

مسئله

طول مستطیلی ۴ سانتیمتر از عرض آن بیشتر است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل $\frac{2}{3}$ باشد، طول و عرض آن را به دست آورید.

اگر x را عرض مستطیل در نظر بگیریم، طول آن $x+4$ است و نسبت عرض به طول را می‌توان با $\frac{x}{x+4}$ نمایش داد؛ بنابراین:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2x + 8 \Rightarrow x = 8 \quad \text{طول} = 12$$

عبارت $\frac{x}{x+4}$ را، که نسبت دو چندجمله‌ای است، عبارت گویا می‌نامیم.

به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند.

عبارت‌های گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ به طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت v_1 طی کرده و سپس از همان مسیر با سرعت v_2 بازگشته است از رابطه $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ به دست می‌آید که عبارت گویای جبری است. برخی از مثال‌های دیگر از این قرار است:

$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$	میانگین حسابی دو عدد a و b	}	$\frac{v^2}{2k} = 12$	محاسبه جرم یک جسم با
				سرعت v و انرژی جنبشی k

با توجه به تعریف بالا عبارات‌های زیر گویا هستند:

$$\frac{2x-5}{5x^2-2x^2+1} \quad \text{و} \quad \frac{x+5}{x-1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{4} \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \frac{x-3}{4} \quad \text{و} \quad \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad \frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{9xy}$$

$$\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad \frac{10}{x+2} \quad \text{و} \quad \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \quad \text{و} \quad \frac{xy^2}{(x-y)^2} \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{b} \quad \text{و} \quad x^2+2x-7$$

اما عبارات‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

چون چندجمله‌ای نیستند

کدام یک از عبارات های زیر گویا است؟

$$\frac{\sqrt{y}}{x-1} \quad \frac{x+6}{3} \quad \frac{ah}{2} \quad \frac{\sqrt{3+x}}{5} \quad \frac{\sqrt{2x}}{25} \quad \frac{|x|+|y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y+1}}{x^2} \quad \frac{x-5}{\sqrt{3+1}} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{mn+n^2}{5-n} \quad 14 \quad \frac{3-a}{2+x}$$

فعالیت

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به دست آورید:

x	-2	7	$\frac{1}{2}$	0	-1	-5
$\frac{x+5}{x-3}$	$\frac{-2+5}{-2-3} = \frac{3}{-5}$	$\frac{7+5}{7-3} = \frac{12}{4} = 3$	$\frac{\frac{1}{2}+5}{\frac{1}{2}-3} = \frac{\frac{11}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{11}{5}$	$\frac{0+5}{0-3} = -\frac{5}{3}$	$\frac{-1+5}{-1-3} = \frac{4}{-4} = -1$	$\frac{-5+5}{-5-3} = \frac{0}{-8} = 0$

به ازای $x=3$ مخرج عبارت گویای $\frac{x+5}{x-3}$ مساوی صفر می شود و همان گونه که از قبل می دانید $\frac{0}{0}$ به عنوان عدد تعریف نمی شود.

برای تعیین همه مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به ازای آنها مخرج کسر صفر می شود؛ به عبارت دیگر این مقادیر را نمی توان به جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال: عبارت گویای $\frac{7x^2+1}{(x-1)(x+2)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

حل: چه مقادیری مخرج کسر را صفر می کند؟

برای یافتن این عددها، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم؛ یعنی:

$$(x-1)(x+2)=0$$

از طرفی وقتی حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است؛ لذا:

$$\begin{cases} (x-1)=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ (x+2)=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای فوق به ازای $x=1$ و $x=-2$ تعریف نشده است.

کار در کلاس

هر یک از عبارت های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

عصا کافی است

الف) $\frac{8x+5}{2}$

ب) $\frac{y+x}{x} \quad x=0$

ج) $\frac{2b+1}{2b-1} \quad 2b-1=0 \rightarrow b=\frac{1}{2}$

د) $\frac{2x}{x^2+4}$

ه) $\frac{x}{x^2-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ x^2=1 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

و) $\frac{a+5}{a^2-5a+6} \quad \begin{cases} a^2-5a+6=0 \\ (a-2)(a-3)=0 \\ a=2 \text{ یا } a=3 \end{cases}$

ساده کردن یک عبارت گویا

کسر $\frac{26}{48}$ با کسرهای $\frac{6}{8}$ ، $\frac{9}{12}$ ، $\frac{18}{24}$ و $\frac{3}{4}$ مساوی است. بین این کسرها $\frac{3}{4}$ کسری است که

دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع:

$$\frac{26}{48} = \frac{3 \times 17}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن هر عدد گویا می توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر تقسیم کرد؛ یعنی

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای $\frac{AC}{BC}$ داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0 \text{ و } C \neq 0 \text{ و } C \text{ چند جمله ای هستند})$$

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از عبارت های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف) $\frac{18y^2}{60y^3} = \frac{3}{10y}$

ب) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+3}{x+1}$

الف) $\frac{4x^2y^3}{10y^4x^2y^3} = \frac{2}{5y}$

۱۱۶

از تجزیه صورت و مخرج استفاده شده

دوین عبارت مشترک با هم ساده شده اند

از ب. م. م. صورت و مخرج استفاده شده

ی باید توان داشته باشه *

$$\text{ج) } \frac{y^2 - 9}{2y + 6} = \frac{(y+3)(y-3)}{2(y+3)} = \frac{y-3}{2}$$

$$\text{د) } \frac{8ab^2}{2 \cdot a^2 b^2} = \frac{2b^2 \cancel{a} \cancel{b^2}}{\cancel{2} a^2 \cancel{b^2}} = \frac{2b^2}{a^2} \quad \text{و) } \frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$$

فضا کاغذی

کار در کلاس

۱- عبارت های گویای زیر را ساده کنید:

$$\frac{(m-4)(m+4)}{-(m-4)} = -(m+4) \quad \text{الف) } \frac{m^2 - 16}{4-m}$$

$$\text{ب) } \frac{6m+18}{7m+21} = \frac{4(m+3)}{7(m+3)} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{(a+2)(a-7)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a-7}{a-1} \quad \text{ج) } \frac{a^2 - 5a - 14}{a^2 + a - 2}$$

$$\text{د) } \frac{x^2 - y^2}{y-x} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{-(x-y)} = \frac{(x-y)(x+y)(x^2 + y^2)}{-(x-y)}$$

۲- عبارت $\frac{a+ax}{a}$ به دو شکل ساده شده؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

$$\text{الف) نادرست } \frac{a+ax}{x} = a+x$$

$$\text{ب) درست } \frac{a+ax}{a} = \frac{a(1+x)}{a} = 1+x$$