<p>برای گراف مورد سؤال داریم: $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{10}{3 + 1} \right\rceil = 3 \leq \gamma(G)$ از طرفی مجموعه‌ی $\{g, h, d\}$ یک مجموعه‌ی احاطه برای گراف، لذا: $\gamma(G) \leq 3$ بنابراین $\gamma(G) = 3$</p>	<p>۲۱</p>
<p>$\Delta = 3$ و $n = 8$ و $\left\lceil \frac{8}{3 + 1} \right\rceil = 2 \leq \delta(G)$ مجموعه‌های $\{a, g\}$ یا $\{b, h\}$ یا $\{c, e\}$ یا $\{d, f\}$ مجموعه‌ی احاطه‌گر دو عضوی هستند. بنابراین $\delta(G) = 2$</p>	<p>۲۲</p>
<p>یک مجموعه‌ی احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر مینیمال می نامیم.</p>	<p>۲۳</p>

۲۴	<p>با توجه به اینکه $\left\lfloor \frac{8}{3+1} \right\rfloor = 2$، لذا داریم $\delta(G) \geq 2$</p> <p>پس حداقل عدد احاطه گری ۲ است. از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است. پس $\lambda(G) = 2$</p>
۲۵	<p>الف: $\{1, 6, 4\}$ یا $\{1, 5, 7\}$</p> <p>ب: $2 = \left\lfloor \frac{7}{4+1} \right\rfloor$ بنابراین $\gamma(G) \geq 2$ از سوی دیگر $\{2, 5\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$ از این دو نتیجه می توان نوشت که $\gamma(G) = 2$</p>
۲۶	<p>مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم، مجموعه‌ی احاطه گری است که کمترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال مجموعه‌ی احاطه گری است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه گر نیست و می تواند از مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم عضوهای بیشتری داشته باشد.</p>
۲۷	<p>$D = \{a, c, i, d\}$ توجه داشته باشید که این مجموعه تنها جواب این مسئله نمی باشد.</p>
۲۸	<p>طبق قضیه داریم: $2 \leq \gamma(G) = \left\lfloor \frac{10}{4+1} \right\rfloor$ از طرفی مجموعه‌ی $D = \{e, j\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گراست. لذا $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$</p>
۲۹	
۳۰	<p>طبق قضیه‌ی داریم $2 \leq \gamma(G) = \left\lfloor \frac{7}{4+1} \right\rfloor$. از طرفی مجموعه‌ی $D = \{b, e\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$. بنابراین $\gamma(G) = 2$.</p>
۳۱	<p>$D = \{a, e, c, h\}$</p>
۳۲	<p>الف: نادرست ب: نادرست پ: درست ت: درست</p>
۳۳	<p>طبق قضیه‌ی داریم $\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{10}{3+1} \right\rfloor$، از طرفی مجموعه‌ی $D = \{b, e, g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است.</p>

الف) $D = \{1, 4, 7, 10\}$

ب) $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

۳۴



تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

فصل سوم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

یادآوری و تکمیل

$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 7200$	۱
الف) $5! \times 6!$ ب) $5! \times 7!$ ج) $10! \times 2!$	۲
$4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$	۳
الف: $4! \times 6!$ ب: $5! \times 4!$ ج: $3! \times 7!$	۴
الف: $6! \times 5!$ ب: $6! \times 5! \times 2!$	۵
الف: $4! \times 3!$ ب: $4! \times 4!$	۶
الف: $3! \times 3!$ ب: $2! \times 4!$	۷
الف) $6! \times 2!$ ب) $2! \times 7!$	۸
الف) $6! \times 2!$ ب) $2! \times 5!$	۹
$6! \times 3!$	۱۰

معادلات حسابی

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad x_i \geq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$ $\Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$	۱
--	---

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ $\frac{x_i \geq 1, \quad i=1,2,3,4}{\rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10}$ $\rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$ <p>تعداد جواب های صحیح نامنفی</p>	۲
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ $\frac{x_1 = y_1 + 3, \quad x_5 = y_5 + 4}{\rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 12}$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \rightarrow \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = 126$ <p>تعداد جواب های صحیح نامنفی</p>	۳
<p style="text-align: right;">(الف)</p> $\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$ <p>ب) ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل بر می داریم. $8 - 4 = 4$ شاخه گل باقی مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می کنیم. لذا تعداد حالات برابر است با:</p> $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$	۴
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ $\rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + x_3 + x_4 + (y_5 + 4) + x_6 = 12$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5$ $\binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5} = 252$ <p>لذا تعداد جواب های مورد نظر برابر است با:</p>	۵
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14 \rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + (y_3 + 4) + x_4 + x_5 = 14$ $\rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 7$ $\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$ <p>لذا تعداد جواب های مورد نظر برابر است با:</p>	۶

$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11, x_2 \geq 2, x_5 \geq 4$ $x_2 = y_2 + 2 \quad \text{و} \quad x_5 = y_5 + 4$ $x_1 + (y_2 + 2) + x_3 + x_4 + (y_5 + 4) = 11 \rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$ <p>جواب صحیح و نامنفی $\binom{5+5+1}{5-1} = \binom{9}{4}$</p>	۷
$x_1, x_3, x_4 \geq 1 \quad \text{و} \quad x_2 \geq 3 \quad \text{و} \quad x_5 \geq 4$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ $\rightarrow (y_1 + 1) + (y_2 + 3) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) + (y_5 + 4) = 17$ $\rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7$ <p>تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$</p> <p style="text-align: right;">روش دوم:</p> $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ $x_2 > 2 \rightarrow x_2 - 2 > 0 \rightarrow x_2 = y_2 + 2$ $x_5 > 3 \rightarrow x_5 - 3 > 0 \rightarrow x_5 = y_5 + 3$ $\rightarrow x_1 + (y_2 + 2) + x_3 + x_4 + (y_5 + 3) = 17$ $\rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 12$ <p>تعداد جواب های طبیعی $\binom{n-1}{k-1} = \binom{12-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$</p>	۸

$y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 1$ $y_3 = x_3 - 4 \geq 0 \rightarrow x_3 = y_3 + 4$ $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 14 \rightarrow (y_1 + 1) + x_2 + (y_3 + 4) + \dots + x_5 = 14$ $\rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + \dots + x_5 = 9$ $\text{تعداد جوابهای صحیح و نامنفی} = \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} = 715$	۹
$y_2 = x_2 - 3, \quad y_2 \geq 0 \quad \text{و} \quad x_5 = 2$ $x_1 + (y_2 + 3) + x_3 + x_4 + 2 + x_6 = 17 \rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 12$ $\text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} \binom{16}{4} =$	۱۰
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \quad : \quad x_1 \geq 1, \quad x_4 > 3, \quad x_6 = 1$ $y_1 = x_1 - 1 : \quad y_1 \geq 0$ $y_4 = x_4 - 4 : \quad y_4 \geq 0$ $y_6 = 1$ $y_1 + 1 + x_2 + x_3 + y_4 + 4 + x_5 + 1 = 12 \rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 6$ $\text{جواب} \binom{10}{4} = 210$	۱۱
$y_1 = x_1 - 3 ; \quad y_1 \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 3$ $y_4 = x_4 - 4 ; \quad y_4 \geq 0 \rightarrow x_4 = y_4 + 4$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \rightarrow (y_1 + 3) + x_2 + x_3 + (y_4 + 4) + x_5 = 15$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 8$ $\text{جواب} \binom{12}{4} = 495$	۱۲

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$ $x_3 \geq 4 \rightarrow y_3 = x_3 - 4, y_3 \geq 0$ $x_6 > 2 \rightarrow y_6 = x_6 - 3, y_6 \geq 0$ $x_1 + x_2 + y_3 + 4 + x_4 + x_5 + y_6 + 3 = 10$ $\rightarrow x_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 + y_6 = 3$ تعداد جواب های صحیح و نامنفی $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3+6-1}{6-1} = \binom{8}{5} = 56$	۱۳
--	----

جایگشت های با تکرار

$p = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} = 3 \times 7!$	۱
روش اول $\binom{9}{2, 3, 4} = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = 126$ روش دوم $\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = \frac{9!}{2! \times 7!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{4!}{4! \times 0!} = 36 \times 35 \times 1 = 126$	۲
۴	۳
$\binom{8}{4, 2} = \frac{8!}{4! \times 2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 1 \times 2} = 140$	۴
$\binom{7}{2, 3, 1, 1} = \frac{7!}{2! \times 3! \times 1! \times 1!} = \frac{7!}{2! \times 3!} = 42$	۵
$\binom{10}{4, 1, 3, 2} = \frac{10!}{4! \times 1! \times 3! \times 2!} = \frac{10!}{4! \times 3! \times 2!}$	۶
$\binom{8}{4} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} = 280$: روش دوم روش اول : $\frac{8!}{3! \times 4! \times 1!} = 280$	۷
$\frac{20!}{5! \times 5! \times 5! \times 5!}$ یا $\binom{20}{5} \binom{15}{5} \binom{10}{5} \binom{5}{5}$	۸

$\binom{7}{2,2,2,1} = \frac{7!}{2! \times 2! \times 2! \times 1!}$	۹
--	---

مربع های لاتین

<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse; margin-right: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td></tr> </table> <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse; margin-right: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td></tr> </table> \Rightarrow <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۳</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۱</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۲</td></tr> </table>	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۱۲	۳۱	۲۳	۳۳	۲۲	۱۱	۲۱	۱۳	۳۲	۱
۱	۳	۲																										
۳	۲	۱																										
۲	۱	۳																										
۲	۱	۳																										
۳	۲	۱																										
۱	۳	۲																										
۱۲	۳۱	۲۳																										
۳۳	۲۲	۱۱																										
۲۱	۱۳	۳۲																										

۱۵	۲
----	---

<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse; margin-right: 20px;"> <tr><td></td><td style="text-align: center;">ش</td><td style="text-align: center;">ی</td><td style="text-align: center;">د</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">A</td><td style="text-align: center;">۱</td><td style="text-align: center;">۲</td><td style="text-align: center;">۳</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">B</td><td style="text-align: center;">۳</td><td style="text-align: center;">۱</td><td style="text-align: center;">۲</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">C</td><td style="text-align: center;">۲</td><td style="text-align: center;">۳</td><td style="text-align: center;">۱</td></tr> </table> <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse; margin-right: 20px;"> <tr><td></td><td style="text-align: center;">ش</td><td style="text-align: center;">ی</td><td style="text-align: center;">د</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">A</td><td style="text-align: center;">۲</td><td style="text-align: center;">۱</td><td style="text-align: center;">۳</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">B</td><td style="text-align: center;">۱</td><td style="text-align: center;">۳</td><td style="text-align: center;">۲</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">C</td><td style="text-align: center;">۳</td><td style="text-align: center;">۲</td><td style="text-align: center;">۱</td></tr> </table> \Rightarrow <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td></td><td style="text-align: center;">ش</td><td style="text-align: center;">ی</td><td style="text-align: center;">د</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">A</td><td style="text-align: center;">۱۲</td><td style="text-align: center;">۲۱</td><td style="text-align: center;">۳۳</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">B</td><td style="text-align: center;">۳۱</td><td style="text-align: center;">۱۳</td><td style="text-align: center;">۲۲</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">C</td><td style="text-align: center;">۲۳</td><td style="text-align: center;">۳۲</td><td style="text-align: center;">۱۱</td></tr> </table>		ش	ی	د	A	۱	۲	۳	B	۳	۱	۲	C	۲	۳	۱		ش	ی	د	A	۲	۱	۳	B	۱	۳	۲	C	۳	۲	۱		ش	ی	د	A	۱۲	۲۱	۳۳	B	۳۱	۱۳	۲۲	C	۲۳	۳۲	۱۱	۳
	ش	ی	د																																														
A	۱	۲	۳																																														
B	۳	۱	۲																																														
C	۲	۳	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۲	۱	۳																																														
B	۱	۳	۲																																														
C	۳	۲	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۱۲	۲۱	۳۳																																														
B	۳۱	۱۳	۲۲																																														
C	۲۳	۳۲	۱۱																																														

درست	۴
------	---

<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse; margin-right: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td></tr> </table> و <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td></tr> </table>	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۵
۲	۳	۱																	
۱	۲	۳																	
۳	۱	۲																	
۱	۳	۲																	
۳	۲	۱																	
۲	۱	۳																	

<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> </tr> </table> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle; margin: 0 20px;"> $\begin{aligned} & 1 \rightarrow 3 \\ & 2 \rightarrow 2 \\ \Rightarrow & 3 \rightarrow 4 \\ & 4 \rightarrow 1 \end{aligned}$ </div> <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> </tr> </table>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱	۱	۲	۳	۴	۴	۳	۲	۱	۳	۱	۴	۲	۲	۴	۱	۳	۶
۴	۲	۱	۳																														
۳	۱	۲	۴																														
۱	۴	۳	۲																														
۲	۳	۴	۱																														
۱	۲	۳	۴																														
۴	۳	۲	۱																														
۳	۱	۴	۲																														
۲	۴	۱	۳																														
<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td></td> <td style="padding: 0 10px;">۱</td> <td style="padding: 0 10px;">۲</td> <td style="padding: 0 10px;">۳</td> <td style="padding: 0 10px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">C_1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_4</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">C_2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_3</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">C_3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_2</td> </tr> <tr> <td style="padding-right: 5px;">C_4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">T_1</td> </tr> </table>		۱	۲	۳	۴	C_1	T_1	T_2	T_3	T_4	C_2	T_4	T_1	T_2	T_3	C_3	T_3	T_4	T_1	T_2	C_4	T_2	T_3	T_4	T_1	۷							
	۱	۲	۳	۴																													
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4																													
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3																													
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2																													
C_4	T_2	T_3	T_4	T_1																													
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۱۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۲۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۳۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۳۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۱۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۲۱</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۲۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۳۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; color: magenta;">۱۲</td> </tr> </table>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	این دو مربع متعامدند، زیر در جدول تلفیقی شده از این دو مربع، عدد تکراری وجود ندارد.	۸																						
۱۱	۲۲	۳۳																															
۳۲	۱۳	۲۱																															
۲۳	۳۱	۱۲																															
<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۴</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td> </tr> </table>	۳	۲	۱	۴	۱	۴	۳	۲	۴	۱	۲	۳	۲	۳	۴	۱	با استفاده از جایگشت مناسب مربع لاتین جدید خواهیم داشت. (مثلاً با جایگشت $1 \rightarrow 2$ و $2 \rightarrow 3$ و $3 \rightarrow 4$ و $4 \rightarrow 1$) مربع جدید به صورت مقابل در خواهد آمد	۹															
۳	۲	۱	۴																														
۱	۴	۳	۲																														
۴	۱	۲	۳																														
۲	۳	۴	۱																														

۱۰ ابتدا در هر مورد، مربع های داده شده را تلفیق می کنیم. (برهم نهی)

الف :

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

با مشاهدهی مربع تلفیقی ، معلوم می شود که دو مربع داده شده متعامدند.

زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع تلفیقی وجود ندارد.

ب :

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

با مشاهدهی مربع تلفیقی ، معلوم می شود که دو مربع داده شده متعامد نیستند.

زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع تلفیقی وجود دارد.

۱۱ برای برنامه ریزی این مسئله کافی است، دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین ها و مربع B مشخص کنندهی ایاف است.

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۱	۳	۲	= A
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۲	۱	۳	

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۲	۱	۳	= B
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۱	۳	۲	

 \Rightarrow

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۱	۳	۲	= A
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۲	۱	۳	

	W_1	W_2	W_3	
روز اول	۲	۱	۳	= B
روز دوم	۳	۲	۱	
روز سوم	۱	۳	۲	

 \Rightarrow

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

در مربع تلفیقی، عدد سمت چپ هر درایه نشان دهندهی ماشین و عدد سمت راست آن نشان دهندهی نوع ایاف است.

<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۱۲		
۱	۲	۳	۴																
۴	۱	۲	۳																
۳	۴	۱	۲																
۲	۳	۴	۱																
<p style="text-align: center;">در مربع تلفیقی مقابل، اعداد دو رقمی تکراری نداریم، پس دو مربع داده شده متعامد هستند.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr> </table>	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۱۳									
۱۱	۲۲	۳۳																	
۳۲	۱۳	۲۱																	
۲۳	۳۱	۱۲																	
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۱۴		
۱	۲	۳	۴																
۴	۱	۲	۳																
۳	۴	۱	۲																
۲	۳	۴	۱																
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: left;"> <p>۱ → ۳ ۲ → ۱ ۳ → ۲ ((الف))</p> </div> <div style="text-align: center;"> $B =$ <table border="1" style="margin-left: 10px;"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> </div> <div style="text-align: center;"> <p>((ب))</p> <table border="1" style="margin-left: 10px;"> <tr><td style="background-color: yellow;">۲۱</td><td>۱۳</td><td>۳۲</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۲۱</td><td>۱۳</td></tr> <tr><td>۱۳</td><td>۳۲</td><td style="background-color: yellow;">۲۱</td></tr> </table> </div> </div> <p style="text-align: center;">متعامد نیستند، زیرا در مربع آخر، عدد دو رقمی تکراری داریم.</p>	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۲۱	۱۳	۳۲	۳۲	۲۱	۱۳	۱۳	۳۲	۲۱	۱۵
۱	۳	۲																	
۲	۱	۳																	
۳	۲	۱																	
۲۱	۱۳	۳۲																	
۳۲	۲۱	۱۳																	
۱۳	۳۲	۲۱																	
$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A \ominus B = \begin{bmatrix} ۲۱ & ۳۳ & ۱۲ \\ ۱۲ & ۲۱ & ۳۳ \\ ۳۳ & ۱۲ & ۲۱ \end{bmatrix}$	۱۶																		

الف : ۱۷	<div style="display: flex; justify-content: center; gap: 20px;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> </div> <p>ب : فقط دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد که متعامد نیستند. زیرا در مربعی تلفیقی آنها عدد تکراری وجود دارد.</p> <div style="display: flex; justify-content: center; gap: 20px;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>۱۲</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۱</td><td>۱۲</td></tr> </table> </div>	۱	۲	۲	۱	۲	۱	۱	۲	۱۲	۲۱	۲۱	۱۲						
۱	۲																		
۲	۱																		
۲	۱																		
۱	۲																		
۱۲	۲۱																		
۲۱	۱۲																		
۱۸	<div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> \Rightarrow <table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td>۱۲</td><td>۲۳</td><td>۳۱</td></tr> <tr><td>۳۳</td><td>۱۱</td><td>۲۲</td></tr> <tr><td>۲۱</td><td>۳۲</td><td>۱۳</td></tr> </table> </div> <p>این دو مربع (لاتین)، متعامدند، زیرا در مربع آخر هیچ عددی تکراری وجود ندارد.</p>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱۲	۲۳	۳۱	۳۳	۱۱	۲۲	۲۱	۳۲	۱۳
۱	۲	۳																	
۳	۱	۲																	
۲	۳	۱																	
۱۲	۲۳	۳۱																	
۳۳	۱۱	۲۲																	
۲۱	۳۲	۱۳																	

درس ۲: روش هایی برای شمارش

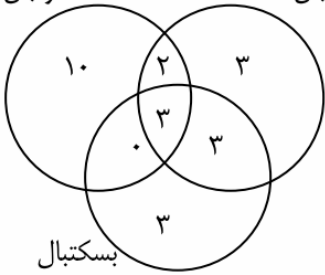
اصل شمول و عدم شمول

۱	<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ی ۳ عضوی مانند B</p> $A_i = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3\}$ $ S = B ^{ A } = 3^4 = 81$ $ A_1 = A_2 = A_3 = 2^4 = 16$ $ A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 1$ $ A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0$ $ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} $ $= S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 81 - (3 \times 16) + (3 \times 3) - 0 = 36$
---	--

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[\frac{90}{2} \right] + \left[\frac{90}{3} \right] - \left[\frac{90}{6} \right]$ $= 45 + 30 - 15 = 60$	۲
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[\frac{200}{4} \right] + \left[\frac{200}{3} \right] - \left[\frac{200}{12} \right]$ $= 50 + 66 - 16 = 100$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 200 - 100 = 100$	۳
<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ی سه عضوی مانند B است. طوری که برد این توابع همه اعضای B باشند. (به هر عضو حداقل یک عضو از A نسبت داده شود).</p> <p>پس جواب این مسئله می شود:</p> $ A = 4 \text{ و } B = 3$ $3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36$	۴
<p>مجموعه ی اعداد بخش پذیر بر ۴ را A و مجموعه ی اعداد بخش پذیر بر ۷ را B می نامیم. بنابراین:</p> $n(A) = \left[\frac{400}{4} \right] = 100 \text{ و } n(B) = \left[\frac{400}{7} \right] = 57 \text{ و } n(A \cap B) = \left[\frac{400}{4 \times 7} \right] = 14$ <p style="text-align: right;">(الف)</p> $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 100 - 14 = 86$ <p style="text-align: right;">(ب)</p> $n(A - B) + n(B - A) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(B - A)$ $= 100 - 14 + 57 - 14 = 129$	۵

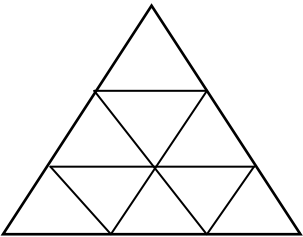
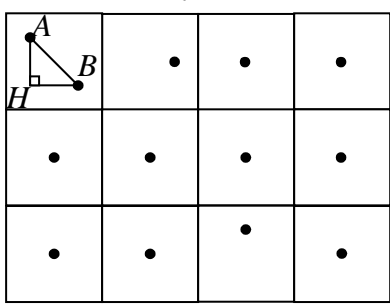
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[\frac{350}{4} \right] + \left[\frac{350}{6} \right] - \left[\frac{350}{12} \right]$ $= 87 + 58 - 29 = 116$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 350 - 116 = 234$	۶
درست	۷
<p>$1 \leq j \leq 3$, $A_j = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}$</p> <p>$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3\}$</p> <p>$S = 3^4$ و $A_1 = A_2 = A_3 = 2^4$ و $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 1^4$</p> <p>و $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0^4 = 0$</p> <p>$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 + A_2 + A_3 - A_1 \cap A_2 - A_1 \cap A_3 - A_2 \cap A_3 + A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 16 + 16 + 16 - 1 - 1 - 1 + 0 = 45$</p> <p>$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 81 - 45 = 36$</p> <p style="text-align: right;">روش دوم :</p> <p>$A = 4$ و $B = 3$</p> $3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36$	۸
<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های یک به یک از مجموعه ی ۴ عضوی مجموعه ای ۸ عضوی</p> $({}_8)_4 = \frac{8!}{4!} = 1680$	۹

$A = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \rightarrow A = \left[\frac{100}{6} \right] = 16$ $B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \rightarrow B = \left[\frac{100}{10} \right] = 10$ $A \cap B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \rightarrow A \cap B = \left[\frac{100}{30} \right] = 3$ $ A \cup B = A + B - A \cap B = 16 + 10 - 3 = 23$	۱۰
$ S = 200 \text{ و } A = \left[\frac{200}{2} \right] = 100 \text{ و } B = \left[\frac{200}{7} \right] = 28 \text{ و } A \cap B = \left[\frac{200}{14} \right] = 14$ $ A \cup B = A + B - A \cap B = 100 + 28 - 14 = 114$ $ \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = S - A \cup B = 200 - 114 = 86$	۱۱
<p>الف : $3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 45 = 36$</p> <p>ب : $(6)_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$</p>	۱۲
<p>حل مسأله معادل با یافتن تعداد تابع ممکن از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۸ عضوی است که برابر با 8^4 است.</p>	۱۳
$P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5 \times 4 = 120$	۱۴
$ F \cup V = S - F \cup V = 25 - (15 + 14 - 9) = 5$	۱۵
$A = \{n \in S \mid n = 5k, k \in Z\} \rightarrow n(A) = \left[\frac{400}{5} \right] = 80$ $B = \{n \in S \mid n = 7k, k \in Z\} \rightarrow n(B) = \left[\frac{400}{7} \right] = 57$ $A \cap B = \{n \in S \mid n = 35k, k \in Z\} \rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{400}{35} \right] = 11$ $ A \cup B = A + B - A \cap B = 80 + 57 - 11 = 126$ $ \overline{A \cup B} = S - A \cup B = 400 - 126 = 274$	۱۶

<p style="text-align: center;">فوتبال والیبال</p>  <p style="text-align: center;">بسکتبال</p> <p>فقط در یک رشته = $10 + 3 + 3 = 16$</p>	۱۷
<p>الف) $3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 36$ ب) $P(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680$</p>	۱۸
<p>$A = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 4k\} \rightarrow A = \left[\frac{200}{4} \right] = 50$</p> <p>$B = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 7k\} \rightarrow B = \left[\frac{200}{7} \right] = 28$</p> <p>$A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 \mid n = 28k\} \rightarrow A \cap B = \left[\frac{200}{28} \right] = 7$</p> <p>$A \cap B' = A - A \cap B = 50 - 7 = 43$</p>	۱۹
<p>$A = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 4k \ (k \in N)\} \rightarrow A = \left[\frac{300}{4} \right] = 75$</p> <p>$B = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 5k \ (k \in N)\}$</p> <p>$A \cap B = \{1 \leq n \leq 300 \mid n = 20k \ (k \in N)\} \rightarrow A \cap B = \left[\frac{300}{20} \right] = 15$</p> <p>$A - B = A \cap B' = A - A \cap B = 75 - 15 = 60$</p>	۲۰

اصل لانه کبوتری

<p style="text-align: center;">$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19$</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> $\begin{array}{r} 6 \quad \quad 4 \\ \hline 4 \quad \quad 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1+1=2 \end{array}$ </div> <div> <p>طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می باشد. ($n = 365$)</p> <p>بنابراین تعداد کبوترها برابر است با $kn + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936$</p> </div> </div>	۱
--	---

<p>تعداد کبوترها : ۵۰۵ دانش آموز</p> <p>تعداد لانه ها : $7 \times 12 = 84$</p> $\begin{array}{r} 505 \\ - 84 \\ \hline 504 \\ - 6 \\ \hline 1 \end{array}$ <p>$6+1=7$</p>	<p>۲</p> <p>طبق اصل لانه کبوتر لاقل ۷ نفر آنها در روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.</p>
<p>در این مسئله $7 = k + 1$ یعنی $k = 6$ است و تعداد لانه ها همان تعداد ماه های سال یعنی $n = 12$ است. طبق اصل لانه کبوتری، تعداد کبوترها یا معادل آن تعداد دانش آموزان، حداقل باید برابر $kn + 1 = (6 \times 12) + 1 = 73$ باشد.</p>	<p>۳</p>
	<p>۴</p> <p>مطابق شکل، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع (با ضلع هایی به طول ۱ واحد) تقسیم می کنیم. حال نقاط را به عنوان ۱۰ کبوتر و مثلث های کوچک را به عنوان ۹ لانه در نظر می گیریم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند، یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت. از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث ها ۱ واحد می باشد، فاصله ی بین دو نقطه ی درون مثلث از ۱ واحد کمتر است.</p>
<p>تعداد لانه ها : ۱۲ مربع مانند شکل زیر</p> <p>تعداد کبوترها : ۱۳ نقطه</p> 	<p>۵</p> <p>طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می گیرند. پس :</p> $\begin{cases} AH < 2 \\ BH < 2 \end{cases} \rightarrow AH^2 + BH^2 < 8 \rightarrow AB^2 < 8 \rightarrow AB < \sqrt{8}$
<p>تعداد کبوترها برابر ۴۳ و تعداد لانه ها برابر ۴۲ می باشد و می توان لانه ها را به صورت زیر در نظر گرفت:</p> <p>نقطه ، ، $\overbrace{\text{نقطه}}^3$ ، $\overbrace{\text{نقطه}}^2$ ، $\overbrace{\text{نقطه}}^1$</p> <p>۴۲،۴۳ ۳،۸۲ ۲،۸۳ ۱،۸۴</p>	<p>۶</p> <p>چنانچه قرار باشد، کبوترها، لانه ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می گیرند و مجموعشان ۸۵ است.</p>
<p>در این مسئله $7 = k + 1$ پس $k = 6$ و تعداد لانه ها ۱۲ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می بایست $kn + 1 = (6)(12) + 1 = 73$ باشد.</p>	<p>۷</p>

$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19$ و $n = 7$ تعداد لانه ها $nk + 1 = (7)(19) + 1 = 133 + 1 = 134$ تعداد کبوترها بنابراین حداقل ۱۳۴ نفر باید در سالن باشند.	۸
هر فصل تولد را لانه فرض می کنیم که برابر ۴ است. همچنین هر فرد خانواده را معادل کبوتر قرار می دهیم که برابر ۵ است. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می گیرند. به عبارتی دیگر در یک فصل به دنیا آمده اند.	۹
$k + 1 = 3 \rightarrow k = 2$, $32 \times 31 = 992$ تعداد لانه ها $2 \times 992 + 1 = 1985$ تعداد کبوترها	۱۰
$k + 1 = 5 \rightarrow k = 4$ $kn + 1 = 54 \rightarrow 4n = 53$ $n = \left[\frac{53}{4} \right] = 13$	۱۱
$k + 1 = 20 \rightarrow k = 19 \rightarrow kn + 1 = 19(17) + 1 = 134$	۱۲
برای این که مجموع دو عدد طبیعی زوج باشد، یا باید هر دو عدد زوج باشند و یا هر دو فرد باشند. بنابراین اگر تعداد لانه ها برابر ۲ و تعداد کبوترها برابر ۳ باشد. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که هر دو کبوتر در آن قرار می گیرد. یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود که مجموعشان زوج خواهد شد.	۱۳

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان