

۱- با تشکیل جدول، حد تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ را وقتی x به سمت صفر میل می کند تعیین کنید.

x	-۱	-۰/۱	۰/۱	-۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۱
f(x)	۱	۱/۹۴۸	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۲	۲/۰۰۰۴	۲/۰۰۴	۲/۰۴	۲/۴

۲- با تکمیل جدول زیر، مقدار حد تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ به دست آورید.

x	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱
f(x)			→	?	←		

x	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱
f(x)	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	?	←	۲/۰۰۲	۲/۰۲

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
(۰/۲۵)
(۰/۲۵)
(۰/۲۵)

۳- از روی نمودار، حد راست و حد چپ تابع را، وقتی x به سمت عدد داده شده میل می کند، تعیین کنید و مشخص نمایید که آیا تابع حد دارد؟

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

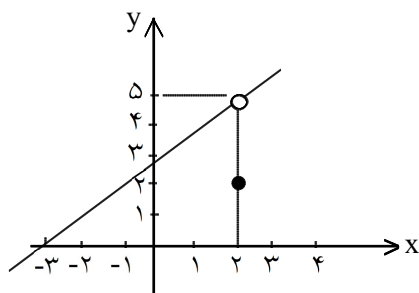
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5 \Rightarrow \text{حد دارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$



۴- حد چپ و حد راست تابع زیر را در نقطه $x = \frac{1}{2}$ داده شده به دست آورید و معلوم کنید آیا این تابع دارای حد است.

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 3, & x > \frac{1}{2} \\ 2x + 1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

در نقطه $x = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$$

مفروض است. عددهای a و b را چنان بیابید که

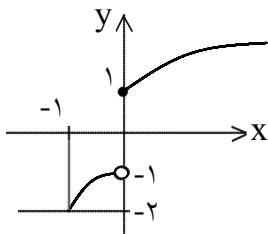
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6 \text{ باشد.}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3a + 2b = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9a + 3b + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9a - 6b = -18 \\ 9a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow -3b = -18 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = -2$$

۶- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geq 1 \\ ax^2 + 4 & x < 1 \end{cases}$ مفروض است. ضرایب a و b را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7$ باشد.

شرط داشتن حد در نقطه‌ی $x_0 = 1$ آن است که حد چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابر باشند، یعنی:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b \text{ و } x \geq 1 \\ ax^2 + 4 \text{ و } x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 4) = a + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 4 = 7 \Rightarrow a = 3 \\ a + b = 7 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$



(د) حد ندارد

(ج) -۱

(ب) ۱

(الف) -۲

۷- با توجه به نمودار تابع f حاصل هر یک از حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

د) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

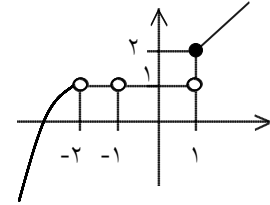
۸- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & ; x > 1 \\ 3x & ; x = 1 \\ bx - 2 & ; x < 1 \end{cases}$ داده شده است. a و b را چنان بیابید که:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 1) = a(1) + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx - 2) = b(1) - 2 = 1 \Rightarrow b = 3$$

۹- نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با توجه به نمودار، حاصل حدهای خواسته شده را به دست آورید.



B) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

C) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

D) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

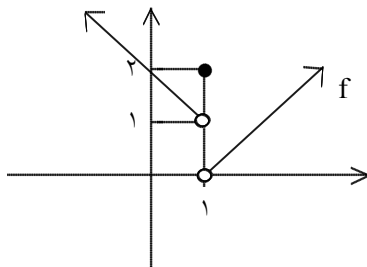
A) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

C) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$ حد ندارد

D) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) =$ وجود ندارد

۱۰- با استفاده از نمودار، حاصل عبارت زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - f(1) = 0 + 1 - 2 = -1$$

۱۱- دو تابع f و g به صورت $f(x) = x^2 - x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{x-2}$ داده شده‌اند.

تابع‌های $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را تعیین و حد هر یک از آنها را وقتی $x \rightarrow 3$ پیدا کنید.

$$(f+g)(x) = x^2 - x - 2 + \frac{1}{x-2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (f+g)(x) = 5$$

$$(f-g)(x) = x^2 - x - 2 - \frac{1}{x-2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f-g = 3$$

$$(f \cdot g)(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x-2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f \cdot g = 4$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = (x^2 - x - 2)(x-2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f}{g} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$$

۱۲- حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3}$$

۱۳- حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2x+3} = \frac{1-1}{2+3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x+5}{\sqrt{3x+16}-1}$$

۱۴- حد مقابل را حساب کنید:

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x+5}{\sqrt{3x+16}-1} \times \frac{\sqrt{3x+16}+1}{\sqrt{3x+16}+1} = \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{(x+5)(\sqrt{3x+16}+1)}{3(x+5)} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{4-x}$$

۱۵- حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{4-x} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{-(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{x+18}}{\sqrt{3x+7}-1}$$

۱۶- حد مقابل را حساب کنید:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{x+18}}{\sqrt{3x+7}-1} \times \frac{2x - \sqrt{x+18}}{2x - \sqrt{x+18}} \times \frac{\sqrt{3x+7}+1}{\sqrt{3x+7}+1}$$

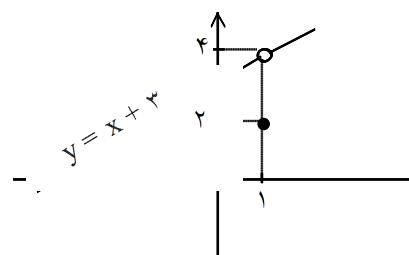
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\overbrace{4x^2 - x - 18})^a (\sqrt{\overbrace{3x + 7 + 1}}^a)}{(\overbrace{3x + 7 - 1})^b (\overbrace{2x - \sqrt{x + 18}}^b)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(x+2)(4x-9)}{3b(x+2)} = \frac{17}{12}$$

۱۷- در تابع زیر معین کنید تابع در چه نقاطی پیوسته است. سپس نمودار آن را رسم کنید.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x+3 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

$$x_0 = 1 \begin{cases} g(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 \end{cases} \rightarrow \text{فقط در } x = 1 \text{ ناپیوسته است } g$$



۱۸- حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x} = \frac{\sqrt{1+2} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

۱۹- حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2 - 2x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2} - 2}{x+1} \quad (\text{الف})$$

$$(\text{الف}) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4+x+x^2-4}{(x+1)(\sqrt{4+x+x^2}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(\sqrt{4+x+x^2}+2)} = \frac{-1}{4}$$

$$(\text{ب}) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1+x+x^2-7-2x+x^2}{(x^2-2x)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{7+2x-x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{(x^2 - 2x) \left(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{7+2x-x^2} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+3)}{x(x-2) \left(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{7+2x-x^2} \right)} = \frac{7}{2(2\sqrt{7})} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

۲۰- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{0}{2} = 0 \quad (0/75)$$

۲۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = -1$ ، حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (f(x))^2 \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + 2h(x)) \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x) + 5h(x)} \quad \text{د)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{g(x)} \quad \text{ج)}$$

$$\text{الف)} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + 2h(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 5 + 2(-1) = 3$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow 3} (f(x))^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \right)^2 = 5^2 = 25$$

$$\text{ج)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 3}{\lim_{x \rightarrow 3} g(x)} = \frac{3}{2}$$

$$\text{د)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x) + 5h(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3} g(x) + 5 \lim_{x \rightarrow 3} h(x)} = \frac{5}{2 + 5(-1)} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{۲۲- اگر } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 10 \text{ باشد } a, b \text{ را حساب کنید.}$$

از آنجا که مخرج صفر می‌شود باید حد \div باشد بنابراین باید به ازای $x = 2$ صورت کسر نیز صفر شود.

$$x = 2 \rightarrow 4 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -4$$

$$2a - 72 = -8 \Rightarrow 2a = 64 \Rightarrow a = 32$$

۲۳- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|9-x^2|}{x-3}$

الف) $D: x \geq 3 \leftarrow$ در همسایگی چپ ۳ تعریف نشده \leftarrow حد ندارد.

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \cos x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \cos x = 0$

۲۴- حاصل حدود زیر را بیابید.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$ حد ندارد

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x+3} = \frac{1}{2}$

۲۵- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$B) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$$

$$A) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 13x - 10}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(3x + 2)(x - 5)}{(x - 1)(x - 5)} = \frac{3(5) + 2}{5 - 1} = \frac{17}{4}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{2}$$

۲۶- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

$$الف) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6}$$

$$ب) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x + 3| - |3x - 11|}{x^2 - 4}$$

(الف)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x-2} = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x^2 - 5x + 6} = \text{حد ندارد}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3) + (3x-11)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{4(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{4}{4} = 1$$

۲۷- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 7x + 10|}{x^2 - 2x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x + 2| - |2x - 1|}{x^2 - 10x + 21}$

الف) بهتر است برای تعیین علامت $x^2 - 7x + 10$ در همسایگی $x = 2$ از جدول تعیین علامت استفاده کنید.

	2^+	2^-
x	\uparrow	\uparrow
	۲	۵
$x^2 - 7x + 10$	+	-

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-5)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-5)}{x} = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-5)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-5}{x} = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 7x + 10|}{x^2 - 2x} = \text{حد ندارد}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+2) - (2x-1)}{x^2 - 7x + 21} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x-7)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x-7} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

۲۸- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2 - 7x + 12|}{x^2 - 16}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x + 5| - |11 - 9x|}{x^3 - 8}$

الف) بهتر است برای تعیین علامت $x^2 - 7x + 12$ در همسایگی $x = 4$ از جدول تعیین علامت استفاده کنید.

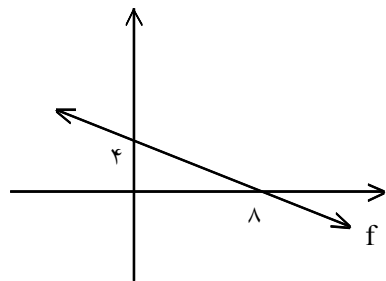
	4^-	4^+
x	\uparrow	\uparrow
	۳	۴
$x^2 - 7x + 12$	+	-

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2 - 7x + 12|}{x^2 - 16} = \text{حد ندارد}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+5) + (11-9x)}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-8(x-2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$$

۲۹- شکل زیر نمودار $f(x)$ است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^{-1}(x)}{x^2 - 16}$ را حساب کنید.



f یک تابع خطی گذرنده از $A(0, 4)$ و $B(8, 0)$ است.

$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, 4) \Rightarrow a(0) + b = 4 \Rightarrow b = 4$$

$$B(8, 0) \Rightarrow a(8) + b = 0 \xrightarrow{b=4} 8a = -4 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{2}x \xrightarrow{\times(-2)} -2y + 8 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -2x + 8$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^{-1}(x)}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2}{x+4} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

۳۰- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{Lim } ۲ - [-x] \quad (\text{ب})$$

$$x \rightarrow ۳^-$$

$$\text{Lim } \frac{x - ۲}{\sqrt{۳x + ۴}} \quad (\text{الف})$$

$$x \rightarrow ۷$$

$$\text{Lim } \frac{۱ - \text{Sin}^۳ x}{\text{Cos}^۲ x} \quad (\text{د})$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{۲}$$

$$\text{Lim } \frac{x^۲ - ۳x}{x^۲ - ۹} \quad (\text{ج})$$

$$x \rightarrow ۳$$

$$\text{الف) Lim } \frac{x - ۲}{\sqrt{۳x + ۴}} = \frac{۷ - ۲}{\sqrt{۲۱ + ۴}} = \frac{۵}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

$$x \rightarrow ۷$$

$$\text{ج) Lim } \frac{x^۲ - ۳x}{x^۲ - ۹} = \text{Lim } \frac{x(x - ۳)}{(x - ۳)(x + ۳)} = \text{Lim } \frac{x}{x + ۳} = \frac{۳}{۳ + ۳} = \frac{۱}{۲}$$

$$x \rightarrow ۳$$

$$\text{د) Lim } \frac{۱ - \text{Sin}^۳ x}{\text{Cos}^۲ x} = \text{Lim } \frac{(1 - \text{Sin} x)(1 + \text{Sin} x + \text{Sin}^۲ x)}{(1 - \text{Sin} x)(1 + \text{Sin} x)} = \text{Lim } \frac{1 + \text{Sin} x + \text{Sin}^۲ x}{1 + \text{Sin} x}$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{۲}$$

$$= \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{۳}{۲}$$

۳۱- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{Lim } (۲ + [x]) \quad (\text{ب})$$

$$x \rightarrow ۳^-$$

$$\text{Lim } \frac{x + ۷}{\sqrt{x + ۱}} \quad (\text{الف})$$

$$x \rightarrow ۸$$

$$\text{Lim } \frac{۱ + \text{Sin}^۳ x}{\text{Cos}^۲ x} \quad (\text{د})$$

$$x \rightarrow \frac{۳\pi}{۲}$$

$$\text{Lim } \frac{x^۲ - ۱۶}{x^۲ - ۵x + ۴} \quad (\text{ج})$$

$$x \rightarrow ۴$$

$$\text{الف) Lim } \frac{x + ۷}{\sqrt{x + ۱}} = \frac{۸ + ۷}{\sqrt{۸ + ۱}} = \frac{۱۵}{۳} = ۵$$

$$\text{ب) Lim } (۲ + [x]) = ۲ + ۲ = ۴$$

$$x \rightarrow ۳^-$$

$$\text{ج) Lim } \frac{x^۲ - ۱۶}{x^۲ - ۵x + ۴} = \text{Lim } \frac{(x - ۴)(x + ۴)}{(x - ۴)(x - ۱)} = \text{Lim } \frac{x + ۴}{x - ۱} = \frac{۸}{۳}$$

$$x \rightarrow ۴$$

$$= \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

۳۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - 1}{2f(x) + 5} = 2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{f(x) + 7}$ را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - 1}{2f(x) + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 3f(x) - \lim_{x \rightarrow 3} 1}{2 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} 5} = 2 \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = k} \frac{3k - 1}{2k + 5} = 2$$

$$\Rightarrow 4k + 10 = 3k - 1 \Rightarrow k = -11$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{f(x) + 7} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} 7} = \frac{-11 - 1}{-11 + 7} = \frac{-12}{-4} = 3$$

۳۳- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

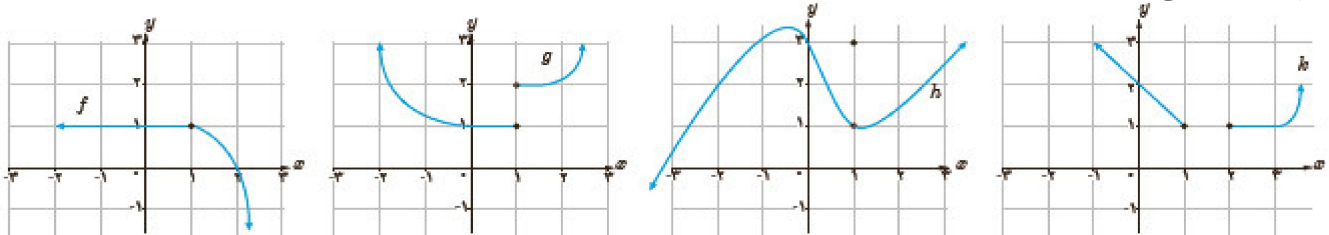
ب) $\lim_{x \rightarrow 5} [x]$

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{|x-1|}$

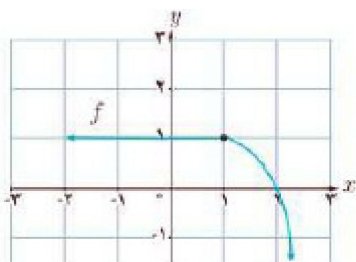
الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{|x-1|} = \sqrt{0} = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} [x] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^+} [x] = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} [x] = 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} [x] = \text{حد ندارد}$

۳۴- کدام یک از توابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟

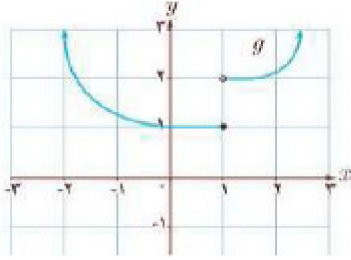


تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است زیرا:



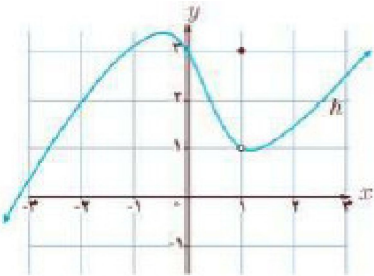
$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

تابع $g(x)$ در $x = 1$ ناپیوسته است زیرا:



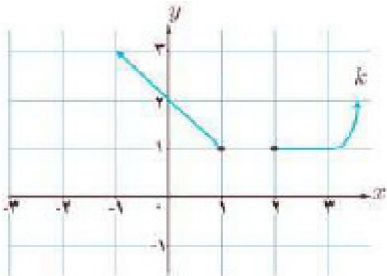
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

تابع $h(x)$ در $x = 1$ ناپیوسته است زیرا:



$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) \neq h(1)$$

تابع $k(x)$ در $x = 1$ ناپیوسته است زیرا:



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) \text{ وجود ندارد } , \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = 1$$

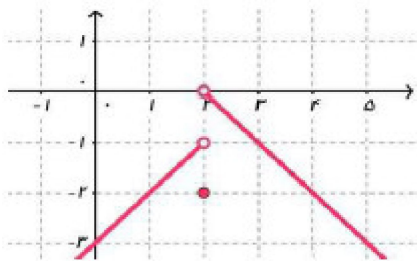
۳۵- پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است زیرا:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = (0)^2 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 2) = -2(0) + 2 = 2 \\ f(0) &= -2(0) + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است زیرا:

۳۶- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x-3 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ -x+2 & x > 2 \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟



$$f(x) = \begin{cases} x-3 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ -x+2 & x > 2 \end{cases}$$

این تابع در تمام نقاط دامنه‌اش به غیر از نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 + 2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 - 3 = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

۳۷- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x_0 = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2b}{x-2} & ; x > 2 \\ 2a+x+1 & ; x = 2 \\ 2b+5 & ; x < 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 2a + 2 + 1 = 2a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2b}{x-2} = \frac{2+2b}{2} = b+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2b+5$$

$$2a+3 = b+1 = 2b+5 \Rightarrow b+1 = 2b+5 \Rightarrow b = -4$$

$$2a+3 = 2b+5 \Rightarrow 2a+3 = -3 \Rightarrow a = -3$$

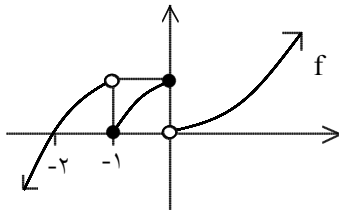
۳۸- مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع f در $x = -1$ پیوسته باشد. ([] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|} & x < -1 \\ 3x + b & x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی: } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1)$$

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 3x + b = -3 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + [x]}{|x|} = \frac{1-2}{1} = -1 \Rightarrow -3 + b = -1 \Rightarrow b = 2$$



۳۹- نمودار تابع f به صورت مقابل است. کدام گزینه درست و کدام گزینه نادرست است؟ چرا؟

الف) f در بازه $(0, +\infty)$ پیوسته است.

ب) f در بازه $[-1, 0]$ پیوسته است.

الف) نادرست است. زیرا f در $x = 0$ پیوستگی راست ندارد.

ب) درست است. زیرا f در بازه $(-1, 0)$ پیوسته و در $x = -1$ پیوستگی راست و $x = 0$ پیوستگی چپ دارد.

۴۰- اگر تابع f با ضابطه‌ی زیر در $x = 3$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} - ax & x > 3 \\ 12 & x = 3 \\ b[-x] + ax & x < 3 \end{cases}$$

$$x = 3 \text{ در } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) \text{ شرط پیوستگی}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [b(-x) + ax] = -3b + 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} - ax \right) = 6 - 3a = 12 \Rightarrow -3a = 6 \Rightarrow a = -2$$

$$-3b + 3a = 12 \xrightarrow{a = -2} -3b - 6 = 12 \Rightarrow -3b = 18 \Rightarrow b = -6$$