جلسه ۵ درس ۲: پیشامدهای مستقل و وابسته	پایه: یازدهم	رشته: ریاضی
فصل ۲	نام کتاب: آمار و احتمال صفحات: ۶۷-۷۲	تهیه و تنظیم: اسفندیار ملیح ملکی ص ۱

قبل از تعریف پیشامدهای مستقل فعالیت صفحه ۶۷ کتاب را مورد بررسی قرار می دهیم. نتیجه ای که از فعالیت به دست می آوریم به درک مفهوم پیشامدهای مستقل کمک زیادی خواهد کرد

فعالیت: یک سکه و یک تاس را به طور هم زمان پرتاب می کنیم

فضای نمونه آزمایش $S = \{(ر,۱),(ر,۲),(ر,۳),(ر,۴),(ر,۵),(ر,۶),(پ,۱),(پ,۲),(پ,۳),(پ,۴),(پ,۵),(پ,۶)\}$

پیشامد آنکه ۶ بیاید $A = \{(ر,۶),(پ,۶)\} \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۱۲} = \frac{۱}{۶}$

پیشامد رو شدن سکه $B = \{(ر,۱),(ر,۲),(ر,۳),(ر,۴),(ر,۵),(ر,۶)\} \Rightarrow P(B) = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$

$$A \cap B = \{(ر,۶)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۱۲}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۶} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۶}} = \frac{۱}{۲} = P(B)$$

نتیجه:

اگر وقوع یکی از دو پیشامد بر احتمال وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A|B) = P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

برعکس

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \begin{cases} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \\ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B) \end{cases}$$

وقوع هر کدام بر دیگری تاثیر ندارد

تعریف: پیشامدهای A و B را مستقل می گوییم هرگاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد.

به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل اند اگر و تنها اگر $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

مثال: آیا دو پیشامد $A = \{(پ,ر),(پ,پ)\}$ و $B = \{(ر,ر),(پ,پ)\}$ در پرتاب دو سکه با هم مستقل اند یا نه

$$A \cap B = \{(پ,پ)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۴}$$

$$P(A) = \frac{۱}{۲}, \quad P(B) = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \checkmark$$

نکته: اگر دو پیشامد A و B مستقل نباشند وابسته اند

	ادامه جزوه درس ۲: پیشامدهای مستقل و وابسته	پایه: یازدهم رشته: ریاضی
فصل: ۲	نام کتاب: آمار و احتمال صفحات: ۷۲-۶۷	تهیه و تنظیم: اسفنده ملیح ملکی

۲۸

مثال: در پرتاب دو تاس فرض کنید A پیشامد عدد ۳ در تاس اول و B مشاهده مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس باشد آیا A و B مستقل‌اند خیر

$A=\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\} \Rightarrow P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$B=\{(4,6),(6,4),(5,5)\} \Rightarrow P(B)=\frac{3}{36}$

$A\cap B=\phi \Rightarrow P(A\cap B)=0$ $\quad 0\neq \frac{1}{6}\times\frac{1}{12}$ $\quad P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

A, B وابسته‌اند

نکته: اگر A و B مستقل باشند آنگاه

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

مثال: احتمال داشتن گروه خونی A در جامعه‌ای ۳۰ درصد و احتمال داشتن گروه خونی B در جامعه‌ای ۴۰ درصد و احتمال داشتن گروه خونی AB در همان جامعه ۱۰ درصد است مکمل به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه گروه خونی A یا B داشته باشد چقدر است

$P(A\cap B)=0 \rightarrow$ ناسازگارند A, B

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\%30+\%40=\%70$

مثال: احتمال داشتن گروه خونی A در جامعه‌ای ۲۰ درصد و احتمال داشتن رنگ چشم مشکی ۴۰ درصد است مکمل به تصادف انتخاب می‌شود احتمال آنکه رنگ چشم مشکی یا گروه خونی A داشته باشد چقدر است

داشتن رنگ چشم مشکی و گروه خونی A دو پیشامد مستقل می‌باشند

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

$=\%20+\%40-\%20\times\%40=\%60-\%08=\%52$

تمرین ۱ - اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)=2P(B)$ و $P(A\cup B)=\frac{4}{9}$ باشد $P(A)$ را به دست آورید

تمرین ۲ - هر دو عقربه را با هم می‌چرخانیم احتمال آنکه هر دو عقربه روی ناحیه آبی باستند چقدر است ؟

تمرین ۳: اگر A و B دو پیشامد از فضای S باشند $P(A)P(B)+P(A'\cup B')=1$ آنگاه دو پیشامد A و B نسبت به هم عکس‌اند

۱) سازگار ۲) ناسازگار ۳) مستقل ۴) وابسته

	ادامه جزوه درس ۲: پیشامدهای مستقل و وابسته	پایه: یازدهم رشته: ریاضی
فصل	نام کتاب: آمار و احتمال صفحات ۷۲-۶۷	تهیه و تنظیم: الفته ملیح ملکی

نکته: اگر A و B مستقل باشند آنگاه A' و B نیز مستقل اند، A و B' نیز مستقل اند A' و B' نیز مستقل اند

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)=\frac{1}{4}$ ، $P(B)=\frac{1}{3}$ باشد حاصل $P(A\cup B')$ چقدر است

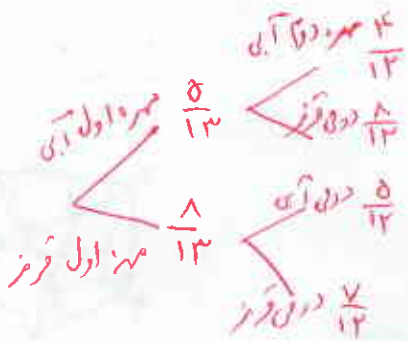
$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A)\times P(B')$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3+8-2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

A, B' مستقل $\Rightarrow P(A\cap B')=P(A)\times P(B')$

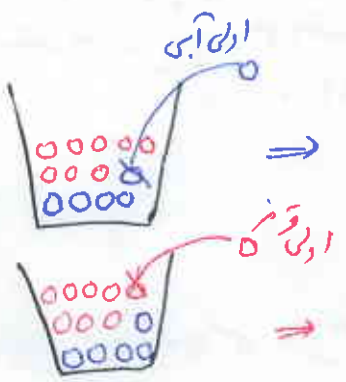
انتخاب های با جایگذاری و بدون جایگذاری

مثال: از جعبه ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است دو مهره به صورت پی در پی و بدون جایگذاری، بیرون می آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهره اول و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد آیا A و B مستقل اند

نکته: اگر $P(B|A)=P(B)$ دو پیشامد مستقل اند و اگر $P(B|A)\neq P(B)$ آنگاه A و B وابسته اند



$$P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(A')\cdot P(B|A')$$
$$=\frac{5}{13}\times\frac{8}{12}+\frac{8}{13}\times\frac{7}{12}=\frac{8}{13}$$
$$P(B|A)=\frac{8}{12}$$



محاسبه $P(B)$

موجودی ۴ آبی ۸ قرمز

موجودی ۷ قرمز ۵ آبی

$\Rightarrow P(B|A)\neq P(B)\Rightarrow A, B$ وابسته اند

تعمیم: سه پیشامد A و B و C را مستقل می گوییم هرگاه چهار رابطه ی زیر برقرار باشد

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی n پیشامد A_1 و A_2 و ... A_n را مستقل می گوییم هرگاه. احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل ضرب احتمال آنها برابر باشد

	ادامه جزوه درس ۲ : پیشامدهای مستقل و وابسته	پایه : یازدهم رشته ریاضی
فصل	نام کتاب : آمار و احتمال صفحات: ۷۲-۶۷	تهیه و تنظیم : اسفندیار ملیح ملکی

مثال : در یک کارگاه توکیدی ۳ دستگاه A و B و C با احتمال کارکرد هرکدام $\frac{3}{4}$ کار می کنند مطلوبست احتمال آنکه لااقل یکی از این ۳ دستگاه کار کند حقیقت است

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(A')P(B')P(C')$$
$$=1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

تمرین ۱ صفحه ۷۱ : اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه S باشند آیا A و B می توانند مستقل باشند ؟

$$A\cap B=\phi \Rightarrow P(A\cap B)=0 \Rightarrow P(A)\times P(B)=0$$
$$\Rightarrow P(A)=0 \vee P(B)=0 \Rightarrow A=\phi \vee B=\phi$$

تمرین ۳ صفحه ۷۱ : اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند نشان دهید A' و B نیز مستقل اند

$$P(A'\cap B)=P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=P(B)-P(B)\times P(A)$$
$$=P(B)(1-P(A))=P(B)P(A')$$

تمرین ۶ صفحه ۷۲ : احتمال موفقیت عمل جراحی کلیه روی یک بیمار ۰٫۶ و روی بیمار دیگر ۰٫۸ است مطلوبست احتمال اینکه اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود

الف) روی هر دو بیمار موفقیت آمیز باشد

$$P(A\cap B)=0.6\times 0.8=0.48$$

ب) روی هیچکدام موفقیت آمیز نباشد

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=0.4\times 0.2=0.08$$

پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت آمیز باشد

$$P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)=0.4\times 0.8=0.32$$

تمرین ۱۲ صفحه ۷۲ : اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A\cap B)=0.1$ و $P(A\cap B')=0.4$ حاصل $P(A\cup B')$ را بیابید

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \Rightarrow 0.4=P(A)-0.1 \Rightarrow P(A)=0.5$$
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow 0.1=0.5\times P(B) \Rightarrow P(B)=0.2 \Rightarrow P(B')=1-0.2=0.8$$
$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=0.5+0.8-0.4=0.9$$

	ادامه جزوه درس ۲: پیشامدهای مستقل و وابسته	پایه: یازدهم رشته: ریاضی
فصل:	نام کتاب: آمار و احتمال صفحات ۷۲-۶۷	تهیه و تنظیم: اسفنده ملیحه ملکی

(سراسری ۹۶) دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس عدد ظاهر می‌شود؟

$P(\text{هر دو سکه رو یا تاس ۶}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

$P(\text{رو}) = \frac{1}{4}$

$P(6) = \frac{1}{6}$

۱) $\frac{3}{8}$ ✓
۲) $\frac{5}{8}$
۳) $\frac{5}{12}$
۴) $\frac{7}{12}$

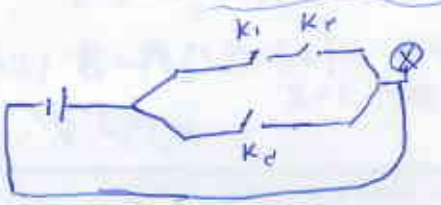
(سراسری ۹۷) سه نفر مستقل از یکدیگر به هدف شلیک می‌کنند احتمال موفقیت آن‌ها به ترتیب $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ است با کدام احتمال لااقل یکی از آن‌ها موفق می‌شوند

$P(A\cup B\cup C) = 1 - P(A')P(B')P(C') = 1 - \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$

۱) $\frac{19}{24}$
۲) $\frac{5}{6}$
۳) $\frac{11}{12}$
۴) $\frac{23}{24}$ ✓

تمرین (سراسری ۹۷ خ) سه سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه لااقل یکی از پیشامدهای سکه فقط یک «رو» یا عدد تاس زوج باشد کدام است

۱) $\frac{9}{16}$
۲) $\frac{7}{12}$
۳) $\frac{5}{8}$
۴) $\frac{11}{16}$ ✓



تمرین: احتمال بسته شدن کلیدهای K_1 و K_2 و K_3 به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ است احتمال آنکه لامپ بتواند روشن شود چقدر است

$1 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$