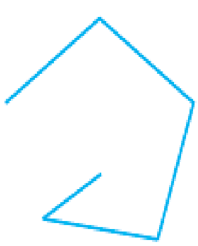
چندضلعی

شکلی است بسته که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد (در حقیقت شامل $n \geq ۳$ پاره‌خط)، طوری‌که نقاط انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آن‌ها روی یک خط قرار نگرفته باشند. به عبارت دیگر هر دو پاره‌خطی که در یک انتها مشترک‌اند، خودشان در یک امتداد نباشند (با هم زاویه‌ی غیر از ۱۸۰° بسازند)؛ همچنین پاره‌خط‌ها فقط در نقاط انتهایی‌شان، یکدیگر را قطع کنند.

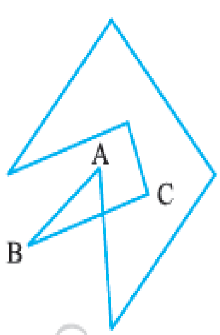
مثلاً شکل‌های الف و ب که رسم شده‌اند چندضلعی نیستند:

الف به دلیل این‌که یک شکل بسته نیست، چندضلعی نمی‌باشد.

ب هم به دلیل این‌که AD و BC یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از نقاط انتهایی خود قطع کرده‌اند، چندضلعی نخواهد بود.

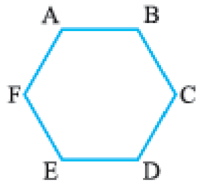


الف



ب

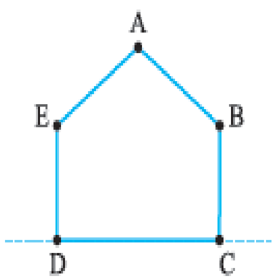
اما شکل زیر یک چندضلعی است:



در این چندضلعی، پاره‌خط‌های AB، BC، CD، DE، EF و FA اضلاع چندضلعی (شش ضلعی) ABCDEF بوده و نقاط A، B، C، D، E و F رأس‌های چندضلعی خوانده می‌شوند. به عبارت دیگر هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلع مجاور و نقطه‌ی مشترک آن دو ضلع را رأس می‌گوییم. هم‌چنین رئوس دو سر یک ضلع، رئوس مجاورند (مثل E و D). اگر تعداد اضلاع یا رئوس یک چندضلعی n تا باشد، آن را n ضلعی می‌گوییم.

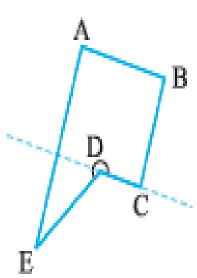
تعریف n ضلعی محدب،

یک n ضلعی را محدب می‌گوییم هرگاه با امتداد هر ضلع از طرفین، کل شکل (بقیه‌ی نقاط چندضلعی) در یک طرف آن واقع شوند. به عبارت دیگر تمام زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب، کم‌تر از 180° است.



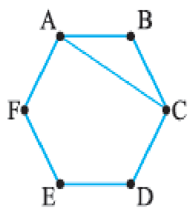
مطابق شکل، پنج‌ضلعی ABCDE یک پنج‌ضلعی محدب است. در این شکل ضلع CD را از طرفین امتداد داده‌ایم و کل شکل یک طرف این خط قرار گرفته است (شما هم هر دفعه یکی از اضلاع را امتداد دهید و محدب‌بودن پنج‌ضلعی ABCDE را بررسی کنید). هم‌چنین تمام زاویه‌های داخلی مثل $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$، $\hat{D}$ و $\hat{E}$ قطعاً کم‌تر از 180° است.

اگر n ضلعی، محدب نباشد آن را مقعر می‌گوییم. در n ضلعی مقعر با امتداد حداقل یکی از اضلاع، قسمتی از شکل در یک طرف و بقیه‌ی شکل در طرف دیگر خط موردنظر واقع می‌شود. در حقیقت حداقل یکی از زاویه‌های داخلی n ضلعی مقعر بیش از 180° است.

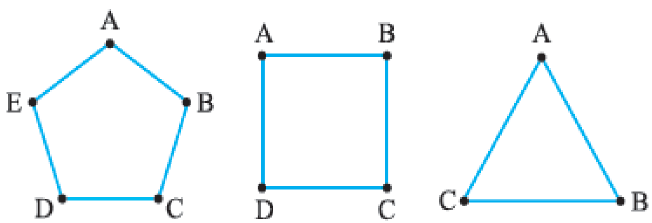


مطابق شکل پنج‌ضلعی ABCDE مقعر است. با امتداد ضلع CD از طرفین، قسمتی از شکل در یک طرف این خط قرار می‌گیرد؛ در حقیقت $C\hat{D}E > 180^\circ$.

تعریف قطر در چندضلعی، پاره‌خطی است که رئوس غیرمجاور در یک n ضلعی را به هم وصل می‌کند.
در شکل روبه‌رو رئوس A و C غیرمجاور بوده و پاره‌خط AC را قطر این شش‌ضلعی می‌گوییم.



مثال مطابق شکل‌های روبه‌رو یک سه‌ضلعی (مثلث)، یک چهارضلعی و یک پنج‌ضلعی وجود دارند. از هر رأس به تمام رئوس دیگر وصل کنید و تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده را بیابید.



توجه:

با استفاده از استدلال استقرایی، به نظر می‌رسد تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی، از جمله ضلع و قطر، عبارت است از $\frac{n(n-1)}{2}$. (البته با استفاده از خواص دنباله یا تصاعد حسابی می‌توان ثابت کرد که تعداد پاره‌خط‌های رسم‌شده در n ضلعی یعنی $(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0$ برابر است با $\frac{n(n-1)}{2}$.)

مثال 1:

تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده (ضلع‌ها و قطرها) در یک ۱۰ ضلعی را بیابید.

مثال 2:

تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی برابر است با ۱۰. مقدار n را بیابید.

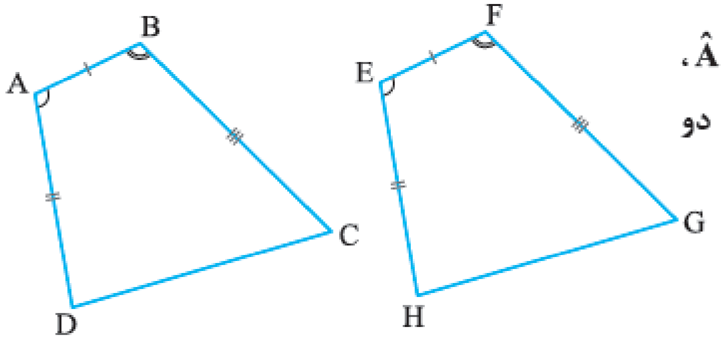
سوال 1:

با توجه به تعریف قطر، فرمولی برای پیداکردن تعداد کل قطرهای مرسوم در یک n ضلعی محدب بیابید.

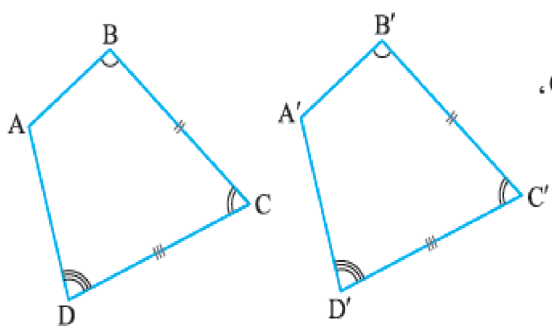
مثال 3:

تعداد قطرهای یک هفت‌ضلعی را بیابید.

سوالات امتحانی:



۱- در دو چهارضلعی مقابل $AD = EH$ ، $\hat{A} = \hat{E}$ ، $AB = EF$ ، $\hat{B} = \hat{F}$ و $BC = FG$. ثابت کنید این دو چهارضلعی همنهشت‌اند.



۲- در شکل روبه‌رو دو چهارضلعی $ABCD$ و $A'B'C'D'$ با شرط‌های $\hat{D} = \hat{D}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$ ، $\hat{C} = \hat{C}'$ ، $BC = B'C'$ و $CD = C'D'$ رسم شده‌اند. ثابت کنید این دو چهارضلعی همنهشت‌اند.

۳- تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک n ضلعی منتظم برابر است با ۲۸. در این صورت هر زاویه‌ی داخلی این n ضلعی چند درجه است؟

۴- تعداد قطرهای یک n ضلعی، برابر ۳۵ است. n را بیابید.

۵- تعداد قطرهای یک n ضلعی منتظم، ۳ برابر تعداد اضلاع آن است. هر زاویه‌ی داخلی این n ضلعی منتظم کدام است؟

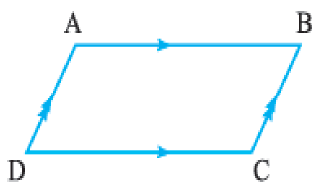
۶- تعداد کل پاره‌خط‌های رسم‌شده (از جمله ضلع و قطر) در یک n ضلعی منتظم، چهار برابر تعداد اضلاع آن است. در این صورت هر زاویه‌ی خارجی این شکل را بیابید.

۷- مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی، سه برابر مجموع زاویه‌های خارجی آن است. تعداد قطرهای این شکل را بیابید.

۸- اگر یک واحد به اضلاع یک n ضلعی اضافه شود، به تعداد قطرهای آن چند واحد اضافه می‌شود؟

چهارضلعی‌های مهم

متوازی الاضلاع



تعریف متوازی‌الاضلاع، یک چهارضلعی است که اضلاع روبه‌روی آن دوبه‌دو با هم موازی‌اند.

ABCD : متوازی‌الاضلاع $\Leftrightarrow AB \parallel CD\ ,\ AD \parallel BC$

قضیه ۱ در هر متوازی‌الاضلاع، دو ضلع مقابل با هم مساوی‌اند.

اثبات:

قضیه 2:

نشان دهید اگر ضلع های مقابل یک چهارضلعی دو به دو با هم باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

قضیه 3:

ثابت کنید هرگاه قطر یک چهارضلعی، آن چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

قضیه 4:

ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

اثبات:

قضیه 5:

ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف هم باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

قضیه 6:

نشان دهید در هر متوازی الاضلاع زوایای هر دو زاویه مجاور مکمل همدیگرند.

اثبات:

قضیه 7:

نشان دهید اگر در هر چهارضلعی هر دو زاویه مجاور مکمل هم باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

سوال 1:

اگر در متوازی‌الاضلاع ABCD نیمساز دو زاویه‌ی مجاور دلخواه را رسم کنیم، زاویه‌ی حاصل بین این دو نیمساز کدام است؟

قضیه 8:

ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، زوایای رو به رو با هم برابرند.

اثبات:

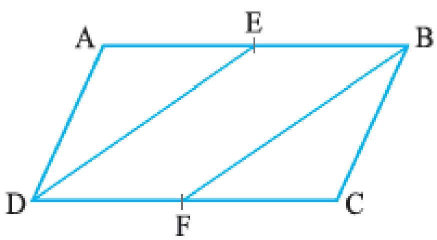
قضیه 9:

ثابت کنید اگر در هر چهارضلعی، زوایای رو به رو با هم برابر باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

اثبات:

سوال 2:

مطابق شکل، نقاط E و F به ترتیب وسط اضلاع AB و DC از متوازی‌الاضلاع ABCD هستند. ثابت کنید $DE = FB$.



سوال 3:

از محل برخورد دو قطر متوازی‌الاضلاع، خطی موازی دو ضلع روبه‌روی آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید این خط از وسط دو ضلع دیگر می‌گذرد.

سوال 4:

می‌دانیم اگر در یک چهارضلعی، زاویه‌های روبه‌رو مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. حال به کمک این مطلب، ثابت کنید اگر

در یک چهارضلعی تمام زاویه‌های مجاور مکمل هم باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مستطیل

نتیجه‌مهم می‌دانیم از بین دو خط موازی، اگر یکی بر خط سومی عمود باشد، دیگری هم عمود است پس در هر مستطیل تمام چهار زاویه قائمه‌اند.

در هر مستطیل، تمام خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است. از جمله:

۱) **در هر مستطیل قطرها منصف یکدیگرند.**

دقت کنید عکس این قضیه (حکم درست و کلی) برقرار نیست. یعنی اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف یکدیگر باشند، **لزومی ندارد** که این چهارضلعی مستطیل باشد. در حالی که فقط متوازی‌الاضلاع بودن آن قطعی است.

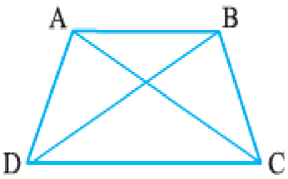
۲) **در هر مستطیل زاویه‌های روبه‌رو برابر و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.** (قطعاً با زاویه‌های 90° چنین مطلبی درست است) عکس این قضیه برقرار نیست. یعنی از این‌که در یک چهارضلعی زاویه‌های روبه‌رو برابر یا زاویه‌های مجاور مکمل هم باشند **نمی‌توان گفت** این چهارضلعی مستطیل است (ولی حتماً متوازی‌الاضلاع هست).

۳) **در هر مستطیل هر دو ضلع روبه‌رو برابرند.**

عکس این قضیه هم **برقرار نیست.** فقط از این‌که در یک چهارضلعی **هر دو ضلع روبه‌رو** مساوی باشند، می‌توان نتیجه گرفت چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و به 90° بودن زاویه‌ها اصلاً ارتباط ندارد.

سوال 1:

ثابت کنید در هر مستطیل قطرها برابرند.



دقت کنید عکس این مثال (قضیه) برقرار نیست. در شکل روبه‌رو قطرهای چهارضلعی ABCD مساوی هستند ولی این چهارضلعی مستطیل نیست.

سوال 2:

هر متوازی‌الاضلاع که در آن طول قطرها مساوی باشند، مستطیل است.

سوال 3:

ثابت کنید: الف) در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

ب) اگر در مثلثی اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلعی، نصف آن ضلع باشد، زاویه‌ی روبه‌روی آن ضلع، قائم‌الزاویه است.

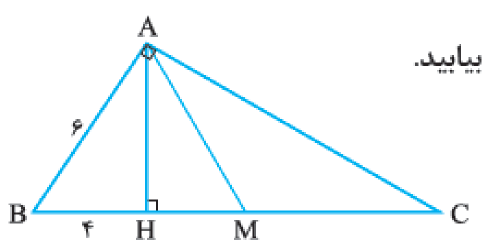
نتیجه‌مهم با رسم میانه‌ی نظیر وتر در هر مثلث قائم‌الزاویه، دو مثلث متساوی‌الساقین به وجود می‌آید.

سوال 4:

یکی از زاویه‌های حاده در مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۲۰° است. زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث را بیابید.

سوال 5:

مطابق شکل AM میانه و AH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه است. طول AM را بیابید.



سوال 6:

ثابت کنید اگر در مثلث قائم‌الزاویه:

الف) یکی از زاویه‌ها 30° باشد، ضلع روبه‌رو به آن زاویه نصف وتر است.
ب) یکی از زاویه‌ها 60° باشد، ضلع روبه‌رو به آن زاویه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر وتر است.
ج) یکی از زاویه‌ها 45° باشد، اندازه‌ی هر ضلع زاویه‌ی قائمه $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر وتر است.

سوال 7:

ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع با اضلاع نامساوی، یک مستطیل پدید می‌آید.

سوال 8:

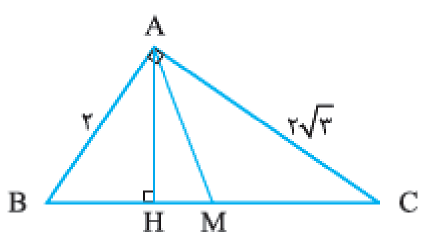
ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک مستطیل، یک مربع به وجود می‌آید اگر ابعاد این مستطیل a و b باشد طول ضلع مربع حاصل را برحسب a و b بیابید.

سوال 9:

در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول دو ضلع قائم ۳ و ۴ است. طول میانه‌ی وارد بر وتر را بیابید.

سوال 10:

مطابق شکل $AB = ۲$ و $AC = ۲\sqrt{۳}$. در این صورت اگر AM میانه و AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، طول MH را بیابید.



سوال 11:

ثابت کنید اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، یکی از زاویه‌ها ۱۵° (یا ۷۵°) باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است.

سوال 12:

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، یکی از زاویه‌ها ۳۰° است. ثابت کنید ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر، زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

سوال 13:

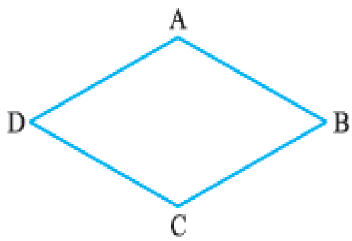
مستطیلی به محیط ۲۰ و مساحت ۹ مفروض است. نیمسازهای داخلی این مستطیل را رسم کرده‌ایم. محیط شکل حاصل را بیابید.

سوال14:

نیمسازهای داخلی یک مستطیل را رسم کرده‌ایم و طول قطر مربع حاصل از رسم این نیمسازها ۸ شده است. اگر طول مستطیل سه برابر عرض آن باشد، مساحت مستطیل را بیابید.

لوزی

تعریف لوزی، نوعی متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع مجاور آن مساوی باشد. می‌توان گفت هر چهارضلعی که دارای چهار ضلع مساوی باشد یک لوزی است، زیرا وقتی مطابق شکل $AB = BC = CD = AD$ باشد، خودبه‌خود اضلاع روبه‌رو، دوبه‌دو مساوی شده و یک متوازی‌الاضلاع حاصل می‌شود که هر دو ضلع مجاورش مساوی‌اند؛ پس $ABCD$ در نهایت یک لوزی می‌باشد.



در هر لوزی، تمام خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است. از جمله:

۱) **در هر لوزی قطرها منصف یکدیگرند.**

دقت کنید عکس این قضیه **برقرار نیست**. یعنی هر چهارضلعی که قطرهایش منصف یکدیگرند، **لزومی ندارد** لوزی باشد.

۲) **در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو مساوی و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.**

عکس این قضیه هم در حالت کلی **برقرار نیست.**

۳) **در هر لوزی اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند.**

عکس این قضیه هم در حالت کلی **درست نخواهد بود.**

سوال 1:

ثابت کنید در هر لوزی:

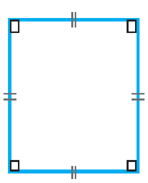
الف) قطرها بر هم عمودند.　　　　ب) قطرها نیمساز زاویه‌های لوزی می‌باشند.

نتیجه قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگر و همچنین نیمساز زاویه‌های آن می‌باشند.

سوال 2:

در یک لوزی به طول ضلع ۴، اندازه‌ی یک زاویه 120° است. قطر کوچک و بزرگ لوزی را بیابید.

مربع



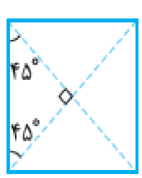
تعریف مربع، نوعی مستطیل است که اضلاع مجاور آن مساوی‌اند. یا این‌که نوعی لوزی است که تمام زاویه‌هایش 90° است.

در هر مربع، تمام خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع برقرار است، از جمله:

۱) در هر مربع قطرها منصف یکدیگرند. دقت کنید عکس این قضیه برقرار نیست.

۲) در هر مربع زاویه‌های روبه‌رو مساوی و زاویه‌های مجاور مکمل‌اند. (همه‌ی زاویه‌ها 90° هستند)

۳) در هر مربع اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند. دقت کنید عکس این قضیه برقرار نیست.



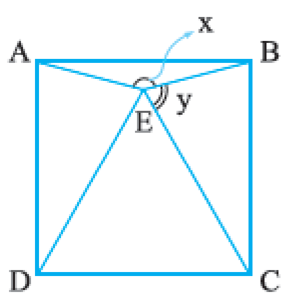
چون مربع یک نوع مستطیل خاص است پس قطرهایش مساوی‌اند و چون یک نوع لوزی خاص است، پس قطرهایش بر هم عمود بوده و نیمساز زاویه‌های مربع نیز می‌باشند.

از برخورد نیمسازهای یک لوزی یا مربع (که همان قطرها هستند) شکلی حاصل نمی‌شود (فقط یک نقطه درمی‌آید).

سوال 1:

مطابق شکل، چهارضلعی ABCD مربع و مثلث DEC متساوی‌الاضلاع است.

مقادیر x و y را بیابید.

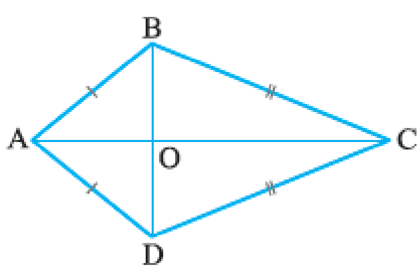


سوال 2:

در چهارضلعی ABCD (که آن را شبه‌لوزی یا کایت می‌گوییم) اضلاع مجاور با هم مساوی‌اند. ثابت کنید:

الف) قطر AC نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است.

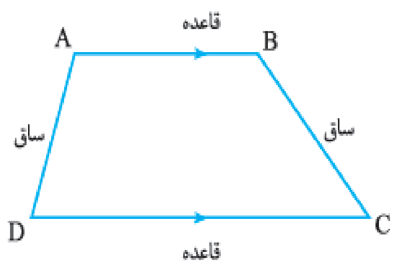
ب) قطرها بر هم عمودند.



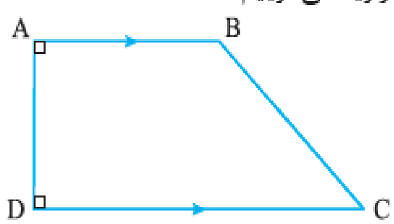
ذوزنقه

تعریف ذوزنقه، چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن با هم موازی باشند.

مطابق شکل، ذوزنقه‌ی ABCD نمایش داده شده است. هریک از دو ضلع موازی با هم را قاعده و هر یک از دو ضلعی که با هم غیر موازی‌اند را ساق می‌گوییم. دو نوع ذوزنقه‌ی خاص و بسیار مهم داریم که به معرفی آن‌ها می‌پردازیم:

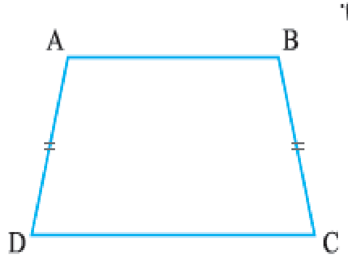


الف) ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه، اگر در یک ذوزنقه، یکی از ساق‌ها بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، ذوزنقه را قائم‌الزاویه می‌گوییم.



دقت کنید در شکل روبه‌رو یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه نشان داده شده است. چون قاعده‌ها با هم موازی‌اند، پس وقتی ساق AD بر قاعده‌ی AB عمود است بر پاره‌خط موازی آن یعنی قاعده‌ی DC هم عمود خواهد بود. در این حالت AD را ساق قائم و BC را ساق غیرقائم (مایل) ذوزنقه می‌گوییم.

ب) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، اگر در یک ذوزنقه، طول ساق‌ها با یکدیگر مساوی باشد، ذوزنقه را متساوی‌الساقین می‌نامیم.



سوال 1:

ثابت کنید در هر ذوزنقه، دو زاویه‌ی مجاور به هر ساق، مکمل یکدیگرند.

سوال 2:

ثابت کنید در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، زاویه‌های مجاور به دو ساق هم‌اندازه‌اند.

سوال 3:

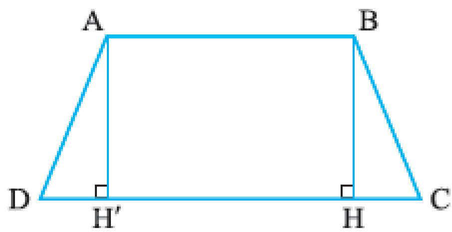
به کمک همنهشتی مثلث‌ها ثابت کنید پاره‌خطی که وسط دو ضلع از مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم بوده و طول آن نصف ضلع سوم است.

سوال 4:

ثابت کنید اگر وسط اضلاع یک چهارضلعی را به یکدیگر به صورت متوالی وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک متوازی‌الاضلاع است. محیط این متوازی‌الاضلاع را بیابید.

سوال 5:

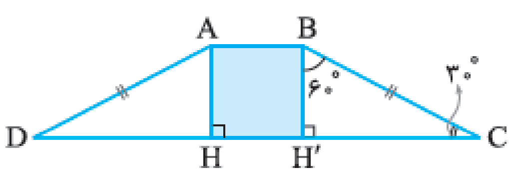
مطابق شکل، ذوزنقه‌ی $ABCD$ متساوی‌الساقین است. از رئوس A و B بر قاعده‌ی بزرگ عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $CH = DH' = \frac{DC - AB}{۲}$



سوال 6:

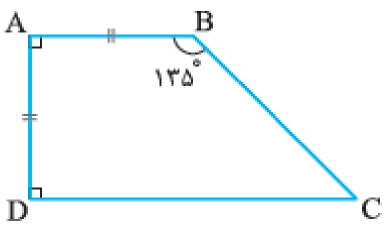
مطابق شکل، $ABCD$ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین و چهارضلعی $ABH'H$ یک مربع است.

اگر مساحت این مربع ۱۶ باشد، محیط ذوزنقه را بیابید.



سوال 7:

در ذوزنقه‌ی روبه‌رو ثابت کنید طول قاعده‌ی بزرگ، دو برابر طول قاعده‌ی کوچک است.



درس دوم

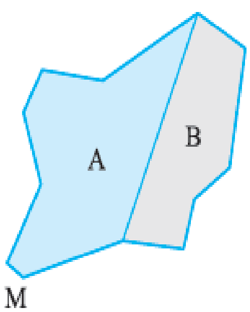
مساحت و کاربردهای آن

از این قسمت از درس، با بررسی اصول مهم مساحت، فرمول مساحت چندضلعی‌های مهم را بیان می‌کنیم. سپس برای هر کدام مسائل متنوعی طرح نموده و در نهایت مسئله‌ها را به صورت ترکیبی درمی‌آوریم.

اصول مهم مساحت در چند ضلعی‌ها فرض می‌کنیم A ناحیه‌ی یک چندضلعی باشد. عدد مثبتی به نام مساحت به A نسبت داده و آن را با $S(A)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت موارد زیر برقرار است:

۱) $S(A)>0$؛ به عبارت دیگر مساحت هر ناحیه در صفحه، عددی مثبت است.

۲) **اگر اشتراک دو ناحیه‌ی چندضلعی فقط روی اضلاع یا رئوس آن‌ها باشد یا اصلاً اشتراک نداشته باشند مساحت اجتماع آن‌ها برابر است با مجموع مساحت‌های آن‌ها.**



مثلاً در شکل روبه‌رو، ناحیه‌ی M به دو ناحیه‌ی A و B، تفکیک شده است. در این صورت $S(M)=S(A)+S(B)$.

۳) **اگر دو مثلث همنهشت باشند، مساحت آن‌ها مساوی خواهد بود.**

۴) **مساحت مستطیلی با طول a و عرض b (ابعاد a و b) عبارت است از** $S=ab$.

نتیجه مساحت مربعی به ضلع a برابر است با a^2.

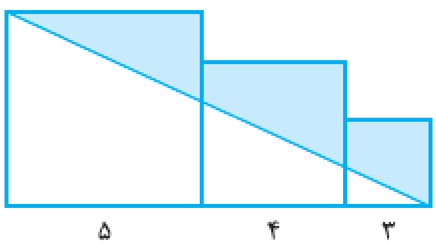
سوال 1:

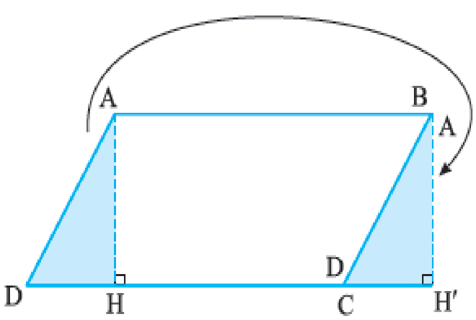
به کمک فرمول مساحت مستطیل، ثابت کنید مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع قائم.

سوال 2:

در شکل روبه‌رو سه مربع به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ در کنار هم

واقع‌اند. مساحت قسمت رنگی کدام است؟





مساحت متوازی الاضلاع برای این‌که مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD را بیابیم، مطابق شکل از رأس A، ارتفاع AH را بر DC وارد می‌کنیم. حال مثلث AHD را بریده و طوری به سمت راست متوازی‌الاضلاع منتقل می‌کنیم که ضلع AD، روی ضلع BC منطبق شود.

چهارضلعی ABH′H یک مستطیل است، زیرا متوازی‌الاضلاعی است با یک زاویه‌ی 90°. بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD با مساحت مستطیل ABH′H یکسان است:

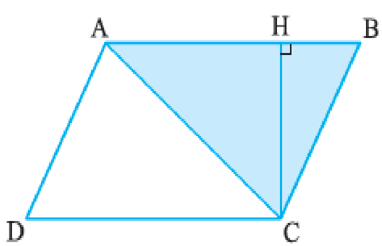
$$S_{\square ABH'H} = \underset{\text{طول مستطیل}}{\underset{\downarrow}{AB}} \times \underset{\text{عرض مستطیل}}{\underset{\downarrow}{AH}} \xrightarrow{S_{\square ABCD} = S_{\square ABH'H}} S_{\square ABCD} = AB \times AH = CD \times AH$$

به‌عبارت‌دیگر مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع در ارتفاع وارد بر آن.

سوال 3:

طول دو ضلع متوازی‌الاضلاعی ۲ و ۸ و ارتفاع نظیر ضلع بزرگ‌تر برابر ۴ است. طول ارتفاع دیگر این متوازی‌الاضلاع را بیابید.

مساحت مثلث غیر مشخص برای محاسبه‌ی مساحت یک مثلث غیرمشخص، از فرمول مساحت متوازی‌الاضلاع استفاده می‌کنیم. مطابق شکل یک قطر دلخواه از متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم می‌نماییم. سپس از یکی از دو رأس این قطر عمودی بر ضلع مقابلش وارد می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADC}: \begin{cases} AD = BC \\ AB = DC \\ AC = AC \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC} \to S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{ADC}} \qquad (1)$$

$$\to S_{\underset{ABCD}{\square}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{ADC}} \overset{\text{طبق}(1)}{=} S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{ABC}} \to \boxed{S_{\underset{ABCD}{\square}} = 2S_{\overset{\Delta}{ABC}}} \qquad (2)$$

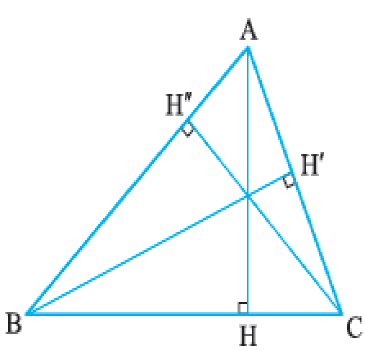
از طرفی مساحت یک متوازی‌الاضلاع برابر است با ضرب ارتفاع در قاعده، یعنی $S_{\underset{ABCD}{\square}} = AB \times CH$، پس طبق (۲) داریم: $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} AB \times CH$

به‌عبارت‌دیگر **مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب قاعده (هر کدام از اضلاع) در ارتفاع نظیرش.** دقت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر هر کدام از اضلاع قائم را قاعده بگیریم، ارتفاع نظیر آن، ضلع دیگر قائم است.

قرارداد. مطابق شکل، مثلث ABC با اضلاع $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$ مفروض است. در این صورت اندازه‌ی ارتفاع AH نظیر ضلع $BC = a$ را با h_a نشان می‌دهیم.

به همین ترتیب اندازه‌ی ارتفاع نظیر ضلع $AC = b$ را با h_b و اندازه‌ی ارتفاع نظیر ضلع $AB = c$ را با h_c نمایش خواهیم داد. در این صورت داریم:

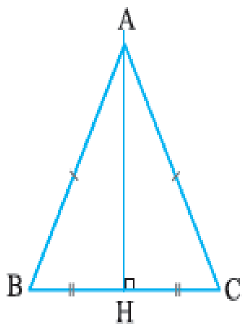
$$\boxed{S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c}$$



نتیجه‌بسیارمهم طبق فرمول مساحت مثلث، حاصل‌ضرب هر ضلع در ارتفاع نظیرش، دو برابر مساحت مثلث است:

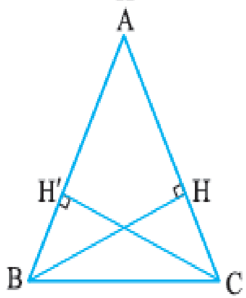
$$\boxed{ah_a = bh_b = ch_c = ۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$

در مثلث متساوی‌الساقین:



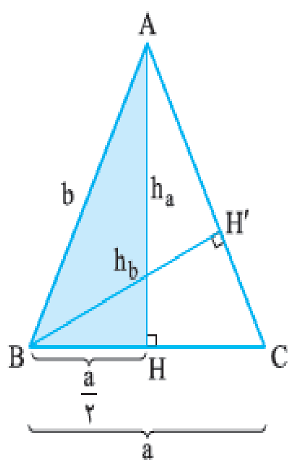
۱) ارتفاع وارد بر قاعده، طول قاعده را نصف می‌کند.

$$AB = AC\,,\, AH \perp BC \rightarrow BH = HC = \frac{BC}{۲}$$



۲) طول ارتفاع وارد بر ساق‌ها، با یکدیگر برابرند.

$$AB = AC\,,\, BH \perp AC\,,\, CH' \perp AB \rightarrow CH' = BH$$

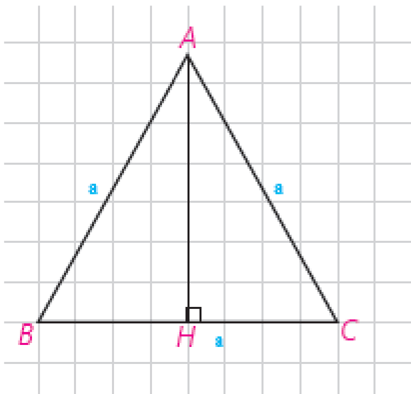


اگر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقینی را a و ارتفاع وارد بر آن را h_a و همچنین ساق این مثلث را b و ارتفاع وارد بر ساق را h_b بگیریم، می‌توان نوشت:

$$\overset{\Delta}{ABH} : b^۲ = (\frac{a}{۲})^۲ + h_a{}^۲$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : ah_a = bh_b = ۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

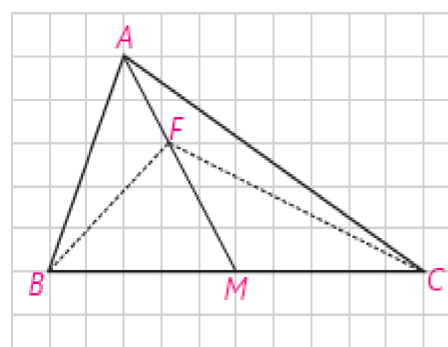
سوال 4:



فرض کنیم اندازهٔ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟

به کمک قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $S = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$.

سوال 5:



نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

اگر F هر نقطه‌ای روی میانهٔ AM به‌جز نقطهٔ M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟

سوال 6:

نشان دهید اگر وسط های سه ضلع مثلث را بهم متصل کنیم، چهار مثلث هم نهشت پدید می آید که مساحت های یکسانی دارند.

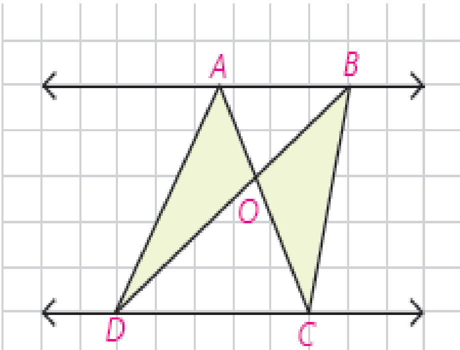
سوال 7:

نشان دهید سه میانه هر مثلث همرس در نقطه ای درون مثلث همرس اند. بطوریکه فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر

$\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این این ضلع است، و فاصله اش تا هر راس اندازه میانه نظیر آن راس است.

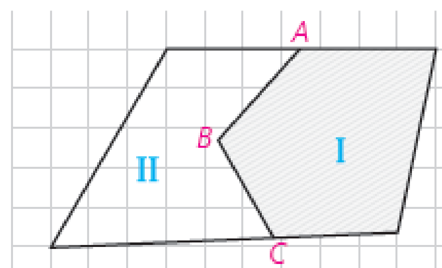
توجه:

ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به‌طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$.
چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟



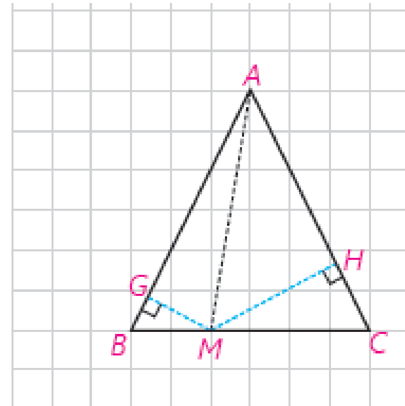
مسئله:

در شکل دو مزرعهٔ I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به‌طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟



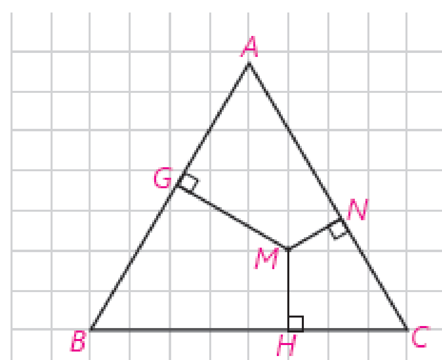
سوال 8:

در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AC = AB$ است؛ نقطهٔ دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C درنظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMC} و S_{AMB} را بنویسید.
مساحت مثلث ΔABC را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید.
چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



سوال 9:

نقطهٔ دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازهٔ a درنظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث MAC ، MBC و MAB را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت ΔABC چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



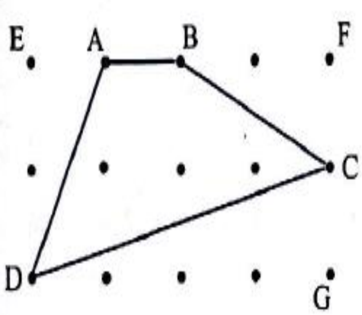
سوال 10:

اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع فاصله‌های نقطهٔ M درون مثلث از سه ضلع، برابر ۲، ۴ و ۶ باشند. اندازهٔ ضلع مثلث را محاسبه کنید.

نقاط شبکه‌ای و مساحت

قضیه‌ی پیک (pick)

اگر یک شبکه از نقاط داشته باشیم به طوری که فاصله‌ی عمودی و افقی هر دو نقطه‌ی مجاور آن برابر یک واحد باشد، آن‌گاه مساحت چندضلعی که رأس‌های آن، نقاط این شبکه هستند به شرح زیر به دست می‌آید:



مساحت چندضلعی: $S = m + \frac{n}{2} - 1$

m: تعداد نقاطی که داخل چندضلعی قرار دارند.

n: تعداد نقاطی که روی محیط چندضلعی قرار دارند.

به طور مثال برای شکل فوق داریم:

$S = 3 + \frac{4}{2} - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$

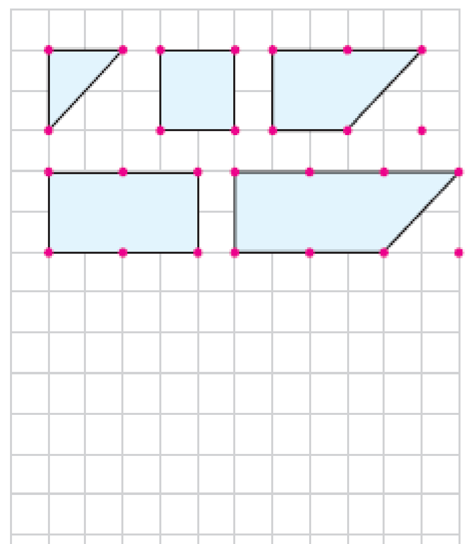
تمرینات:

۱ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

۲ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ درونی می‌تواند داشته باشد؟

۳ــ در تمام چندضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است،

یعنی $i=\circ$ و تعداد نقاط مرزی، $b=۳،۴،۵،......$.



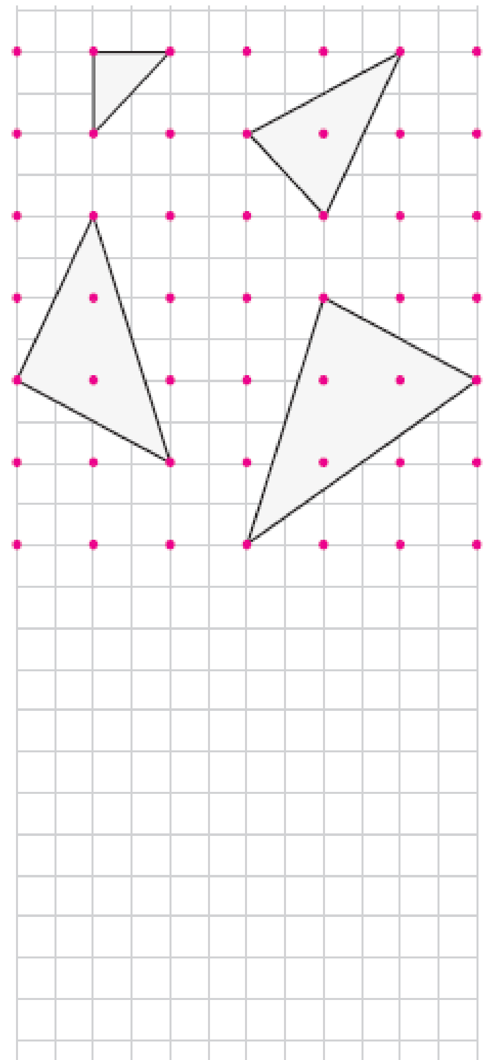
جدول زیر را با محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

$i=\circ$ ، $b=۳،۴،۵،......$

تعداد نقاط مرزی i	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$			

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

$S=\frac{b}{....}-......+\circ$



۴ــ اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای $b=۳$ باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید.

(نتیجه‌گیری $S=\frac{b}{۲}-۱+۰$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید درنظر داشته باشید.)

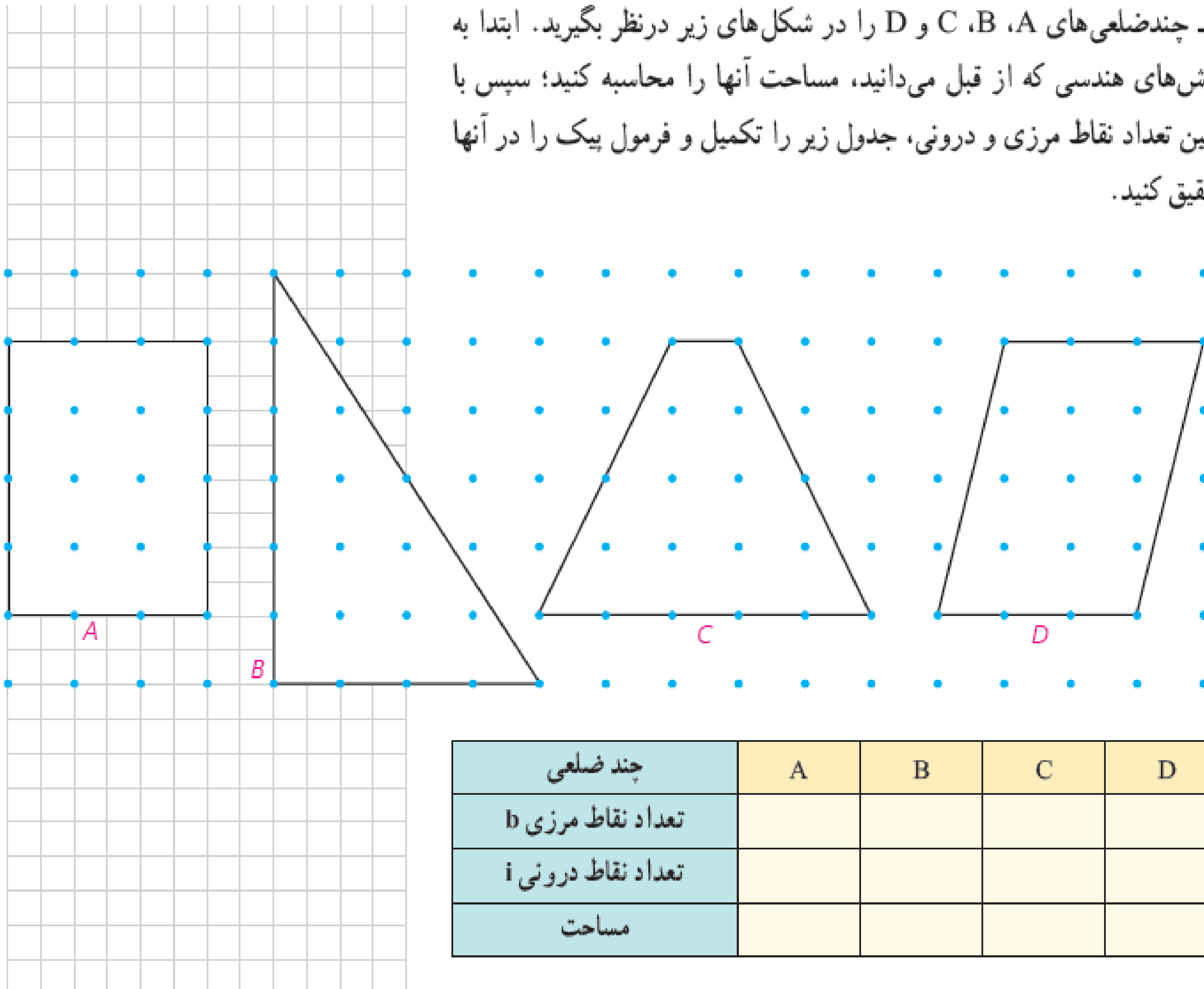
تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{۲}-۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	
S	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$				

با تکمیل جدول بالا و مقایسهٔ اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب‌هایی ظاهر می‌شوند.

$$\boxed{S=\frac{b}{....}-.......+.......}$$

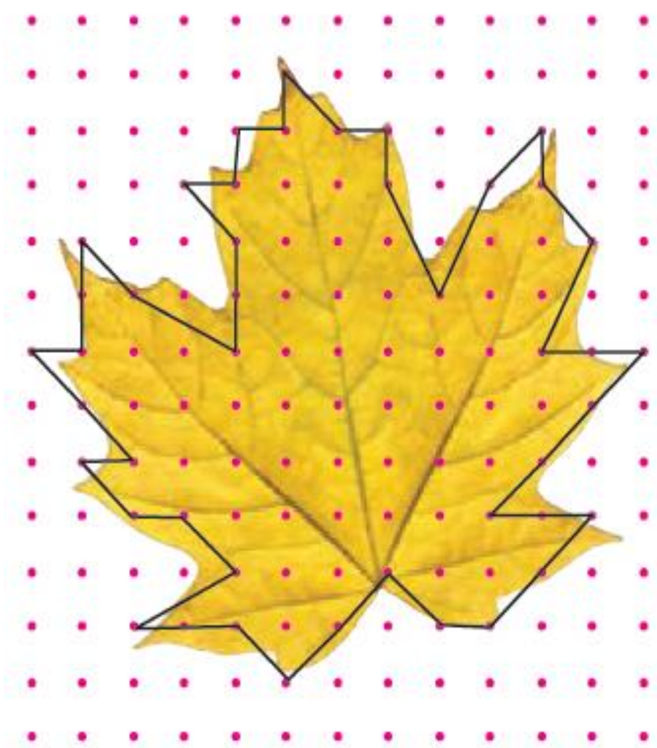
کاردرکلاس

۱ــ چندضلعی‌های A، B، C و D را در شکل‌های زیر درنظر بگیرید. ابتدا به روش‌های هندسی که از قبل می‌دانید، مساحت آنها را محاسبه کنید؛ سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.



چند ضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b				
تعداد نقاط درونی i				
مساحت				

کار در کلاس

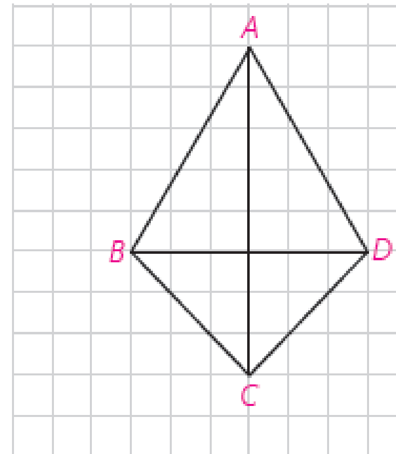


اگر فاصلهٔ نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی‌متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحهٔ شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.

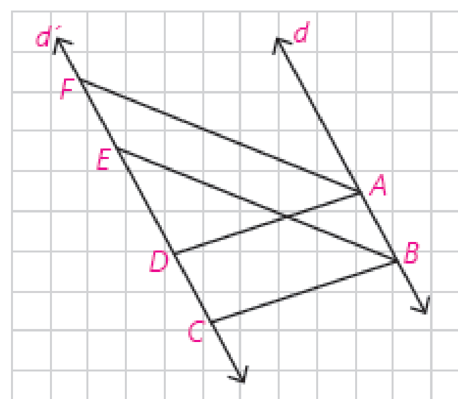
واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.

تمرین

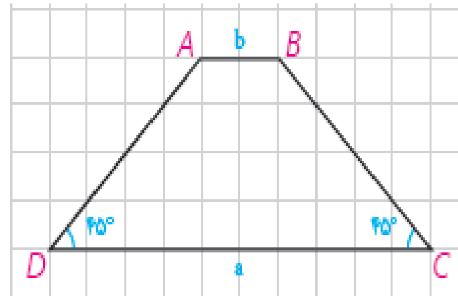
۱ــ در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.



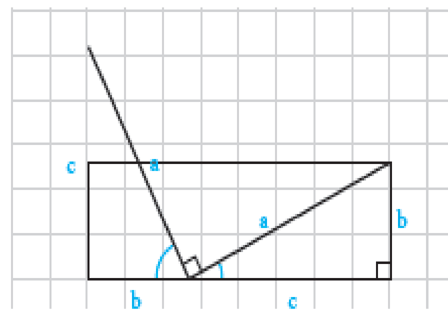
۲ـ در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل $AB = AD$ و $BC = CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عموداند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.



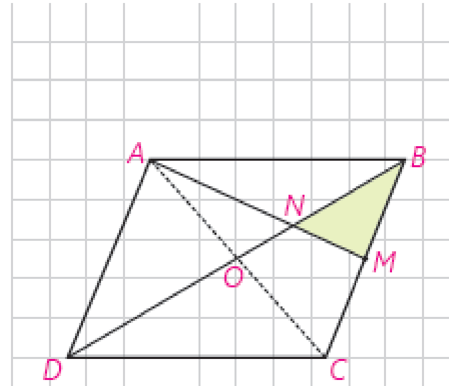
۳ـ در شکل دو خط d و d′ موازی‌اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟



۴ــ در ذوزنقهٔ شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده °۴۵ است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.

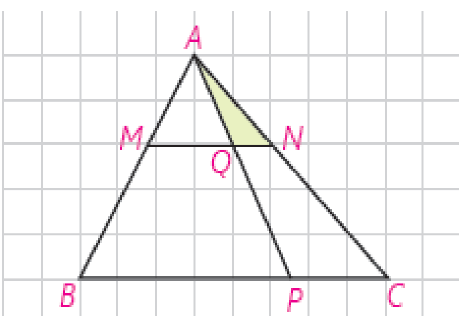


۵ــ مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به‌دو طریق به‌دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟

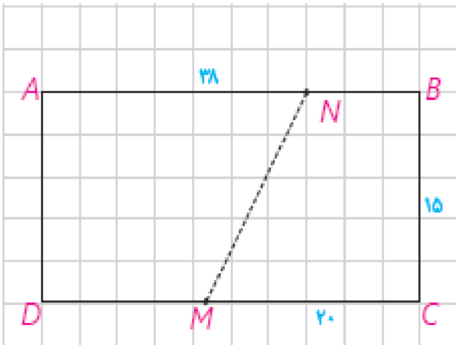


۶ــ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده‌است. نشان دهید :

$S_{BMN} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD}$.



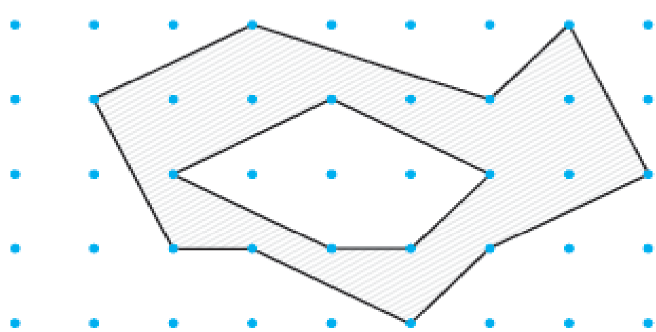
۷ــ در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{۱}{۲}$. همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{۱}{۳}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



۸ــ زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به‌طور مساوی در آن شریک‌اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطهٔ M که MC = ۲۰ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعهٔ با مساحت‌های مساوی بین آن دو تقسیم شود.

۹ــ سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویهٔ قائمه است.

۱۰ــ با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید.



۱۱ــ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

۱۲ــ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

یادداشت:

چندضلعی ها و ویژگی هایی از آنها

1–درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید:

1) تعداد نقاطی که از n نقطه ی غیر واقع بر یک خط راست ، می گذرد برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$.
2) مستطیل ، متوازی الاضلاعی است که حد اقل یکی از زاویه های آن قائمه باشد.
3) هر لوزی یک مربع است.
4) تمام مربع ها، متوازی الاضلاع هستند.
5) اگر در مثلثی میانه وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

2–گزینه درست را انتخاب کنید:

1) تعداد قطرهای یک nضلعی محدب از سه برابر تعداد اضلاع، پنج واحد بیشتر است. مقدار n کدامست؟
الف) 8 ب) 9 ج) 10 د) 11
2) اگر در یک چند ضلعی دو زاویه قائمه باشند ، آن چندضلعی:
الف) مربع است ب) مستطیل است ج) الف و ب د) به طورقطع مشخص نیست
3) در یک چهارضلعی، اضلاع مقابل دوبدو موازیند، در این صورت آن چهارضلعی
الف) متوازی الاضلاع است ب) مربع است ج) مستطیل است د) لوزی است
4) دو قطر یک چهارضلعی برابرند، در این صورت این چهارضلعی
الف) متوازی الاضلاع است ب) مستطیل است ج) ذوزنقه متساوی الساقین است د) نامشخص است
5) در یک n ضلعی محدب، تعداد اضلاع و قرها روی هم 66 است. از هر ردس چند قطر می گذرد؟
الف) 8 ب) 9 ج) 10 د)11
6) وسط های اضلاع یک چهارضلعی محدب را متوالیا به هم وصل کرده ایم تا یک چهار ضلعی جدیدی به دست آید. از تقاطع نیمساز های داخلی این چهار ضلعی جدید کدام شکل پدید می اید؟
الف) مربع ب) مستطیل ج) متوازی الاضلاع د) لوزی
7) طول یک مستطیل دو برابر عرض آن است. نیمسازهای زوایای مستطیل را رسم می کنیم، محیط مستطیل چند برابر محیط مربع ایجاد شده در درون آن است؟
الف)$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ب) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ج) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ د) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3– جای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید:

1) تعداد قطرهای یکn ضلعی محدب برابر است با.............................

2) در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه وتر برابر است با ....

3) در هر لوزی، قطرها .... یکدیگرند و روی .... زاویه ها می باشند.

4) در متوازی الاضلاع ، قطرها .... یکدیگرند و لزوما با هم .... نیستند.

5) مربع، چهارضلعی است که هر چهار ضلع آن .... و .... یک زاویه قائمه دارد.

از تقاطع نیمسازهای داخلی یک مستطیل ، یک مربع بوجود می آید . اگر ابعاد مستطیل 5 و 10 باشد, محیط مربع حاصل برابر است با ....

6) در مثلث قائم الزاویه، ضلع روبرو به زاویه $30°$ .... وتر است و ضلع روبرو به زاویه $45°$ .... وتر است و ضلع روبرو به زاویه $60°$ .... وتر است.

4-اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

1) چندضلعی
2) قطر چند ضلعی
3) چندضلعی محدب
4) ذوزنقه

5- ثابت کنید اگردر یک چهارضلعی هردو زاویه مقابل هم اندازه باشند، آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

6- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، دو زاویه مجاور، مکملند.

7- ثابت کنید چهار ضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و برابر باشند، متوازی الاضلاع است.

8- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

9-ثابت کنید اگر در یک ذوزنقه، دو زاویه مجاور به یک قاعده برابر باشند، آن ذوزنقه متساوی السقین است.

10- ثابت کنید در هر لوزی، قطرها عمود منصف یکدیگرند و روی نیمساز زاویه ها می باشند.

11- نشان دهید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی الاضلاع، یک مستطیل پدید می آید.

12- نشان دهید از تقاطع نیمسازهای داخلی یک مستطیل، یک مربع پدید می آید.

13- نشان دهید اگر در مثلث قائم الزاویه ای یک زاویه $15°$ باشد، در این صورت ارتفاع وارد بر وتر برابر است با ربع وتر.

14-نشان دهید اگر از به هم وصل کردن متوالی اوساط یک چهارضلعی دلخواه، یک متوازی الاضلاع به دست می آید.

مساحت و کاربردهای آن

15- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید:

1) اگر دو قطر یک ذوزنقه قائم الزاویه بر هم عمود باشند، ارتفاع واسطه ی هندسی بین دو قطعه است.

2) اندازه دو ضلع قائمه از مثلث قائم الزاویه ای 8 و $2\sqrt{11}$ است. فاصله ی نقطه ی تلاقی میانه ها از وسط وتر این مثلث $\frac{1}{3}$ وتر است

16- گزینه درست را انتخاب کنید:

1) در یک لوزی اندازه هر ضلع 10 و نسبت اندازه های دو قطر 3 به 4 است. مساحت لوزی کدام است؟

الف) 96 ب) 108 ج) 24 د) 48

2) در یک کایت اندازه ی اضلاع 17 و 10 و قطر بزرگ 21 است. مساحت کایت کدام است؟

الف)154 ب) 172 ج) 168 د) 196

3) یک متوازی الاضلاع از یک مربع و دو مثلث قائم الزاویه مساوی هم تشکیل شده است. اگر مساحت یک مربع و یک مثلث قائم الزاویه 64 و 24 باشد، محیط متوازی الاضلاع کدام است؟

الف) 32 ب) 36 ج) 48 د) 54

4) در مثلث قائم الزاویه ای نسبت دو قاعده $\frac{2}{3}$ است. اگر وسط قاعده ی کوچک را به وسط ساق قائم وصل کنیم، مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت ذوزنقه ی اصلی است؟

الف) $\frac{1}{10}$ ب) $\frac{1}{9}$ ج) $\frac{1}{8}$ د) $\frac{1}{6}$

5) در یک ذوزنقه ی متساوی الساقین اندازه ی دو قاعده 5 و 9 و طول ساق 6 واحد است. مساحت این ذوزنقه کدام است؟

الف) $14\sqrt{6}$ ب) $21\sqrt{2}$ ج) $21\sqrt{3}$ د) $28\sqrt{2}$

17– جای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید:

1) در هر چهار ضلعی که قطرها بر هم عمود باشند، مساحت برابر است با ....

2) اگر وسط های اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث .... به دست می آید که دارای .... برابر می باشند.

3) سه میانه هر مثلث در نقطه ای درون مثلث .... ، به طوری که فاصله ی این نقطه تا وسط هر ضلع برابر .... اندازه میانه ی نظیر این ضلع است و فاصله اش از هر رأس .... اندازه میانه ی نظیر این رأس است.

4) در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده .... برابر است با ....

5) در هر مثلث متساوی الساقین، تفاضل قدر مطلق فاصله های هر نقطه روی امتداد قاعده از خط های شامل دو ساق برابر است با ....

6) مجموع فواصل هر نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر است با ....

7) یک میانه در هر مثلث ، آن را به دو مثلث با .... برابر تقسیم می کند.

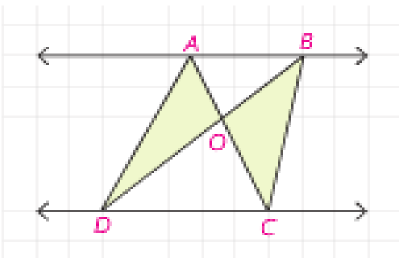
18- نشان دهید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث با مساحت های برابر تقسیم می کند.

19- نشان دهید اگر وسط های اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث همنهشت به دست می آید که دارای مساحت های برابر می باشند.

20-نشان دهید سه میانه هر مثلث در نقطه ای درون مثلث همرسند، به طوری که فاصله ی این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه ی نظیر این ضلع است و فاصله اش از هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه ی نظیر این رأس است.

21- با رسم سه میانه مثلث، نشان دهید سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم مساحت تقسیم می کند.

22- فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند به طوریکه دو خط AC و BD در نقطه ای مانند O متقاطع باشند. نشان دهید مساحت های دو مثلث AOD و BOC برابرند.



23- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده از دو ساق برابر است با مقداری ثابت و این مقدار ثابت را بدست آورید.

24- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، تفاضل قدر مطلق فاصله های هر نقطه روی امتداد قاعده از خط های شامل دو ساق برابر است با ارتفاع وارد بر ساق.

25- نشان دهید مجموع فواصل هر نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر است با مقداری ثابت و این مقدار ثابت را بدست آورید.

فصل چهارم
تجسم فضایی