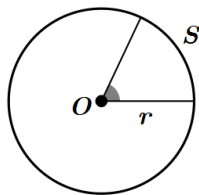




مثلثات

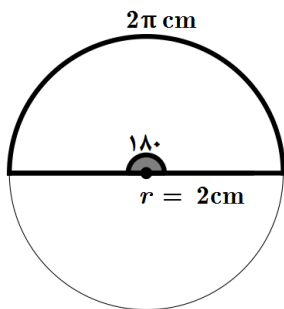


قبلا برای اندازه گیری زاویه با واحد درجه آشنا شدیم. یکی دیگر از واحد های اندازه گیری زاویه ، رادیان نام دارد. برای اندازه گیری زاویه مرکزی O بر حسب رادیان کافی است طول کمان روبه‌رو به آن زاویه را به طول شعاع دایره تقسیم کنیم:




$$\theta(\text{rad}) = \frac{S}{r}$$

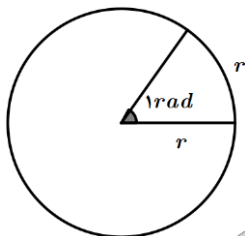
به طور مثال در یک دایره به شعاع  $r = 2\text{ cm}$  طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی  $180^\circ$  درجه برابر  $2\pi\text{ cm}$  است. برای محاسبه زاویه  $180^\circ$  درجه بر حسب رادیان داریم:



$$\frac{\text{طول کمان روبه‌رو به زاویه } 180^\circ}{\text{طول شعاع}} = \frac{2\pi\text{ cm}}{2\text{ cm}} = \pi\text{ rad} \Leftarrow \theta(\text{rad})$$

یا مثلا زاویه  $\frac{\pi}{4}$  رادیان بر حسب درجه برابر است با:  $\frac{\pi}{4}\text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi\text{ rad}} = 45^\circ$

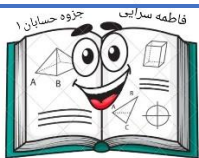
با توجه به تعریف رادیان نتیجه می‌گیریم که یک رادیان اندازه زاویه ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر با طول شعاع در هر دایره دلخواه است. 



$$1\text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi\text{ rad}} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$$

تبدیل نسبت های مهم در دایره مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{2}\text{ rad} = 90^\circ \quad \frac{\pi}{3}\text{ rad} = 60^\circ \quad \frac{\pi}{4}\text{ rad} = 45^\circ \quad \frac{\pi}{6}\text{ rad} = 30^\circ$$



## جزوه حسابان ۱ یازدهم ریاضی

📖 مثال : در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید

الف) در دایره‌ی مثلثاتی ۵۵ رادیان در ناحیه‌ی ..... قرار دارد.

ب) انتهای کمان زاویه  $\frac{6\pi}{5}$  در ناحیه ..... قرار دارد.

پ) یک رادیان برابر است با اندازه‌ی ..... که طول کمان روبه‌روی آن با ..... .

ت) زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی به طول ۳ در دایره‌ای به شعاع ۵ برابر ..... رادیان و ..... درجه است.

📖 مثال : برای هریک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد.

$$\theta = \frac{4\pi}{3} \text{ (الف)} \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \text{ (ب)} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ (پ)} \quad \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ (ت)}$$

📖 مثال : در جدول روبه‌رو جاهای خالی را پر کنید.

D	$30^\circ$	$75^\circ$
R	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$ $\frac{2\pi}{3}$

📖 مثال : الف) هر یک از زوایای زیر را به رادیان تبدیل کنید.

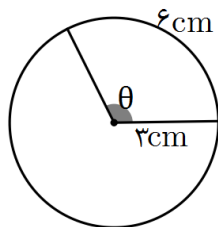
$$-331 \quad 54 \quad 96 \quad -207$$

ب) هریک از زوایای زیر را به درجه تبدیل کنید

$$\frac{4\pi}{3} \quad -\frac{2\pi}{7} \quad \frac{5\pi}{3} \quad \frac{8\pi}{9}$$



مثال: در شکل مقابل اندازه زاویه  $\theta$  بر حسب رادیان چند است؟



- الف) ۴      ب) ۱      پ)  $\frac{3}{2}$       ت) ۲

نسبت های مثلثاتی برخی از زوایا



از روی زوایایی که مقدار آنها را در سال دهم خواندیم میتوان بعضی زوایای دیگر را به دست آورد. یا اینکه با داشتن نسبت های

یک زاویه مثل  $\alpha$  میتوان نسبت های  $\pi + \alpha, \pi - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{3\pi}{2} + \alpha, \frac{3\pi}{2} - \alpha$  را محاسبه کرد.

برای انجام این کار کافی است مراحل زیر را طی کنیم:

① ابتدا با توجه به جهت های مثلثاتی مشخص کنید کمان داده فوق در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار دارد.

② سپس مشخص کنید در ربع فوق نسبت خواسته مثبت است یا منفی و علامت آن را بگذارید.

③ اکنون مرحله ی حذف یکی از قسمت های  $\pi$  یا  $\frac{\pi}{2}$  یا  $\frac{3\pi}{2}$  است. اگر چیزی که حذف میکنیم مضربی فرد از  $\frac{\pi}{2}$  باشد،

نسبت مثلثاتی خواسته شده تغییر می کند (به فرمول های زیر دقت کنید)



**روابط مربوط به کمان ها**

نسبت های مثلثاتی $(-\theta)$ بر حسب $\theta$ (ربع چهارم)	نسبت های مثلثاتی $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ بر حسب $\theta$ (ربع اول)	نسبت های مثلثاتی $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ بر حسب $\theta$ (ربع دوم)	نسبت های مثلثاتی $(\pi - \theta)$ بر حسب $\theta$ (ربع دوم)
$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$ $\cot(-\theta) = -\cot(\theta)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$ $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$ $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot(\theta)$ $\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan(\theta)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos(\theta)$ $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin(\theta)$ $\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot(\theta)$ $\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan(\theta)$	$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$ $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$ $\cot(\pi - \theta) = -\cot(\theta)$
نسبت های مثلثاتی $(\pi + \theta)$ بر حسب $\theta$ (ربع سوم)	نسبت های مثلثاتی $(\frac{3\pi}{2} \pm \theta)$ بر حسب $\theta$ (ربع چهارم)	نسبت های مثلثاتی $(2\pi - \theta)$ بر حسب $\theta$ (ربع چهارم)	نسبت های مثلثاتی $(2\pi + \theta)$ بر حسب $\theta$ (ربع اول)
$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ $\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$ $\cot(\pi + \theta) = \cot(\theta)$	$\sin(\frac{3\pi}{2} \pm \theta) = -\cos(\theta)$ $\cos(\frac{3\pi}{2} \pm \theta) = \pm \sin(\theta)$ $\tan(\frac{3\pi}{2} \pm \theta) = \mp \cot(\theta)$	$\sin(2\pi - \theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$ $\tan(2\pi - \theta) = -\tan(\theta)$ $\cot(2\pi - \theta) = -\cot(\theta)$	$\sin(2\pi + \theta) = \sin(\theta)$ $\cos(2\pi + \theta) = \cos(\theta)$ $\tan(2\pi + \theta) = \tan(\theta)$ $\cot(2\pi + \theta) = \cot(\theta)$

مثال: حاصل عبارت  $A = \frac{2 \sin(\pi + \alpha) - 4 \sin(\pi - \alpha)}{3 \cos(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha)}$  کدام است؟

الف)  $3 \tan \alpha$       ب)  $\frac{3}{2} \tan \alpha$       پ)  $-\tan \alpha$       ت)  $-3 \tan \alpha$

مثال: حاصل عبارت  $B = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 4 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + 5 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$  کدام است؟

الف)  $2 \sin \alpha$       ب)  $4 \sin \alpha$       پ)  $-4 \cos \alpha$       ت)  $-2 \cos \alpha$



مثال: مقدار عددی  $A = \frac{4 \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{3 \tan\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - 6 \cot\left(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}$  را بیابید.

مثال: مقدار عددی عبارت  $\frac{\cot(210^\circ) + \sin(-150^\circ)}{5 \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + 3}$  را به دست آورید.

مثال: مقدار عددی عبارت  $\frac{\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cot^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$  را به دست آورید.

مثال: مقدار عددی  $A = 3 \sin \frac{3\pi}{4} + 5 \sin \frac{5\pi}{4} + 7 \sin \frac{7\pi}{4}$  کدام است؟



مثال: حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید

الف)  $\sin(270^\circ) + \tan(-210^\circ) =$

ب)  $\cot(-720^\circ) + \sin(420^\circ) + \cos(225^\circ) =$

پ) 
$$\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 2\cot\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{-\sin^2\left(\frac{5\pi}{3}\right)} =$$

مثال: حاصل عبارت  $\frac{\sin 250^\circ + \sin 700^\circ}{\cos 560^\circ - \cos 110^\circ}$  با فرض  $\tan 20^\circ = 0.4$  کدام است؟

مثال: حاصل عبارت  $\frac{\cos 258^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$  با فرض  $\tan 15^\circ = 0.28$  کدام است؟

مثال: اگر  $\cot 25^\circ = a$  باشد، حاصل عبارت  $A = \frac{\cos 115^\circ + 3\cos 155^\circ}{3\cos 245^\circ + \cos 335^\circ}$  کدام است؟

$\frac{a+1}{3a-1}$  (ت)

$\frac{3a+1}{a+3}$  (پ)

$\frac{3a-1}{a-3}$  (ب)

$\frac{3a+1}{3-a}$  (الف)



بسط های مثلثاتی



❖ گاهی اوقات در محاسبه نسبت ها وقتی قسمت های شامل  $\pi$  یا  $\frac{\pi}{2}$  یا  $\frac{3\pi}{2}$  را حذف می کنیم قسمت باقیمانده

کمانی که از قبل مقدار مثلثاتی آن را می دانیم نیست. در این مواقع از فرمول های زیر کمک می گیریم.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

**نکته:** دقت کنید وقتی بسط  $\sin$  را می نویسیم علامت وسط تغییر نمی کند، اما هنگام نوشتن بسط  $\cos$  علامت



وسط تغییر می کند.

📖 **مثال:** حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف)  $\cos 105^\circ =$

ب)  $\sin 15^\circ =$

❖ از دو فرمول فوق میتوان فرمول های مهم تر و کاربردی تری به دست آورد.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

①  $\xrightarrow{\beta \rightarrow \alpha} \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

②  $\xrightarrow{\beta \rightarrow \alpha} \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$



مثال: ثابت کنید: الف)  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

ب)  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

مثال: اگر  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  و  $\cos \beta = -\frac{12}{13}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع دوم و انتهای کمان  $\beta$  در ربع سوم باشد، مقدار  $\cos(\alpha + \beta)$  را به دست آورید.

مثال: مقدار  $\cos 22/5^\circ$  را بیابید.

مثال: اگر  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$ ،  $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}$  باشد، مقدار  $\sin \alpha \sin \beta$  کدام است؟





$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

❖ بسط مثلثاتی  $\tan$  :

📖 مثال: با استفاده از تکنیکی که قبلا فرا گرفتید فرمول بسط  $\tan 2\alpha$  را به دست آورید.

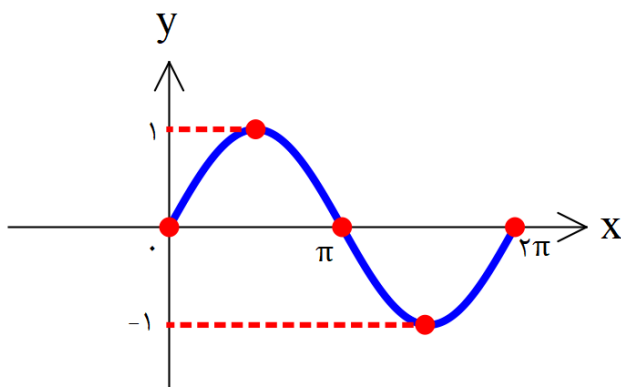
📖 مثال: مقدار  $\tan 15^\circ$  را محاسبه کنید.

رسم توابع مثلثاتی درجه ۱

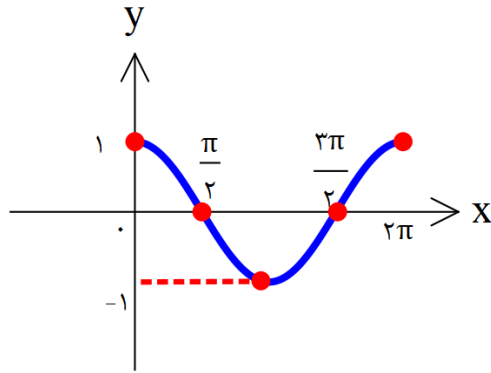


برای رسم تابع های شامل  $\sin$  یا  $\cos$  کافی است شکل پایه را بلد باشیم. سپس با انتقال های افقی و عمودی تابع های دیگر

را رسم می کنیم.



❶ تابع  $y = \sin x$



② تابع  $y = \cos x$

مثال: نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید. مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع را مشخص کنید.

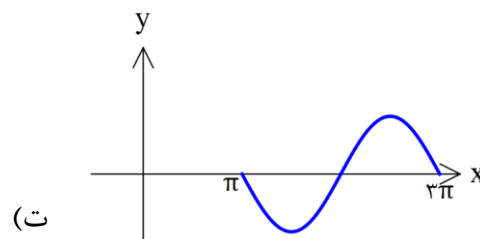
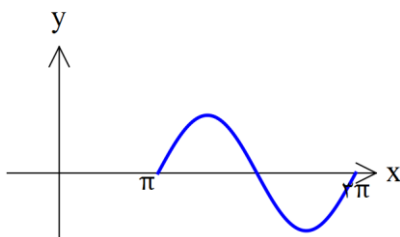
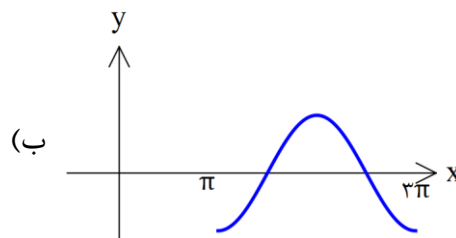
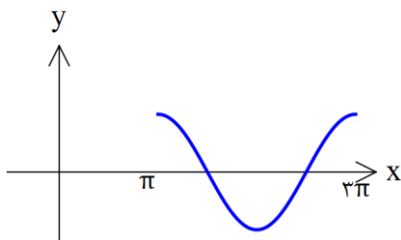
الف)  $y = \sin(x - \frac{\pi}{6})$

ب)  $y = \cos(x + \frac{\pi}{3}) - 2$

مثال: الف) تابع مثلثاتی  $y = -2|\cos x|$  را رسم کنید.

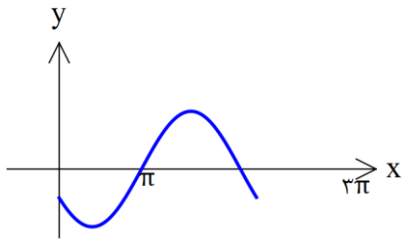
ب) برد تابع را به دست آورید.

مثال: کدام بخشی از نمودار  $y = \sin x$  است؟

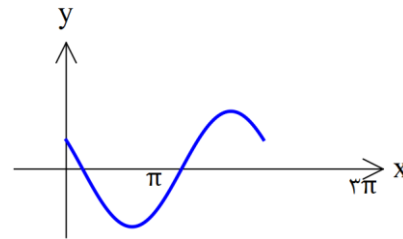




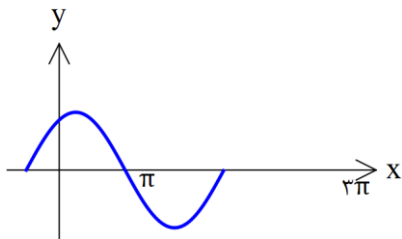
مثال ۲۷۸: کدام یک بخشی از نمودار تابع  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  است؟



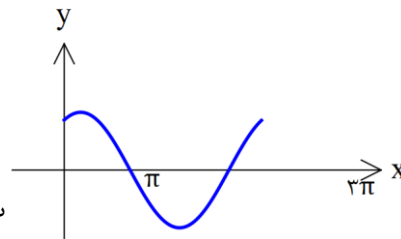
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

مثال: مجموع کم ترین و بیش ترین مقدار تابع  $f(x) = -3\sin x - 2$  را بیابید.

مثال: برد تابع  $f(x) = 7 - 2\sin x$  کدام است؟

(ت)  $[-1, 5]$

(پ)  $[2, 5]$

(ب)  $[5, 9]$

(الف)  $[3, 9]$

نکته ماکزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی درجه اول:



مقدارهای ماکزیمم و مینیمم به این صورت است:  
 $y = a \sin(bx) + c$   
 $y = a \cos(bx) + c$   
 در توابع به صورت

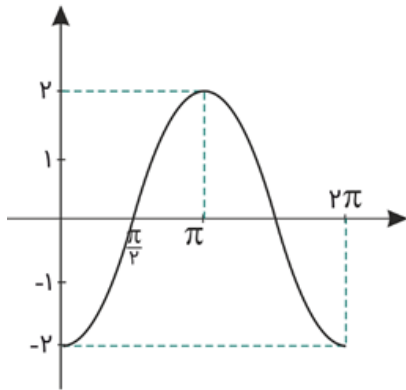
$$\max = |a| + c$$

$$\min = -|a| + c$$

سال آینده بیشتر از این روش استفاده خواهیم کرد.



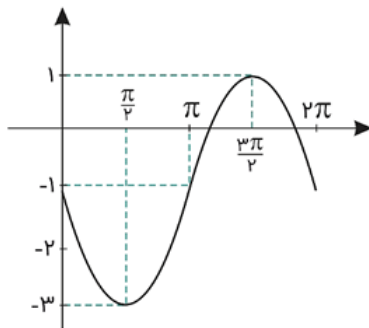
مثال: ضابطه تابع رسم شده کدام یک از تابع های زیر است؟



الف)  $y = 2 \sin(x - \frac{\pi}{2})$

ب)  $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{2})$

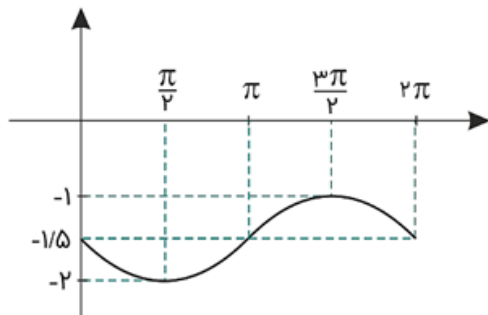
مثال: ضابطه تابع رسم شده کدام یک از تابع های زیر است؟



الف)  $y = -2 \sin x + 1$

ب)  $y = -2 \sin x - 1$

مثال: ضابطه تابع رسم شده کدام یک از تابع های زیر است؟



الف)  $y = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{3}{2}$

ب)  $y = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{3}{2}$