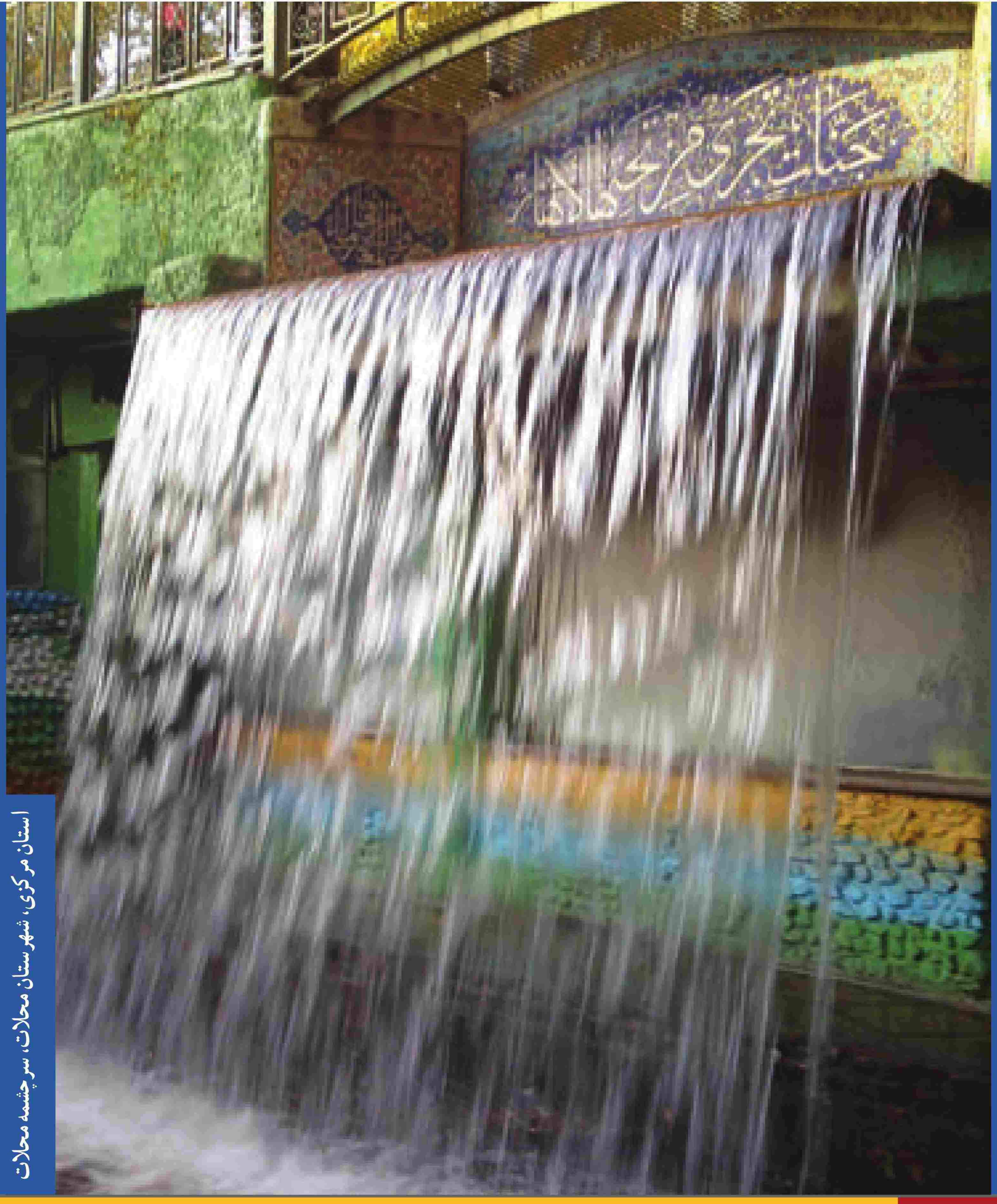


استان مرکزی، شهرستان محلات، سرچشمه محلات

«قُل هاتو بُرهانَکُم اِنْ کُنتُم صادِقین»
آیه ۶۴ سوره نمل
«بگو اگر راست می‌گویید
دلیل خود را بیاورید»

۱ آشنایی با مبانی ریاضیات

۱ آشنایی با منطق ریاضی

۲ مجموعه ـ زیر مجموعه

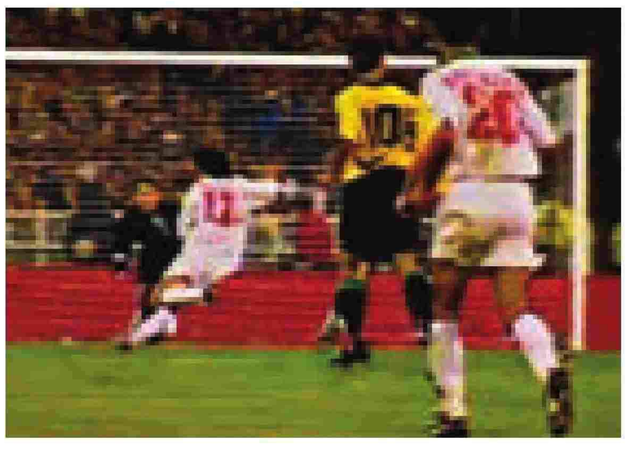
۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها ـ جبر مجموعه‌ها

۱ آشنایی با منطق ریاضی

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین[1] نیز می‌گویند؛ دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به‌کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق **استدلال‌ها می‌پردازد** و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند. امروزه منطق ریاضی در علوم مربوط به رایانه نیز به‌کار گرفته می‌شود. در این درس کار ما بسیار شبیه به بیان قواعد دستور زبان برای یک زبان معین است.

گزاره



استدلال سادهٔ زیر را در نظر بگیرید :

تیم ملی فوتبال ایران یا تیم ملی فوتبال استرالیا به جام‌جهانی می‌رود.

تیم ملی فوتبال استرالیا به جام‌جهانی نمی‌رود.

نتیجه : تیم ملی فوتبال ایران به جام‌جهانی می‌رود.

این استدلال از چند جملهٔ خبری به‌دست می‌آید، چنانچه دو جملهٔ اول این استدلال را درست درنظر بگیریم، در این صورت نتیجه‌گیری جملهٔ سوم منطقی به نظر می‌رسد. در منطق ریاضی به دو جملهٔ خبری نخست، **مفروضات استدلال** و به جملهٔ خبری سوم، **نتیجه استدلال** گفته می‌شود. یک استدلال می‌تواند از چندین جملهٔ خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه، مفروضات استدلال هستند.

کار در کلاس

نتیجه استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱ هیچ عدد مرکّبی، عددی اول نیست.

۴ عددی مرکب است

نتیجه : **۴ عدد اول نیست**

۱ـ Symbolic Logic

۲ اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد آن‌گاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به‌صورت ناسالم پیش‌بینی شده است.

نتیجه : فردا مدارس تعطیل است

این استدلال‌ها، از جمله‌های خبری تشکیل شده است. به **جملهٔ خبری که درحال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره[1] می‌گوییم**. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p، q، r و ... نمایش می‌دهند.

درست[2] یا نادرست[3] بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است. برای مثال گزاره زیر یک حدس در ریاضیات است.

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت[4]»

مانند :

۴=۲+۲ ; ۶=۳+۳ ; ۸=۳+۵ ; ۱۰=۵+۵ ; ۱۲=۵+۷ ; ...

این حدس تاکنون اثبات نشده است؛ از طرفی مثال نقضی هم برای آن یافت نشده است. در هر صورت این گزاره فقط دارای یک ارزش است. اگر ارزش این گزاره درست نباشد، پس ارزش آن حدس نادرست است.

خواندنی

حدس‌ها در ریاضیات به مسائل حل نشده‌ای می‌گویند که پرونده آنها در جهان علم باز است. این‌گونه مسائل علاوه‌بر اینکه درستی آنها اثبات نشده است، تاکنون مثال نقضی هم برای آنها پیدا نشده است، حدس گلدباخ نمونه‌ای از این مسائل است.

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند، بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً درب کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

کار در کلاس

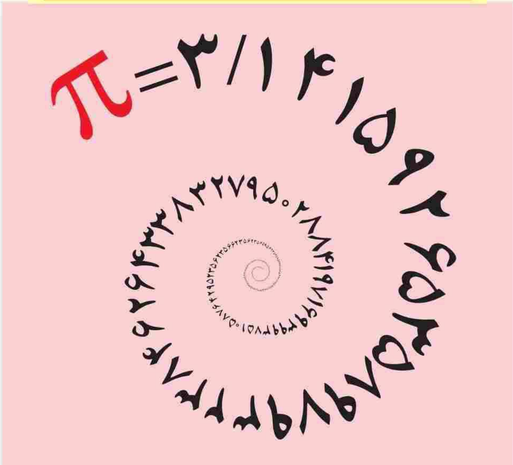
از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

- ایران کشور آسیایی است. **گزاره ای درست است**
- در پرتاب یک تاس احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید برابر با $\frac{۱}{۳}$ است. **گزاره ای درست است**

۱ـ Proposition ۲ـ Truth ۳ـ False

۴ـ حدس گلد باخ

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500


π=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹۵۰۲۸۸۴۱۹۷۱۶۹۳۹۹۳۷۵۱۰۵۸۲۰۹۷۴۹۴۴۵۹۲۳۰۷۸۱۶۴۰۶۲۸۶۲۰۸۹۸۶۲۸۰۳۴۸۲۵۳۴۲۱۱۷۰۶۷۹۸۲۱۴۸۶۵۱۳۲۸۲۳۰۶۴۷۰۹۳۸۴۴۶۰۹۵۵۰۵۸۲۳۱۷۲۵۳۵۹۴۰۸۱۲۸۴۸۱۱۷۴۵۰۲۸۴۱۰۲۷۰۱۹۳۸۵۲۱۱۰۵۵۹۶۴۴۶۲۹۴۸۹۵۴۹۳۰۳۸۱۹۶۴۲۸۸۱۰۹۷۵۶۶۵۹۳۳۴۴۶۱۲۸۴۷۵۶۴۸۲۳۳۷۸۶۷۸۳۱۶۵۲۷۱۲۰۱۹۰۹۱۴۵۶۴۸۵۶۶۹۲۳۴۶۰۳۴۸۶۱۰۴۵۴۳۲۶۴۸۲۱۳۳۹۳۶۰۷۲۶۰۲۴۹۱۴۱۲۷۳۷۲۴۵۸۷۰۰۶۶۰۶۳۱۵۵۸۸۱۷۴۸۸۱۵۲۰۹۲۰۹۶۲۸۲۹۲۵۴۰۹۱۷۱۵۳۶۴۳۶۷۸۹۲۵۹۰۳۶۰۰۱۱۳۳۰۵۳۰۵۴۸۲۰۴۶۶۵۲۱۳۸۴۱۴۶۹۵۱۹۴۱۱۶۰۹۴۳۰۵۷۲۷۰۳۶۵۷۵۹۵۹۱۹۵۳۰۹۲۱۸۵۱۱۹۳۸۰۹۵۲۵۵۴۴۳۵۷۴۵۲۴۱۵۶۸۴۶۳۱۴۹۳۱۱۸۶۷۲۸۲۳۴۵۳۶۴۰۷۵۴۷۳۱۳۶۲۳۵۲۵۴۰۲۸۹۴۵۸۸۶۶۴۴۷۴۲۴۳۵۳۶۰۲۶۲۴۹۷۱۲۷۰

گزاره‌نما

فعالیت

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید :

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاپ یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. ($۳x+۲y=۶$)

۱ ارزش کدام‌یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟ **ارزش هیچکدام را نمی توان تعیین کرد**

۲ چنانچه به جای متغیر در جملهٔ «a عددی فرد است» قرار دهیم $a=۳$ در این صورت ارزش آن را تعیین کنید؟ **درست است**

اگر در آن $a=۴$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟ **نادرست است**

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

کار در کلاس

جاهای خالی را پر کنید :

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{$ ۱ , ۲ , ۳ $\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به‌جای A قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

هر زیر مجموعه ی سه عضوی از مجموعه ی اعداد ۱ تا ۶ ، را اگر قرار دهیم ارزش گزاره درست است .

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{$ ۱ $\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جملهٔ «پ» قرار دهیم $x=$ ۲ و $y=$ • در این صورت ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x=$ • و $y=$ ۲ در این صورت ارزش گزاره حاصل نادرست است.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا اینکه گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود، **دامنهٔ متغیر**[1] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

برای مثال، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «p عددی اول است» مجموعهٔ اعداد طبیعی، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «x عددی زوج است» مجموعهٔ اعداد صحیح و دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «$۴x^۲+x-۵=۰$» مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌توان درنظر گرفت.

در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به‌ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعهٔ جواب**[2] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم : $S \subseteq D$.

۱ـ Domain of Variable

۲ـ Answer Set

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

کار در کلاس

دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. $(D=\mathbb{Z})$ $S=\{۰,\pm ۷,\pm ۱۴,...\}$

ب) $۱۵x^۲-۷x-۸=۰$ $(D=\mathbb{R})$ $S=\{۱,-\frac{۸}{۱۵}\}$

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\})=\frac{۱}{۶}$. $(D=\{۱,۲,....,۶\})$ $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

ترکیب گزاره‌ها

فعالیت

۱ هریک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲ آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به‌کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

- عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است. **دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .**
- عدد ۲ زوج است یا عدد ۵ مضرب ۳ است. **دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .**
- اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است. **دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .**
- چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد. **یک گزاره با ارزش نادرست است.**
- اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس. **دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .**

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آیند.

در ادامه ادات ربط را برای ترکیب گزاره‌ها معرفی می‌کنیم. با در دست داشتن ارزش گزاره‌های p ، q ، r و ... و معرفی ادات ربط، می‌توان گزاره‌های مرکب را تعریف کرد که ارزش گزاره‌های مرکب فقط به ارزش گزاره‌های p ، q ، r و ... و ادات ربط بین آنها بستگی دارد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p به‌صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. اگر ارزش گزاره p درست باشد در این‌صورت ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت «~» ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال : نقیض گزاره «۲ عددی گنگ است» را می‌توان به‌صورت‌های زیر نوشت.

«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد» یا «۲ عددی گنگ نیست.»

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به‌صورت روبه‌رو است :

$\sim p$	p
ن	د
د	ن

مثال : جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره p مقایسه کنید.

حل :

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در هر حالت از جدول، ارزش p با ارزش $\sim(\sim p)$ یکسان است، در این حالت می‌گوییم دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ **هم‌ارز منطقی** هستند و می‌نویسیم : $\sim(\sim p) \equiv p$.

در حالت کلّی اگر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم p هم ارز است با q .

ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

p : $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است.

q : ۲ عددی اول نیست.

گزاره مرکب « $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست» که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «p یا q» را که به‌صورت «$p \vee q$» می‌نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی «$\vee$» فاصل گفته می‌شود. گزارهٔ مرکب زیر را در نظر بگیرید :

«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید **یا** مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید.»

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزاره مرکب بالا درست است. چنانچه مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزاره مرکب درست است.

گزاره مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

بنابراین ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش $p \vee q$ درست است. جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت روبه‌رو است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال : هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به‌طوری که $a \times b = ۰$ در این صورت $a = ۰$ یا $b = ۰$ یعنی :

$$a, b \in \mathbb{R} \,,\; a \times b = ۰ \Rightarrow (a = ۰) \vee (b = ۰)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حل معادله‌ها استفاده می‌کنیم :

$$x^۲ + ۷x = ۰ \Rightarrow x(x+۷) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = -۷$$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «$p \wedge q$» که خوانده می‌شود «p و q» را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی «$\wedge$» عاطف گفته می‌شود.

فعالیت

گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.»

■ آیا ارزش این گزارهٔ مرکب درست است؟ **ارزش آن بستگی به ارزش گزاره های تشکیل دهنده ی آن دارد .**

فرض کنید :

p : سوگند فارغ‌التحصیل شد.

q : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

■ چنانچه ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **نادرست**

■ چنانچه ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **نادرست**

■ هرگاه ارزش دو گزاره p و q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **نادرست**

■ هرگاه ارزش دو گزاره p و q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **درست**

بنابراین ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p \wedge q$ به‌صورت روبه‌رو است :

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

کار در کلاس

۱ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.	د	د	د	د
در تیر ماه هوای آبادان سرد است.	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن	د	د	ن
۲ عددی اول است	۲+۳=۷	د	ن	د	ن
هر ماه ۳۰ روز دارد.	۵<۱	ن	ن	ن	ن
(۷−) اول است	۹ عددی مرکب است	ن	د	د	ن

۲ با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

هم ارز هستند

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همهٔ حالت‌های ارزش دو گزاره $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ یکسان هستند پس $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ به این هم‌ارزی **قانون دمورگان** در منطق ریاضی گفته می‌شود.

۳ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

هم ارز هستند

مثال : مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم :

$$(۲x-y)^۲+(x-۱)^۲=۰$$

حل : چون $(x-۱)^۲\geq ۰$ و $(۲x-y)^۲\geq ۰$ بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که :

$$\left[(۲x-y)^۲=۰\right]\ \left[(x-۱)^۲=۰\right] \Rightarrow \begin{cases} ۲x-y=۰ \\ x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \end{cases} \Rightarrow y=۲$$

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «$p\Rightarrow q$» که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را **ترکیب شرطی** دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

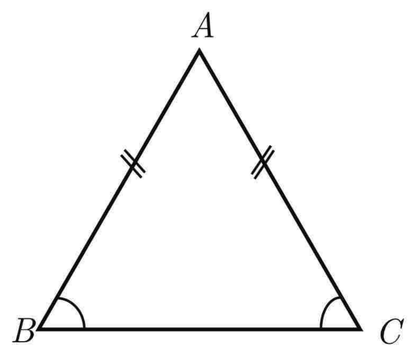
خواندنی

گزاره مرکب «$p\Rightarrow q$» را به‌صورت‌های «p شرط کافی برای q است» و «q شرط لازم برای p است» می‌خوانیم.

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

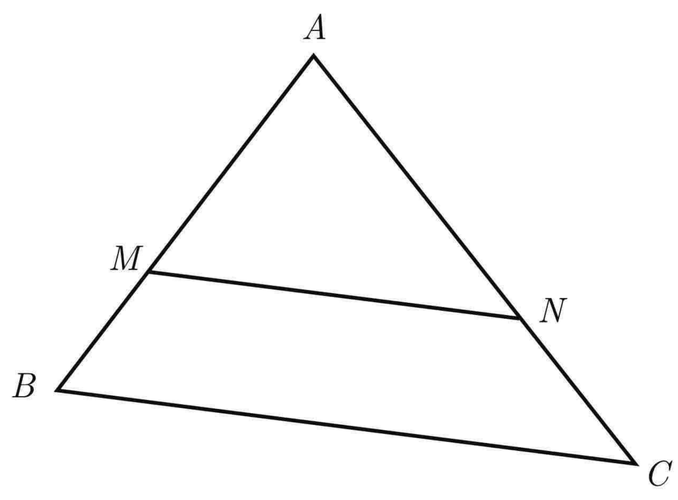
تا به‌حال در ریاضیات و هندسه با گزاره‌های شرطی بسیاری مواجه بوده‌اید، در زیر چند نمونه می‌آوریم.

۱ اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد. آن‌گاه دو زاویه مجاور به قاعده برابرند.



$\overset{\Delta}{ABC}: AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

۲ اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم $MN \| BC$ آن‌گاه $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.



۳ $a^2 \le b^2 \Rightarrow (a \le |b|) \wedge (a \ge -|b|)$

۴ $a^2 \ge b^2 \Rightarrow (a \ge |b|) \vee (a \le -|b|)$

۵ اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد آن‌گاه $A \subseteq S$.

جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به‌صورت زیر است.

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنید که :

۱ هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب «$p \Rightarrow q$» همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزارهٔ q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند ارزش «$p \Rightarrow q$» به انتفای مقدم درست است.

۲ ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

مثال : ارزش گزاره «اگر ۲ فرد است آن‌گاه ۲<۵» به انتفای مقدم ~~نادرست است~~. **درست است .**

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارز منطقی هستند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د

۲ گزاره «$q \Rightarrow p$» **عکس ترکیب شرطی** «$p \Rightarrow q$» و گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ **عکس نقیض ترکیب شرطی** $p \Rightarrow q$ است.

با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

هم ارزند

۳ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید :

الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

هم ارز با T است .

(الف)

ب) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

هم ارز با T است .

(ب)

گزاره‌هایی نظیر $p \Rightarrow p$ یا $p \vee \sim p$ را گزاره‌هایی همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر $p \wedge \sim p$ را همیشه نادرست می‌نامیم.

مثال : ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد آن‌گاه a عددی فرد است.

حل : به‌جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).

(a^2 عددی زوج است $\Rightarrow$ a عددی زوج است) $\equiv$ (a عددی فرد است $\Rightarrow$ a^2 عددی فرد است)

چنانچه a عددی زوج باشد، یعنی $a = 2k$، خواهیم داشت :

$$a^2 = (2k)^2 \quad 4k^2 = 2\underbrace{(2k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}} = 2k'$$

در نتیجه a^2 عددی زوج است.

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

ترکیب دو شرطیِ دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ را به‌صورت «$p\Leftrightarrow q$» می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره «$p\Leftrightarrow q$» را به‌صورت زیر می‌خوانیم :

«اگر p، آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است» و «p اگر و تنها اگر q»

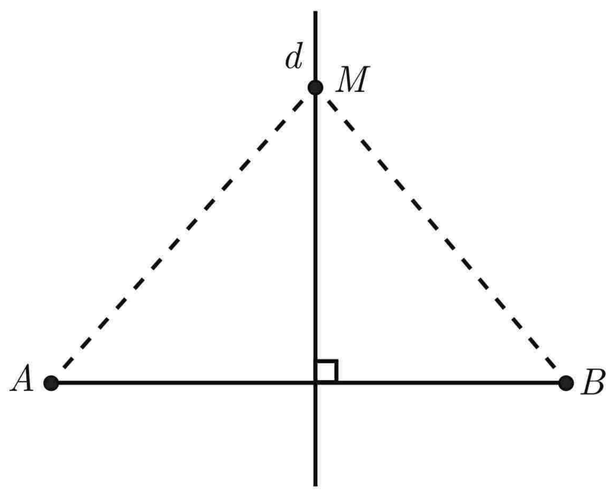
مثال : گزاره های زیر، نمونه ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌ها است.

الف) ۶ عدد اول است $\Leftrightarrow$ ۵ > ۲

ب) ۹۹ عدد اول نیست $\Leftrightarrow$ $\sqrt{2}$ عددی گویا است.

پ) در پرتاب یک تاس شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط باشد آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره‌خط برابر باشد.



$[M\in d\,(\text{عمود منصف پاره‌خط } AB)] \Leftrightarrow MA=MB$

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزارهٔ مرکب «$p\Leftrightarrow q$» را از جدول ارزش گزاره مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

با توجه به اینکه $(p\Leftrightarrow q)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$، جدول ارزش گزاره $p\Leftrightarrow q$ به‌صورت زیر است :

p	q	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۲ با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

الف) قوانین جابه‌جایی $p\vee q\equiv q\vee p$

$p\wedge q\equiv q\wedge p$

ب) قوانین شرکت‌پذیری $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$

$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

پ) قوانین توزیع‌پذیری $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

پاسخ این قسمت در صفحه ی بعد نوشته شده است .

در زیر یکی از قانون‌های توزیع‌پذیری اثبات شده است.

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

چون دو ستون آخر جدول یکسان شده است، پس $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

سورها

به جملات زیر دقت کنید :

«همهٔ دانش‌آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده‌اند». «هر گردو، گرد است». «هر مستطیل یک مربع است». «هر مثلث متساوی‌الاضلاع یک مثلث متساوی‌الساقین است». «بعضی از تیم‌های دستهٔ یک به دسته برتر صعود می‌کنند». «بعضی از اعداد اول، زوج هستند». «بعضی از ذوزنقه‌ها، مستطیل هستند».

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به **سور** معروف هستند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

پاسخ تمرین ۲ صفحه ی ۱۳ کتاب درسی

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

الف) قوانین جابجایی :

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

ب)قوانین شرکت پذیری :

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(P \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$(P \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(P \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$(P \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

پ)قوانین توزیع پذیری :

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

خواندنی

سور کلمه‌ای عربی است و به معنای «بارو» حصار یا دیوار گرداگرد شهر است. نام‌گذاری عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» با سور به این جهت است که آنها قلمرو اعضای موضوع مورد بحث را مشخص می‌کنند. از نظر منطق‌دانان وجه تشابه سور با دیوار شهر آن است که دیوار گرداگرد شهر محدوده و قلمرو شهر را مشخص می‌کند و الفاظ به‌کار رفته در گزاره‌نماها، مرز و قلمرو اشیاء مورد استفاده در گزاره‌نماها را تعیین می‌کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$[1] و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد [2] استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$	$\forall x \in R \; ; \; x^2 \geq 0$
برای هر عدد زوج a داریم: $a=2k \; (k \in \mathbb{Z})$	$\forall a \in E \; ; \; a=2k \; (k \in \mathbb{Z})$
وجود دارد عدد اول p بطوریکه: $p=2k \; (k \in \mathbb{Z})$	$\exists p \in P \; ; \; p=2k \; (k \in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	$\exists a \in O ; a \in P$

در جدول فوق، مجموعه اعداد زوج را با E، مجموعه اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش داده‌ایم.

گزاره نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

مثال : گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 \geq x$ نادرست است، زیرا $x=\frac{1}{2}$ برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند.

الف) $\forall x \in \mathbb{Z} \; ; \; x(x+1)=2k$ ب) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; tanx \times cotx=1$

حل الف) چون حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است بنابراین برای هر عضو از دامنه متغیر ($\mathbb{Z}$) گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

۱ــ نماد $\forall$ از حرف اول کلمه All گرفته شده است.

۲ــ نماد $\exists$ از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.

ب) نادرست است، زیرا $x=\frac{\pi}{۲}$ ، گزاره نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می کند.

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

مثال : گزارهٔ $\exists x \in \mathbb{Z}; |x|-۱<۰$

درست است، زیرا حداقل یک عضو $x=۰$ وجود دارد که به ازای آن گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند :

الف) $\exists x \in P; x=۲k$ **ب)** $\exists x \in \mathbb{R}; x^۲+۱=۰$

حل. الف) درست است؛ زیرا ۲ عددی اول و زوج است، پس مجموعهٔ جواب گزاره‌نما $\{۲\}$ و ناتهی است.

ب) نادرست است؛ زیرا مجموعه جواب گزاره‌نما مجموعه تهی است.

کار در کلاس

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اول، فرد است. **نادرست است زیرا ۲ عددی اول ولی زوج است .**

ب) $\exists x \in \mathbb{N}; ۲x^۲+۳x+۱=۰$ **نادرست است ، زیرا به ازای هر** $x \in \mathbb{N}$ **عبارت** $۲x^۲+۳x+۱$ **مقداری طبیعی دارد و نمی تواند صفر شود .**

پ) $\exists x \in \mathbb{Z}; ۲x^۲+۳x+۱=۰$ **درست است و مجموعه جواب آن** $\{-۱\}$ **و ناتهی است .**

ت) هر عدد زوج، غیر اول است. **نادرست است زیرا ۲ عدد زوج ولی اول است .**

ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است. **درست است . زیرا طبق تعریف ، متغیر ترتیبی نوعی متغیر کیفی است .**

ج) در احتمال؛ هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است. **طبق تعریف پیشامد ، درست می باشد .**

چ) در فضای نمونه S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A)>۱$. **نادرست است زیرا همواره** $P(A)\leq ۱$ **خواهد بود .**

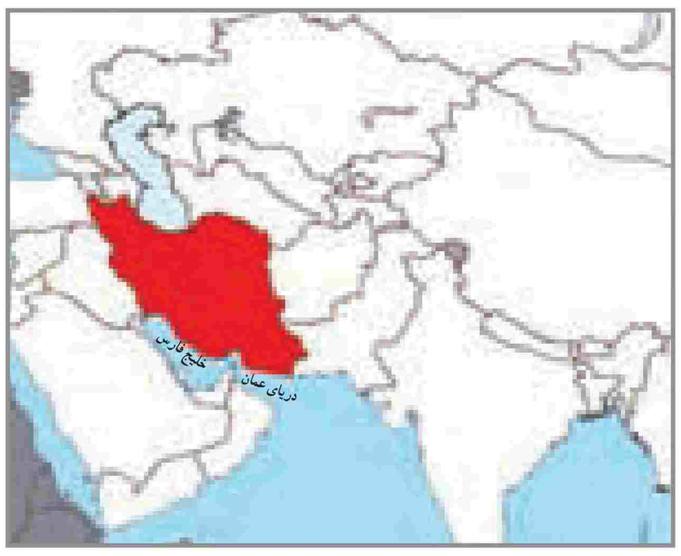
ح) طول هر پاره خط عدد حقیقی است. **درست است**

نقیض گزاره‌های سوری

گزاره «**علی به مدرسه رفت**» را در نظر بگیرید و نقیض آن را در زیر بنویسید. **"علی به مدرسه نرفت ."**

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید می خواهیم نقیض آن را بنویسیم .

هر آسیایی، ایرانی است.



در زبان طبیعی معمولاً این اشتباه رخ می‌دهد که برای نوشتن نقیض این گزاره، فقط فعل آن را منفی می کنند و می‌نویسند :

هر آسیایی، ایرانی نیست.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ارزش دو گزاره قبل نادرست است و این غیر ممکن است (چرا؟) بنابراین جمله دوم نمی‌تواند نقیض جمله اول باشد.

برای رفع این مشکل؛ فرض کنیم A مجموعه مردمان آسیا و ایرانی بودن x را با $P(x)$ نمایش دهیم؛ بنابراین گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت $\forall x \in A; P(x)$ بیان می‌شود.

چون ارزش این گزاره « $\forall x \in A; P(x)$ » نادرست است، پس ارزش گزاره نقیض آن یعنی $\sim (\forall x \in A; P(x))$ باید درست باشد. از آنجا که ارزش گزاره $(\forall x \in A; P(x))$ نادرست است، پس وجود دارد $x \in A$ به‌طوری که $P(x)$ نادرست است و لذا ارزش $\sim P(x)$ درست می‌باشد، در نتیجه ارزش گزارهٔ $\exists x \in A; \sim P(x)$ درست است و ارزش این گزاره با ارزش گزارهٔ $\sim (\forall x \in A; P(x))$ یکسان است، بنابراین داریم :

$$\sim (\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

در این صورت نقیض گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به‌صورت زیر است :

«بعضی از آسیایی‌ها، ایرانی نیستند»

به همین ترتیب می‌توان نقیض گزاره‌ای را که دارای سور وجودی است، به صورت زیر نوشت :

$$\sim (\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

مثال : ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هریک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^{۲} > ۰$ ب) $\exists y \in \mathbb{R}; y < ۰ \wedge y^{۲} \leq ۱$

حل) الف) ارزش این گزاره نادرست است، چون $x=۰$، مثالی نقض برای آن است.

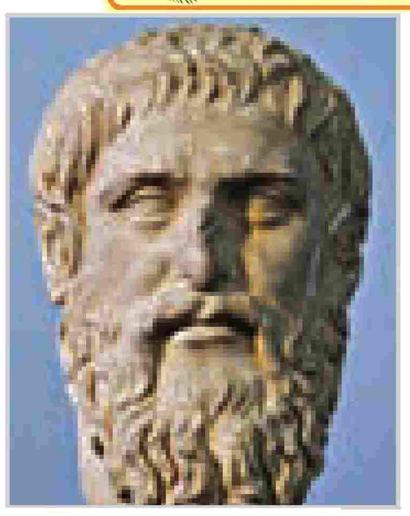
$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}; x^{۲} > ۰) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^{۲} \not> ۰ \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^{۲} \leq ۰$$

ب) درست است، زیرا $y = -۱$ در آن صدق می‌کند، پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

$$\sim (\exists y \in \mathbb{R}; y < ۰ \wedge y^{۲} \leq ۱) \equiv \forall y \in \mathbb{R}; \sim (y < ۰ \wedge y^{۲} \leq ۱)$$
$$\equiv \forall y \in \mathbb{R}; y \geq ۰ \vee y^{۲} > ۱$$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

تمرین



۱ از جملات زیر کدام یک گزاره است و ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

الف) خیام پزشک ایرانی است. **گزاره ی نادرست**

ب) افلاطون فیلسوف یونانی است. **گزاره ی درست**

پ) $۳+۵>۶$ **گزاره ی درست**

ت) تخته سیاه را پاک کنید. **گزاره نیست**

ث) $\{۱\}\in\{۱,۲,۳,۴\}$ **گزاره ی نادرست**

ج) چه باران شدیدی می‌آید. **گزاره نیست**

چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. **گزاره ی نادرست**

ح) $\varnothing\not\subset\mathbb{R}$ **گزاره ی نادرست**

خ) $\sqrt{۲}\in\mathbb{Z}$ **گزاره ی نادرست**

د) عدد $۵^۹+۸$ عددی اول است. **گزاره ی نادرست**

ذ) به امید کامیابی شما. **گزاره نیست**

ر) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. **گزاره ی درست**

۲ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید به‌طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $-۷\times\boxed{۱}=-۷$

ب) $۵+\boxed{۰/۱}\notin\mathbb{Z}$

پ) $\frac{۸\times\boxed{۱}}{۴}\in\left\{۲,\frac{۱}{۳}\right\}$

ت) $۳\times۵\boxed{>}\frac{۹\times۱۰}{۳}$

ث) $۰=\sqrt{۲}\times\boxed{۰}$

ج) $۱\boxed{\in}\{۱\}$

چ) $۵(\boxed{۷}-۳)=۲۰$

ح) $۷(\boxed{۸}-۳)=۳۵$

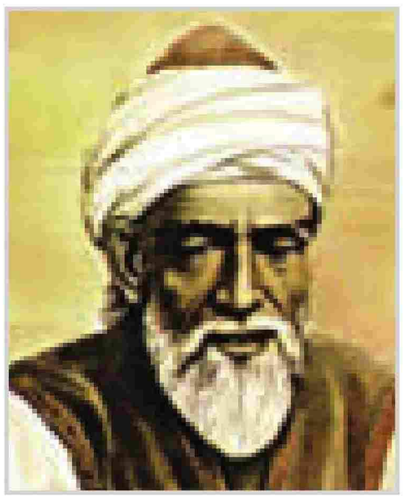
۳ دامنهٔ متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) x مربع کامل است $S=\{۰,۱,۴,۹,۱۶,...\}$

ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است. $S=\{...,-۹,-۴,۱,۶,...\}$

پ) $\frac{۲x+۱}{۳}\le-۱$ $۲x+۱\le-۳\Rightarrow x\le-۲\Rightarrow S=\{-۲,-۳,-۴,...\}$

ت) $\{n(n+۱)=۰|n\in W\}$ $S=\{۰\}$



۴ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $۳\le۴$ $۳>۴$

ب) ابولوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی است. **ابولوفای بوزجانی ریاضی دان ایرانی نیست .**

پ) $a\in\{b,c,d\}$ $a\notin\{b,c,d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویا است. ۲عددی زوج نیست وعدد π گویا نیست

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

خورشید به دور زمین نمی چرخد یا سنندج مرکز استان کردستان نیست .

ج) اگر a زوج باشد آن‌گاه $a+۱$ فرد است.

a زوج است و $a+۱$ فرد نیست

" توجه داشته باشید که $\sim(p\Rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge(\sim q)$ "

۵ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(۲<۳)\wedge(۴+۳=۱۰)$ $T\wedge F\equiv F$

ب) $(۵>۳)\vee(x^۲+۱=۰)$ $T\vee F\equiv T$

پ) $(\frac{۱}{۲}\ne\frac{۳}{۶})\vee(۱\in\{۲,۳,۴\})$ $F\vee F\equiv F$

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست. $F\Rightarrow F\equiv T$

ث) در متوازی‌الاضلاع مفروض دو قطر با هم برابرند. $T\Rightarrow F\equiv F$

ج) ۲ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است. $F\Leftrightarrow F\equiv T$

چ) $۲>۳\Leftrightarrow-۲<-۳$ $F\Leftrightarrow F\equiv T$

ح) اگر $a\in\{b\}$ آن‌گاه $a=b$ و بر عکس. $T\Leftrightarrow T\equiv T$ یا $F\Leftrightarrow F\equiv T$

۶ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p\Rightarrow q)$	ارزش $(p\wedge q)$
عدد ۲ زوج است.	عدد ۲ اول است.	د	د	د	د
عدد۳ فرد است.	$۱ \not< ۲$	د	ن	ن	ن
$۲\in\{۱,۲\}$	عدد ۱ اول است.	د	ن	ن	ن
$۲+۳=۷$	عدد ۷ اول است.	ن	د	د	ن

پاسخ این قسمت در صفحه ی بعد نوشته شده است .

۷ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p\wedge\sim q$

ب) $\sim p\wedge p$

پ) $\sim p\vee p$

ت) $(p\vee q)\wedge\sim p$

ث) $(p\vee q)\Leftrightarrow q$

ج) $\sim p\Leftrightarrow\sim q$

۸ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که :

الف) $p\Rightarrow p\equiv T$

ب) $p\vee F\equiv p$

پ) $p\wedge T\equiv p$

ت) $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$

ث) $p\wedge(q\vee p)\equiv p$

ج) $p\vee(q\wedge p)\equiv p$

چ) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$

ح) $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q$

۹ ثابت کنید هرگاه nعددی صحیح و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۰ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\forall,\exists$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر aدر مجموعه اعداد حسابی داریم $a^۲<۰$.

پ) همه اعداد اول فرد هستند.

ت) وجود دارد عدد صحیح مثبتی مانند xبه‌طوری که $۲x-۱>۵$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

ج) به‌ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^۳=x$.

۱۱ هرگاه $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid ۰<x\leq ۵\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x\in A; x+۴=۱۰$

ب) $\forall x\in A; x+۲\leq ۹$

پ) $\exists x\in A; x+۳\leq ۴$

ت) $\forall x\in A; x+۱\geq ۶$

۱۲ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x\in\mathbb{R}; \frac{x^۲-۱}{x-۱}=x+۱$

ب) $\forall n\in\mathbb{N}; (۲^{۲^n}+۱)\in P$

پ) $\forall x\in(-\infty,۰); x-\frac{۱}{x}\leq -۲$

ت) $\exists y\in\mathbb{R}; \frac{y-۳}{۵}=۰$

پاسخ تمرین های صفحه ی ۱۸ کتاب درسی

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۷- الف)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

ب)

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
ن	د	ن

پ)

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
ن	د	د

ت)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
د	د	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن

ث)

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

ج)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

****

۸- الف)

p	$p \Rightarrow p$
د	د
ن	د

بنابراین $p \Rightarrow p \equiv T$ است .

ب)

p	F	$P \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

بنابراین $p \vee F \equiv p$ است .

پ)

p	T	$p \wedge T$
د	د	د
ن	د	ن

بنابراین $p \wedge T \equiv p$ است.

ت)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ است . $\rightarrow$

ث)

p	q	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین $p \wedge (q \vee p) \equiv p$ است .

ج)

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین $p \vee (q \wedge p) \equiv p$ است .

ج)

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	ن	د	د

بنابراین $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ است .

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

ح)

p	q	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$ است .

***

۱۰- الف) $\forall a \in \mathbb{N}, (a \in E \vee a \in O)$ درست است زیرا اگر عدد زوج باشد ، فرد نخواهد بود و اگر عددی زوج نباشد فرد خواهد بود .
در نتیجه در ترکیب فصلی یکی از گزاره ها درست و یکی نادرست است ، پس در کل درست است .

ب) $\exists a \in W, a^{۲} < ۰$ نادرست است زیرا هیچ عددی وجود ندارد که مربع آن منفی شود به عبارت دیگر مجموعه جواب آن تهی است .

پ) $\forall a \in P, a \in O$ نادرست است زیرا به عنوان مثال نقض ، عدد ۲ اولی بوده ولی فرد نیست .

ت) $\exists x \in \mathbb{Z}^{+}, ۱-۲x > ۵$ نادرست است زیرا $۱-۲x > ۵ \Rightarrow x < -۲$ ، یعنی x منفی است و هیچ عدد مثبتی در آن صدق نمی کند .

ث) $\forall x \in \mathbb{R}-\{۰\}, x + \frac{۱}{x} \geq ۲$ نادرست است به عنوان نمونه $x = -۱$ مثال نقض است زیرا $-۱ + \frac{۱}{-۱} = -۲ \ngeq ۲$.

ج) $\exists x \in \mathbb{R}, x^{۳} = x$ درست است زیرا مجموعه جواب آن $S = \{۰, \pm ۱\}$ ناتهی است .

***