((فصل سوّم : بردارها))

***

درس۱ : معرفی فضای سه بعدی

(*) فضای دو بعدی

(*) فضای سه بعدی

۱	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

نقطه‌ی $A(۲,-۳,۰)$ روی صفحه‌ی xoy قرار دارد.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۲ : به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : معادله‌ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۲,۳,۴)$ بگذرد و با صفحه‌ی xoy موازی باشد.

ب : معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟

پ : در فضای $R^۳$ ، نقطه‌ی A به طول ۲ روی محور طول ها و نقطه‌ی $B(-۴,۶,-۳)$ مفروض اند. مختصات نقطه‌ی وسط AB را بیابید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۵ نمره

۳ : نقاط $A(۲,۱,۳)$ و $B(-۱,۱,۳)$ در فضای $R^۳$ مفروض اند. معادلات مربوط به پاره خط AB را بنویسید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

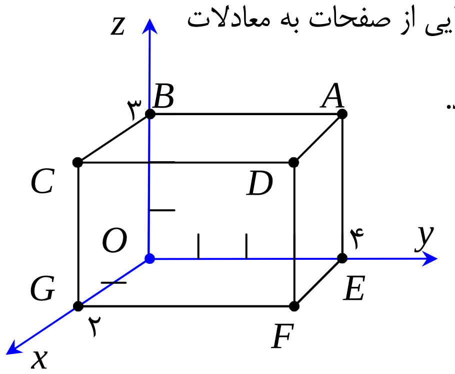
۴ : نقاط $A(۳,۱,۲)$ و $B(۳,-۲,۲)$ در $R^۳$ مفروض اند.

الف: طول پاره خط AB را به دست آورید.

ب : معادلات مربوط به پاره خط AB را بنویسید.

۵	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : وجه های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل مقابل، قسمت هایی از صفحات به معادلات $(x=۰\ ,\ x=۲)$ و $(y=۰\ ,\ y=۴)$ و $(z=۰\ ,\ z=۳)$ هستند.



الف : مختصات نقطه‌ی A را مشخص کنید.

ب : معادلات مربوط به یال AD و وجه $CDFG$ را بنویسید.

۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۶ : درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

نقطه‌ی $(۰\ ,-۱\ ,-۲)$ روی صفحه‌ی yoz قرار دارد.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱ نمره

۷ : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} y=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله‌ی $y=۰$ دارد؟ چرا؟

۸	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۸ :

الف : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ در فضای $R^۲$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار $x=۰$ دارد؟

ب : اگر $\vec{a}=(۲,-۱,۳)$ و $\vec{b}=\vec{i}+۲\vec{j}$ باشد. اندازه‌ی بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ را به دست آورید.

۹	دی ۱۳۹۹	۱ نمره

۹ : نقاط $A(۱,۲,۱)$ و $B(۲,۲,۱)$ و $C=(۳,۲,-۱)$ را در فضا در نظر می گیریم، کدام ها روی خط $\begin{cases} y=۲ \\ z=۱ \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟

۱۰	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۰ : جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید.

در فضای $R^۳$، نقطه‌ی $(-۳,۲,-۵)$ در ناحیه‌ی(کنج) .... دستگاه مختصات قرار دارد.

۱۱	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۱۱ : به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) اگر $y=b$ معادله‌ی صفحه ای در فضای $R^۳$ باشد که از نقطه‌ی $A=(۲,-۳,۴)$ بگذرد، مقدار عددی b چقدر است؟

ب) معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ y=۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات $R^۳$ است؟

پ) در فضای $R^۳$، نقطه‌ی A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی yoz و نقطه‌ی $B(-۴,۶,-۳)$ مفروض اند، مختصات وسط پاره خط AB را بیابید.

۲ نمره	شهریور ۱۴۰۰	۱۲

۱۲ : نقطه‌ی A به طول ۲ روی محور x ها و نقطه‌ی B روی صفحه‌ی xoz به طول ۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه بعدی مفروض اند.

الف : مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.

ب : طول پاره خط AB را محاسبه کنید.

پ : مختصات وسط پاره خط AB را به دست آورید.

❋❋❋

(❋) بردار ها

۱ نمره	دی ۱۳۹۷	۱

۱ : اگر $\vec{a}=۳\vec{i}-۲\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(۳,۱,-۱)$ و $r=۲$ باشد، بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید.

۱ نمره	خرداد ۱۳۹۸	۲

۲ : اگر $\vec{a}=۲\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(۱,۲,۱)$ باشد. طول بردار $\vec{a}-۲\vec{b}$ را به دست آورید.

۰/۷۵ نمره	تیر ۱۳۹۸	۳

۳ : اگر $\vec{a}=۲\vec{j}-۳\vec{k}$ و $\vec{b}=(۰,۱,-۱)$ باشند. بردار $\vec{c}=۲\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید.

۰/۲۵ نمره	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۴

۴ : در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

اگر دو بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ..... باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است.

۱/۵ نمره	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۵

۵ : اگر $\vec{a}=(\sqrt{۸},۲,۴)$ و $\vec{b}=-۶\vec{j}+۸\vec{k}$ و $r=\frac{-۱}{۲}$

الف : طول بردار $r\vec{b}$ را مشخص کنید. ب : بردار $r\vec{a}+\vec{b}$ را بیابید.

۱/۵ نمره	دی ۹۹	۶

۶ : دو بردار $\vec{a}=(۱,۲,-۱)$ و $\vec{b}(۰,۲,-۱)$ را در نظر بگیرید.

الف : بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $R^۳$ واقع است. (شماره‌ی ناحیه ذکر شود.)

ب : طول بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را به دست آورید.

۷	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۷ : بردار $\vec{a}=۲\vec{j}-\vec{k}$ در فضا سه بعدی بر کدام صفحه‌ی مختصات سه بعدی منطبق است؟ از بین گزینه های زیر انتخاب کنید.

xoy و yoz و xoz

❋❋❋

درس۲ : ضرب داخلی و ضرب خارجی دو بردار

(❋) ضرب داخلی و خواص آن

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ثابت کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

حاصل ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، برابر.............. است.

۳	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۳ : برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید : $|\vec{a}.\vec{b}|\le||\vec{a}||\times||\vec{b}||$

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : مقدار m را طوری تعیین کنید که زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(m,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ برابر ۴۵ درجه باشد.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.

اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}.\vec{b}=||\vec{a}||\times||\vec{b}||$

در این صورت زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.

۶	دی ۱۳۹۸	۱ نمره

۶ : اگر بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ باشد، ثابت کنید: $\vec{a}.\vec{a}=||\vec{a}||^۲$

۷	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۷ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم : $\vec{a}.\vec{b}=||\vec{a}||\times||\vec{b}||$ در این صورت $\theta=\frac{\pi}{۲}$ است. (θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.)

۸	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۸ : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(\circ,-1,-1)$ و $\vec{b}=(2,-1,-2)$ را به دست آورید.

۹	دی ۹۹	۱ نمره

۹ : برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ثابت کنید: اگر $\vec{a}.\vec{b}=\circ$ باشد، آنگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند.

۱۰	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۰ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر زاویه‌ی بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آنگاه ضرب داخلی آنها یک عدد حقیقی مثبت است.

۱۱	خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۱ : اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند، به ترتیب با طول های ۱و۲و۳ با این ویژگی که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ مقدار عددی عبارت $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ را به دست آورید.

***

(*) تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : اگر $\vec{c}(-1,1,4)$ و $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{a}=(-1,-3,\circ)$ باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۷۵ نمره

۲ : بردار های $\vec{b}=(-2,1,-5)$ و $\vec{a}=(1,-3,2)$ را در نظر بگیرید و سپس تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۳ : تصویر قائم بردار $\vec{a}=(5,-1,2)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(1,-1,\circ)$ بیابید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۴ : ثابت کنید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$، برابر خود $\vec{a}$ می شود.

۵	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : بردارهای $\vec{a}=(1,2,3)$ و $\vec{b}=(-2,\circ,2)$ مفروض اند:

الف : تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : طول بردار $2\vec{a}-\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۶	خرداد ۱۳۹۹	۲ نمره

۶ : بردارهای $\vec{a}=(-۲,۰,۲)$ و $\vec{b}=۲\vec{j}+۲\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

۱ نمره	دی ۱۳۹۹	۷

۷ : بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ بیابید.

۱/۵ نمره	خرداد ۱۴۰۰	۸

۸ : اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ و $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

۱/۲۵ نمره	شهریور ۱۴۰۰	۹

۹ : تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را بیابید.

❋❋❋

(❋) ضرب خارجی دو بردار

۱/۵ نمره	دی ۱۳۹۷	۱

۱ : بردار های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند. اگر $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۲۶$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۷۲$ باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۰/۷۵ نمره	خرداد ۱۳۹۸	۲

۲ : بردار های $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ را در نظر بگیرید و برداری عمود بر این دو بردار بنویسید.

۱ نمره	خرداد ۱۳۹۸	۳

۳ : ثابت کنید،

دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$

۱/۲۵ نمره	تیر ۱۳۹۸	۴

۴ : بردار های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند. اگر $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۸$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۱۲$ باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۰/۲۵ نمره	شهریور ۱۳۹۸	۵

۵ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

برای بردار غیر صفر $\vec{a}$ در $R^۳$ داریم ، $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$

۱ نمره	شهریور ۱۳۹۸	۶

۶ : اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $R^۳$ باشند، حاصل $\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})$ را به دست آورید.

۷	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در R^3 باشند، حاصل $\vec{k}.(\vec{i}\times\vec{j})$ برابر است با ....

۸	خرداد۱۳۹۹	۲ نمره

۸ : دو بردار $\vec{a}=(3,-2,1)$ و $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف : بردار $\vec{a}$ در کدام از فضای R^3 واقع (شماره‌ی ناحیه ذکر شود.)

ب : طول بردار $\vec{a}+2\vec{b}$ را حساب کنید.

پ : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید.

۹	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را معلوم کنید.

برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، نامساوی $|\vec{a}.\vec{b}|\geq|\vec{a}|\times|\vec{b}|$ برقرار است.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۱۰ : ثابت کنید دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۱۱ : بردارهای $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ را در نظر بگیرید.

الف : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

۱۲	دی ۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

حاصل ضرب خارجی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با هم موازی هستند، برابر بردار .... است.

۱۳	دی ۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۳ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، حاصل $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0$ است.

۱۴	خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۴ : ثابت کنید: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

۱۵	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۵ : برای سه بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به طول های واجد روی محور های مختصات در $R^۲$ ، داریم : $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$

۱۶	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۶ : بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{a}$ به طول های $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۲۶$ و اندازه‌ی ضرب خارجی $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۷۲$ مفروض اند.

اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ کمتر از ۹۰ درجه باشد. مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید.

❋❋❋

(❋) مساحت متوازی الاضلاع و حجم متوازی السطوح

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}=(۱,۰,۱)$ و $\vec{b}=(۰,۱,۱)$ تولید می شود را به دست آورید؟

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۲ : مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(۱,m,-۱۱)$ و $\vec{b}=(۲,۳,-۱)$ و $\vec{c}=(۱,-۱,۳)$ در یک صفحه باشند.

۳	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۳ : اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب۴ و ۶ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$ باشد. مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

۴	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۴ : حجم متوازی السطوحی را محاسبه کنید که توسط بردار های $\vec{c}=(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۱,۰,۲)$ و $\vec{a}=(۲,۱,۰)$ تولید می شود.

۵	تیر ۱۳۹۸	۲ نمره

۵ : سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروض اند.

الف : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ به دست آورید.

ب : حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می شود را به دست آورید.

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : اگر $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۱,۰,-۱)$ و $C(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت این مثلث را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۲/۲۵ نمره

۷ : برداری های $\vec{a}=(-۴,۳,-۵)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ را در نظر بگیرید.

الف : تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.

ج : مساحت مثلث پدید آمده توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

۸	دی۹۹	۱ نمره

۸ : مساحت متوازی الاضلاعی را به دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a}=(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ بوجود می آید.

۹	خرداد ۱۴۰۰	۲ نمره

۹ : سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}(۲,۱,-۲)$ مروض اند.

الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به دست آورید.

ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می شود را به دست آورید.

۱۰	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره

۱۰ : مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۳)$ و $\vec{b}=(۰,m,-۱)$ و $\vec{c}=(۱,-۲,۳)$ در یک صفحه باشند.

❋❋❋

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل سوّم هندسه۳ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس۱ : معرفی فضای سه بعدی

(❋) فضای دو بعدی

(❋) فضای سه بعدی

۱ : درست

۲ : الف : $z=۴$ ب : محور y ها

پ : نقطه‌ی $A(۲,۰,۰)$ و مختصات وسط AB برابر است با $(-۱,۳,-\frac{۳}{۲})$

۳ :

$$\begin{cases} -۱\le x\le ۲ \\ y=۱ \\ z=۳ \end{cases}$$ معادلات مربوط به پاره خط AB

۴ :

$$\|AB\|=\sqrt{(۳-۳)^۲+(-۲-۱)^۲+(۲-۲)^۲}=۳$$ طول پاره خط AB

$$\begin{cases} x=۳ \\ -۲\le y\le ۱ \\ z=۲ \end{cases}$$ معادلات مربوط به پاره خط AB

۵ :

الف) $A(۰,۴,۳)$

ب) $AD:\begin{cases} ۰\le x\le ۲ \\ y=۴ \\ z=۳ \end{cases}$ و $CDFG:\begin{cases} x=۲ \\ ۰\le y\le ۴ \\ ۰\le z\le ۳ \end{cases}$

۶ : درست

۷ : هر نقطه روی محور x ها، عرض و ارتفاع آن صفر است. پس این معادله نشان دهنده محور x ها است.

معادله‌ی $y=۰$ یعنی صفحه‌ی xoz می باشد و محور x ها منطبق بر آن است.

۸ :

الف : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ در فضای $R^۲$ همان معادله‌ی محور y ها است.

معادله‌ی $x=۰$ معادله‌ی صفحه‌ی yz که شامل محور y ها است.

ب :

$$\vec{a}+۲\vec{b}=(۲,-۱,۳)+۲(۱,۲,۰)=(۴,۳,۳)$$

$$\|\vec{a}+۲\vec{b}\|=\sqrt{(۴)^۲+(۳)^۲+(۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۹+۹}=\sqrt{۳۴}$$

۹ : نقاط B و A زیرا در این دو نقطه‌ی $y=۲$ و $z=۱$ می باشد.

۱۰ : ۶

۱۱ : الف) $b=-۳$ ب) محور z ها

پ)

$$A(۰,۲,۳),B(-۴,۶,-۳)\rightarrow\begin{cases} x_M=\dfrac{۰+(-۴)}{۲}=-۲ \\ y_M=\dfrac{۲+۶}{۲}=۴ \\ z_M=\dfrac{۳+(-۳)}{۲}=۰ \end{cases}\rightarrow M(-۲,۴,۰)$$

۱۲ :

الف) $A(۲,۰,۰)$ و $B(۱,۰,۳)$

ب) $\|AB\|=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۰-۰)^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۱۰}$

پ) $M(\frac{۲+۱}{۲},\frac{۰+۰}{۲},\frac{۰+۳}{۲})=(\frac{۳}{۲},۰,\frac{۳}{۲})$

❋❋❋

(❋) بردار ها

۱ :

$$\vec{a}=(۳,۲,-۱)$$

$$۲\vec{b}-\vec{a}=۲\vec{b}-\vec{a}=۲(۳,۱,-۱)-(۳,۲,-۱)=(۶,۲,-۲)+(-۳,-۲,۱)=(۳,۰,-۱)$$

۲ :

$$\vec{a}-۲\vec{b}=(۲,۰,-۱)-(۲,۴,۲)=(۰,-۴,-۳)\rightarrow\|\vec{a}-۲\vec{b}\|=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

۳ :

$$\vec{a}=(۰,۲,-۳)$$

$$\vec{c}=۲\vec{b}-\vec{a}=۲(۰,۱,-۱)-(۰,۲,-۳)=(۰,۲,-۲)+(۰,-۲,۳)=(۰,۰,۱)$$

۴ : موازی

۵ :

$$\vec{b}=-۶\vec{j}+۸\vec{k}=(۰,-۶,۸)$$

$$r\vec{b}=-\frac{۱}{۲}(۰,-۶,۸)=(۰,۳,-۴)\rightarrow\|r\vec{b}\|=\sqrt{(۰)^۲+(۳)^۲+(-۴)^۲}=\sqrt{۰+۹+۱۶}=۵$$

$$r\vec{a}=-\frac{۱}{۲}(\sqrt{۸},۲,۴)=(-\sqrt{۲},-۱,-۲)$$

$$r\vec{a}+\vec{b}=(-\sqrt{۲},-۱,-۲)+(۰,-۶,۸)=(-\sqrt{۲},-۷,۶)$$

۶ : الف: بردار $\vec{a}$ در ناحیه‌ی ۵ واقع است.

ب :

$$۲\vec{a}-\vec{b}=۲(۱,۲,-۱)-(۰,۲,-۱)=(۲,۲,-۱)$$

$$\rightarrow\|۲\vec{a}-\vec{b}\|=\sqrt{۴+۴+۱}=\sqrt{۹}=۳$$

۷ : yoz

❋❋❋

درس۲: ضرب داخلی و ضرب خارجی دو بردار

(❋) ضرب داخلی و خواص آن

۱:

$$\vec{a}.\vec{b}=۰\leftrightarrow\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta=۰\xleftrightarrow{\|\vec{a}\|,\|\vec{b}\|\neq ۰}\cos\theta=۰\leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}$$

۲: صفر ($\vec{a}.\vec{b}=۰$)

۳: برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می توان نوشت، $\|\vec{a}\|\geq ۰$ و $\|\vec{b}\|\geq ۰$ و لذا $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\geq ۰$

از طرفی برای زاویه‌ی θ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامساوی $-۱\leq\cos\theta\leq ۱$ برقرار است. این نامساوی را می توان به صورت $|\cos\theta|\leq ۱$ نیز نوشت. اکنون دو طرف این نامساوی را در عدد نامنفی $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ ضرب می کنیم. خواهیم داشت:

$$\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times|\cos\theta|\leq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times ۱$$
$$\rightarrow|\vec{a}.\vec{b}|\leq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$$

۴:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳=(m)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=m+۱$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(m)^۲+(-۱)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{m^۲+۱+۴}=\sqrt{m^۲+۵}$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{۱+۱+۰}=\sqrt{۲}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}\rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{m+۱}{\sqrt{m^۲+۵}\times\sqrt{۲}}\rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{m+۱}{\sqrt{m^۲+۵}\times\sqrt{۲}}$$

$$\rightarrow ۱=\frac{m+۱}{\sqrt{m^{۲}+۵}} \rightarrow m+۱=\sqrt{m^{۲}+۵} \rightarrow m^{۲}+۲m+۱=m^{۲}+۵$$

$$\rightarrow ۲m=۴ \rightarrow m=۲$$

۵ : صفر

۶ : گیریم که $\vec{a}=(a_{۱},a_{۲},a_{۳})$ پس :

$$\vec{a}.\vec{a}=a_{۱}a_{۱}+a_{۲}a_{۲}+a_{۳}a_{۳}=a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+a_{۳}^{۲}=\|\vec{a}\|^{۲}$$

۷ : نادرست

۸ :

$$\vec{a}.\vec{b}=(۰)(۲)+(۱)(-۱)+(۱)(-۲)=۰+۱+۲=۳$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(۰)^{۲}+(-۱)^{۲}+(-۱)^{۲}}=\sqrt{۰+۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۲)^{۲}+(-۱)^{۲}+(-۲)^{۲}}=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}} \rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow \theta=۴۵^{\circ}$$

۹ :

$$\vec{a}.\vec{b}=\circ \rightarrow \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta=\circ \xrightarrow{\|\vec{a}\|,\|\vec{b}\|\neq\circ} \cos\theta=\circ \rightarrow \theta=\frac{\pi}{۲}$$

۱۰ : نادرست

۱۱ :

$$\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^{۲}=\|\vec{o}\|^{۲} \rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^{۲}=۰$$

$$\longrightarrow \|\vec{a}\|^{۲}+\|\vec{b}\|^{۲}+\|\vec{c}\|^{۲}+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰$$

$$\rightarrow ۱+۴+۹+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰ \rightarrow \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=-۷$$

❋❋❋

(❋) تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر

۱ :

$$\vec{u}=\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶)\rightarrow\|\vec{u}\|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=\sqrt{۴۹}=۷$$

$$\vec{a}.\vec{u}=(-۱)(۲)+(-۳)(-۳)+(۰)(۶)=-۲+۹+۰=۷$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^{۲}}\vec{u}=\frac{۷}{۴۹}(۲,-۳,۶)=\frac{۱}{۷}(۲,-۳,۶)=(\frac{۲}{۷},-\frac{۳}{۷},\frac{۶}{۷})$$

۲ :

$$\vec{a}.\vec{b}=(۱)(-۲)+(-۳)(۱)+(۲)(-۵)=-۲-۳-۱۰=-۱۵$$

$$\|\vec{b}\|^{۲}=(-۲)^{۲}+(۱)^{۲}+(-۵)^{۲}=۴+۱+۲۵=۳۰$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{-۱۵}{۳۰}(-۲,۱,-۵)=\frac{-۱}{۲}(-۲,۱,-۵)=(۱,-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$$

۳ :

$$\vec{a}.\vec{b}=(۵)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۵+۱+۰=۶$$

$$\|\vec{b}\|^{۲}=(۱)^{۲}+(-۱)^{۲}+(۰)^{۲}=۱+۱+۰=۲$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{۶}{۲}(۱,-۱,۰)=۳(۱,-۱,۰)=(۳,-۳,۰)$$

۴ :

$$\vec{a}=r\vec{b}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=r.\vec{b}.\vec{b}=r\|\vec{b}\|^{۲}$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{r\|\vec{b}\|^{۲}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=r\vec{b}=\vec{a}$$

۵ : الف :

$$\vec{a}.\overleftarrow{b}=(۱)(-۲)+(۲)(۰)+(۳)(۲)=-۲+۰+۶=۴$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(-۲)^{۲}+(۰)^{۲}+(۲)^{۲}}=\sqrt{۴+۰+۴}=۲\sqrt{۲}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b} = \frac{۴}{۸}(-۲,۰,۲) = (-۱,۰,۱)$$

ب :

$$۲\vec{a} - \vec{b} = ۲\vec{a} + (-\vec{b}) = ۲(۱,۲,۳) + (۲,۰,-۲) = (۲,۴,۶) + (۲,۰,-۲) = (۴,۴,۴)$$

$$\|۲\vec{a} - \vec{b}\| = \sqrt{(۴)^۲ + (۴)^۲ + (۴)^۲} = \sqrt{۱۶+۱۶+۱۶} = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

۶:

$$\vec{a}.\vec{b} = (-۲)(۰) + (۰)(۲) + (۲)(۲) = ۴$$

$$\vec{a} = (-۲,۰,۲) \rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{۴+۰+۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\vec{b} = (۰,۲,۲) \rightarrow \|\vec{b}\| = \sqrt{۰+۴+۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\|} = \frac{۴}{۲\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-۲,۰,۲) + (۰,۲,۲) = (-۲,۲,۴)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}).\vec{b} = (-۲)(۰) + (۲)(۲) + (۴)(۲) = ۴ + ۸ = ۱۲$$

$$(a+b)' = \frac{(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲} = \frac{۱۲}{۸}(۰,۲,۲) = (۰,۳,۳)$$

۷:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\vec{b} = \frac{۲+۱+۰}{۱+۱+۰}(۱,-,۰) = \frac{۳}{۲}(۱\,,-۱\,,۰)$$

۸:

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{c} = (۳,-۴,۲) + (-۱,۱,۴) = (۲,-۳,۶)$$

$$\vec{a}.\vec{d} = (۱)(۲) + (-۳)(-۳) + (۴)(۶) = ۲ + ۹ + ۲۴ = ۳۵$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{d}}{\|\vec{d}\|^{۲}}\vec{d} = \frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)$$

۹:

$$\vec{a}.\vec{b} = (۲)(۱) + (-۱)(-۱) + (۲)(۰) = ۳$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(۱)^{۲} + (-۱)^{۲} + (۰)^{۲}} = \sqrt{۲}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b} = \frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰) = (\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲},۰)$$

***

(*) ضرب خارجی دو بردار

۱:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta \rightarrow ۷۲ = ۳\times۲۶\times\sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta} = \pm\sqrt{۱-(\frac{۱۲}{۱۳})^{۲}} = \pm\sqrt{۱-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}} = \pm\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶۹}} = \pm\frac{۵}{۱۳}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta = ۳\times۲۶\times(\pm\frac{۵}{۱۳}) = \pm۳۰$$

۲: کافی است یکی از دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{b}\times\vec{a}$ را تعیین کنیم.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} -۳ & ۲ \\ ۱ & -۵ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۵ & -۲ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۱ & -۳ \\ -۲ & ۱ \end{vmatrix}\right) = (۱۳,۱,-۵)$$

$$\vec{b}\times\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} ۱ & -۵ \\ -۳ & ۲ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -۵ & -۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & -۳ \end{vmatrix}\right) = (-۱۳,-۱,۵)$$

۳:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{o} \leftrightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{o}\| \leftrightarrow \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta = ۰$$

$$\xleftrightarrow{\|\vec{a}\|,\|\vec{b}\|\neq 0} \sin\theta = 0 \leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = \pi \leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

۴ :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta \rightarrow 12 = 8\times3\times\sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta = 8\times3\times(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pm12\sqrt{3}$$

۵ : درست

۶ :

$$\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k}) = \vec{i}.\vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1$$

۷ :

$$\vec{k}.(\vec{i}\times\vec{j}) = \vec{k}.\vec{k} = \|\vec{k}\|^2 = 1$$

۸ : الف : بردار $\vec{a}$ در ناحیه‌ی چهارم است.

ب :

$$\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-2,1,-1)$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (3,-2,1) + 2(-2,1,-1) = (-1,0,-1) \rightarrow \|\vec{a} + 2\vec{b}\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

ج :

$$\vec{a}\times\vec{b} = (\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}) = (1,1,-1)$$

۹ : نادرست

۱۰ :

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \xrightarrow{\exists r\in R} \vec{b} = r\,\vec{a} \rightarrow (b_1,b_2,b_3) = (ra_1,ra_2,ra_3)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix} ra_۲ & ra_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ra_۳ & ra_۱ \\ b_۳ & b_۱ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ra_۱ & ra_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix})=(\begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} b_۳ & b_۱ \\ b_۳ & b_۱ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix})$$

$$=(۰,۰,۰)=\vec{o}$$

اثبات برعکس این مطلب هم می توان به شکل زیر نوشت :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{o}\|\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۰$$

$$\xrightarrow{\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta}\sin\theta=۰\rightarrow\theta=۰\quad or\quad\pi$$

لذا $\vec{a}\parallel\vec{b}$

۱۱:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix})=(۲,۲,-۱)$$

۱۲ : صفر

۱۳ : درست

۱۴ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\leftrightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{o}\|\leftrightarrow\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta=\circ$$

$$\xleftrightarrow{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\neq۰}\sin\theta=\circ\rightarrow\theta=\circ\quad or\quad\theta=\pi\leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

۱۵ : درست

۱۶ :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=\|\vec{a}\|^۲\|\vec{b}\|^۲$$

$$\rightarrow(۷۲)^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=(۳)^۲(۲۶)^۲\rightarrow(\vec{a}.\vec{b})^۲=۹۰۰$$

$$\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\pm۳۰\xrightarrow{\theta<۰}\vec{a}.\vec{b}=۳۰$$

❋❋❋

(❋) مساحت متوازی الاضلاع و حجم متوازی السطوح

۱ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-۱,-۱,۱)$$

$$S=\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

۲ :

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}۳ & -۱\\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}\right)=(۸,-۷,-۵)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۱)(۸)+(m)(-۷)+(-۱۱)(-۵)=۸-۷m+۵۵=۰\rightarrow m=۹$$

۳ :

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۱۲}{۴\times۶}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۴\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

روش دوّم :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=\|\vec{a}\|^۲\|\vec{b}\|^۲\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲+(۱۲)^۲=(۴)^۲(۶)^۲$$

$$\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲+۱۴۴=۱۶\times۳۶\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲+۱۴۴=۵۷۶\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲=۴۳۲$$

$$\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲=۱۴۴\times۳\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۱۲\sqrt{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}\times۱۲\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}$$

۴ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix}\right)=(۲,-۴,-۱)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=(۲)(۳)+(-۴)(۲)+(-۱)(۱)=۶-۸-۱=-۳$$

حجم متوازی السطوح $V = |(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}| = |-۳| = ۳$

۵ : الف)

$(\vec{a}+\vec{b}) = (۱,۴,۱)$

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (۱,۴,۱)\times(۲,۱,-۲) = (-۹,۴,-۷)$

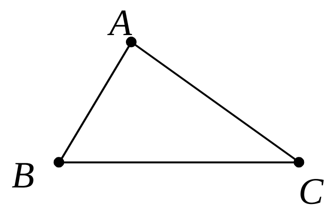
ب)

$(\vec{b}\times\vec{c}) = (-۲,-۲,-۳)$

$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = (۲,۳,۱)\times(-۲,-۲,-۳) = -۱۳$

$V = |\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})| = |-۱۳| = ۱۳$

۶ :



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (۲,-۲,-۱)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (۱,-۳,۱)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-۵,-۳,-۴)$

$S = \frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \frac{۱}{۲}\sqrt{۵۰}$ مساحت مثلث داده شده

۷ : الف :

$\vec{a}.\vec{b} = (-۴)(۱) + (۳)(-۱) + (-۵)(۱) = -۴ - ۳ - ۵ = -۱۲$

$\|\vec{b}\| = \sqrt{(۱)^۲ + (-۱)^۲ + (۱)^۲} = \sqrt{۱+۱+۱} = \sqrt{۳}$

$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b} = \frac{-۱۲}{۳}(۱,-۱,۱) = -۴(۱,-۱,۱) = (-۴,۴,-۴)$

ب : بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و هر مضرب غیر صفر آن ، بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. در اینجا فقط کافی است ضرب خارجی را تعیین کنیم.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} ۳ & -۵ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -۵ & -۴ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -۴ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}\right) = (-۲,-۱,۱)$$

ج : مساحت مثلثی که با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل می شود، برابر نصف اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی این دو بردار است. یعنی :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{(-۲)^{۲}+(-۱)^{۲}+(۱)^{۲}}=\sqrt{۴+۱+۱}=\sqrt{۶}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۶})=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۸ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=(۳,۲,۱)\times(۲,۰,۱)=(۲,-۱,-۴)$$

$$S=\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{۴+۱+۱۶}=\sqrt{۲۱}$$

۹ : الف) کافی است که بردار، ضرب خارجی دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ را تعیین کنیم.

$$-۲\vec{b}=-۲(-۱,۱,۰)(۲,-۲,۰)$$

$$(-۲\vec{b})\times\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}-۲ & ۰\\ ۱ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۲\\ -۲ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}\right)=(۴,۴,۶)$$

ب)

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & -۱\\ -۲ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}\right)=(-۲,-۲,-۳)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۲)(-۲)+(۳)(-۲)+(۱)(-۳)=-۴-۶-۳=-۱۳$$

$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=۱۳$ حجم متوازی السطوح

۱۰ :

$$\vec{a}\times\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}-۱ & ۳\\ -۲ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ ۳ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & -۲\end{vmatrix}\right)=(۳,-۳,-۳)$$

$$\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})=۰\rightarrow(۰)(۳)+(m)(-۳)+(-۱)(-۳)=۰$$

$$\rightarrow -۳m+۳=۰\rightarrow m=۱$$

❋❋❋

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath