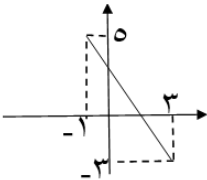
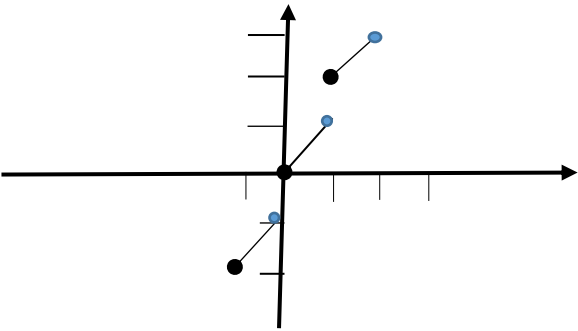
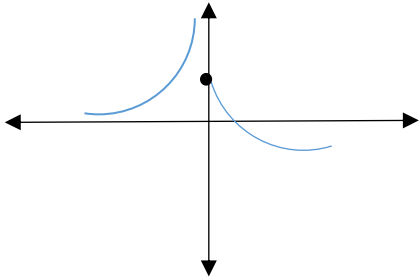


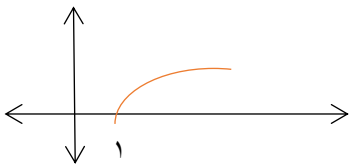
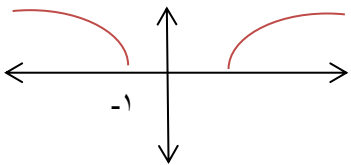
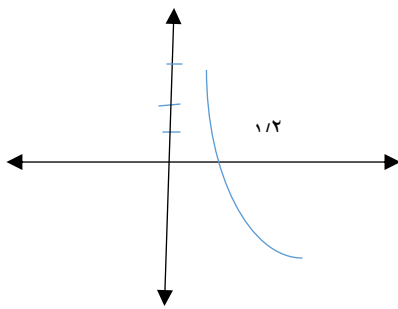
فصل دوم

منطقه	سؤال و پاسخ	ردیف
۵	<p>کدامیک از گزاره های زیر درست و کدامیک نادرست است.</p> <p>(الف) برد یک تابع شامل هم دامنه آن است.</p> <p>(ب) هم دامنه می تواند برابر دامنه باشد.</p> <p>(ج) تابع $f: [-1, 2] \rightarrow R$ $f(x) = x^2$ را می توانیم به صورت $f: [-1, 2] \rightarrow [0, +\infty)$ هم نمایش دهیم.</p> <p>(د) دو تابع $f(x) = \frac{x-1}{x-1}$ و $g(x) = 1$ برابر هستند.</p> <p>پاسخ</p> <p>(الف) نادرست (ب) درست (ج) درست (د) نادرست</p>	۱
۵	<p>جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.</p> <p>(الف) تعداد توابعی که از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ تعریف می شود برابر است با.....</p> <p>(ب) هم دامنه و برد تابع $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 1), (4, 1)\}$ به ترتیب و عضو دارد.</p> <p>پاسخ</p> <p>(الف) $2^3 = 8$</p> <p>(ب) هم دامنه ۵ عضو و برد ۳ عضو</p>	۲
۵	<p>کدامیک از نمایش های زیر برای تابع $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -2x + 3$ قابل قبول است؟</p>  <p>(الف) $f: [-1, 3] \rightarrow [-3, 5]$ $f(x) = -2x + 3$</p> <p>(ب) $f: [-1, 3] \rightarrow [0, +\infty)$ $f(x) = -2x + 3$</p> <p>(ج) $f: [-1, 3] \rightarrow [-3, 5]$ $f(x) = -2x + 3$</p> <p>پاسخ</p> <p>(الف) $f: [-1, 3] \rightarrow [-3, 5]$ $f(x) = -2x + 3$</p>	۳

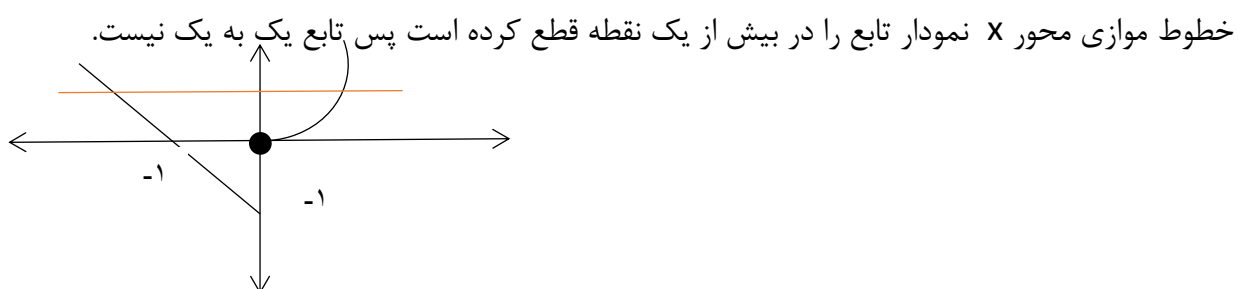
<p>۵</p>	<p>نمودار تابع $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ را رسم کنید و برد آن را بنویسید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>4</td> <td>1</td> <td>3</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">$R_f = [1, 4]$</p>	x	-2	1	3	y	4	1	3	<p>۴</p>
x	-2	1	3							
y	4	1	3							
<p>۵</p>	<p>تابع f در همه شرایط زیر صدق می کند ضابطه آن را بنویسید.</p> <p>الف) دامنه f برابر $[-3, 5]$ است.</p> <p>ب) تابع f در بازه $(0, 2]$ ثابت بوده و $f(1) = 4$</p> <p>ج) تابع به هر عدد بزرگتر از ۲، مربع آن را نسبت می دهد.</p> <p>د) تابع روی اعداد غیر مثبت خطی است که از مبدأ و نقطه $(-1, 3)$ عبور می کند.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $f = \begin{cases} -3x & -3 \leq x \leq 0 \\ 4 & 0 < x \leq 2 \\ x^2 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$ <p>$(-1, 3), (0, 0) \rightarrow m = -3 \rightarrow y = -3x$</p>	<p>۵</p>								
<p>۸</p>	<p>جاهای خالی را عبارات مناسب پر کنید .</p> <p>الف) اگر $f(x) = [x + 3]$ باشد، در این صورت مقدار $f(2 - \sqrt{2})$ برابر میباشد .</p> <p>ب) اگر $[\frac{1}{x}] = 2$ باشد حاصل $[-6x]$ برابر است با</p> <p>ج) نمودار $f(x) = x + [x]$ در بازه $[-1, 2]$ از پله به طول تشکیل میشود .</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> <p>۳) الف)</p> <p>ب) if: $[\frac{1}{x}] = 2 \rightarrow 2 \leq \frac{1}{x} < 3$</p> <p>و با معکوس کردن طرفین داریم: $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$ حالا حدود $-6x$ را پیدا می کنیم طرفین را در -6 ضرب می کنیم و حاصل می شود: $-6x \geq -3$ و $-6x > -2$ در نتیجه $-3 \leq -6x < -2$</p> <p>پس $[-6x] = -3$</p> <p>ج) بازه $[-1, 2]$ به زیر بازه هایی به طول یک واحد تقسیم و نمودار تابع را در هر زیر بازه رسم می کنیم.</p> <p>$-1 \leq x < 0 \rightarrow y = x - 1$ $A(-1 \text{ و } -2)$ $B(0 \text{ و } -1)$</p> <p>$0 \leq x < 1 \rightarrow y = x$ $C(0 \text{ و } 0)$ $D(1 \text{ و } 1)$</p>	<p>۶</p>								

	<p>$1 \leq x < 2 \rightarrow y = x + 1$ $E(1, 2)$ $F(2, 3)$</p> <p>همانطور که در شکل می بینید نمودار تابع از سه پله به طول $\sqrt{2}$ (طول هر پله برابر وتر یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع واحد که همان $\sqrt{2}$ می شود) تشکیل شده است.</p> 	
<p>۵</p>	<p>در تابع $y = a + \sqrt{x + b}$ اگر دامنه $[-4, +\infty)$ و برد $[-3, +\infty)$ باشد. این تابع محور xها را در چه نقطه ای قطع میکند.</p> <p>پاسخ</p> <p>با توجه به برد تابع، $a = -3$ و</p> $\begin{cases} x + b \geq 0 \rightarrow x \geq -b \rightarrow b = 4 \\ x \geq -4 \end{cases}$ <p>و تابع محور xها را در نقطه ای به طول ۵ قطع می کند، زیرا:</p> $y = 0 \rightarrow -3 + \sqrt{x + 4} = 0 \rightarrow x = 5$	<p>۷</p>
<p>۵</p>	<p>الف) حاصل عبارت $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \dots + [\sqrt[3]{30}]$ را محاسبه کنید.</p> <p>ب) معادله $[x]^2 + 5[x] + 6 = 0$ را حل کنید.</p> <p>پاسخ</p> <p>الف) ۵۷</p> <p>ب) $[x] = -2, [x] = -3$ $-3 \leq x \leq -1$</p>	<p>۸</p>
<p>۵</p>	<p>الف) دامنه تابع $y = \sqrt{3 - [x]}$ را بنویسید.</p> <p>ب) برد تابع $y = 3x - [3x]$ را بنویسید.</p> <p>پاسخ</p> <p>الف) دامنه تابع برابر $(-\infty, 4)$ است.</p> <p>ب) برد تابع برابر $[0, 1)$ است.</p>	<p>۹</p>

<p>۵</p>	<p>الف) نمودار تابع زیر را رسم کنید</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x}, & x < 0 \\ -\sqrt{x} + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ <p>ب) مقدار $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ را بیابید.</p> <p>پاسخ</p> <p>الف)</p> <p>ب) ۴</p> 	<p>۱۰</p>
<p>۵</p>	<p>اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{1+x^2}{2x^2+ax+b}$ برابر $R - \{-2\}$ باشد مقادیر a, b را محاسبه کنید.</p> <p>پاسخ</p> $\begin{cases} 2 \times 2^2 + 2a + b = 0 \\ 2 \times (-2)^2 + (-2)a + b = 0 \end{cases} \rightarrow b = -8, a = 0$	<p>۱۱</p>
<p>۸</p>	<p>برد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + 1$ را بیابید.</p> <p>پاسخ</p> $x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4$ $(x-1)^2 \geq 0 \rightarrow (x-1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 4} \geq 2$ $\rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 4} + 1 \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq 3 \Rightarrow R_f = [3, +\infty)$	<p>۱۲</p>
<p>۸</p>	<p>دامنه تابع زیر را بدست آورید.</p> $f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2 - 1)}}{\sqrt{x + x }}$ <p>پاسخ</p> <p>۱) $x + x > 0 \Rightarrow x > -x \Rightarrow x > 0$ ۲) $x(x^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \cup x \geq 1$</p> <p>$1 \cap 2 = [1, +\infty)$</p>	<p>۱۳</p>
<p>۸</p>	<p>نمودار تابع زیر را رسم کنید.</p> $f(x) = \sqrt{ x - 1}$ <p>پاسخ</p>	<p>۱۴</p>

	<p>برای رسم نمودار $y = f(x)$ ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم کرده و سپس سمت چپ محور yها را حذف و قرینه سمت راست را در سمت چپ رسم می نماییم.</p> <p>$f(x) = \sqrt{x-1}$</p>  <p>$f(x) = \sqrt{ x -1}$</p> 	
۸	<p>نمودار تابع $f(x) = 3 - \sqrt{2x-1}$ را رسم کنید و دامنه برد آن را بنویسید</p> <p>پاسخ</p> <p>$R_f = (-\infty, 3]$ و $D_f = [\frac{1}{2}, +\infty)$</p> 	۱۵
۸	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) تابع $f(x) = \frac{3}{4}$ وارون تابع $g(x) = \frac{4}{3}$ است.</p> <p>ب) نموداری وجود دارد که وارون پذیر باشد ولی یک به یک نباشد؟</p> <p>پ) وارون تابع $y = (x-1)^2 + 2$ برای $x \leq 1$ برابر $y^{-1} = \sqrt{x-2} + 1$ برای $x \geq 2$ است.</p> <p>پاسخ</p> <p>الف) نادرست ، چون تابع ثابت یک به یک نیست پس وارون پذیر هم نیست.</p> <p>ب) نادرست، (چون شرط وارون پذیری یک تابع ، یک به یک بودن آن است).</p> <p>پ) نادرست</p> <p>$y = (x-1)^2 + 2 \rightarrow y-2 = (x-1)^2 \rightarrow \pm\sqrt{y-2} = x-1 \rightarrow \pm\sqrt{y-2} + 1 = x$</p> <p>برای $x \geq 2$ $x \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x-2} + 1$</p>	۱۶
۸	<p>به کمک رسم نمودار ثابت کنید تابع زیر یک به یک نیست.</p> <p>$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x-1 & x < 0 \end{cases}$</p>	۱۷

پاسخ



۱۸

ضابطه وارون تابع $f(x) = \sqrt{2x+3}$ را بدست آورید.

پاسخ

$$y = \sqrt{2x+3} \rightarrow y^2 = 2x+3 \rightarrow y^2 - 3 = 2x \rightarrow x = \frac{y^2 - 3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$$

برای $x \geq 0$

۱۹

نشان دهید تابع زیر یک به یک است. ضابطه وارون این تابع را حساب کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

پاسخ

نمودار تابع $f(x)$ را رسم میکنیم چنانچه هر خط موازی محور X ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع میکند تابع یک به یک است پس با توجه به رسم نمودار تابع یک به یک است.

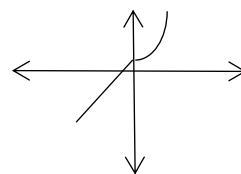
$$y = x^2 + 1 \rightarrow y - 1 = x^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{y-1} \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y-1}$$

$$x \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \rightarrow y \geq 1$$

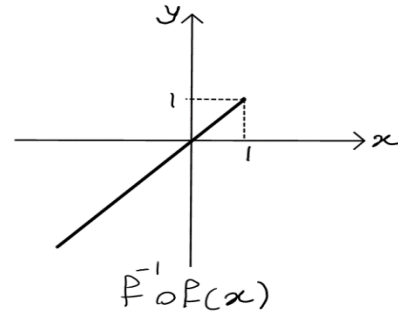
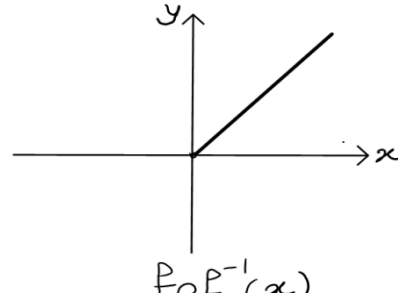
$$y = x + 1 \rightarrow y - 1 = x \rightarrow y = x - 1$$

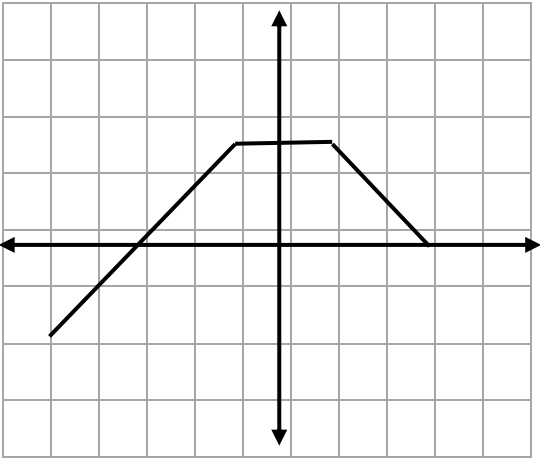
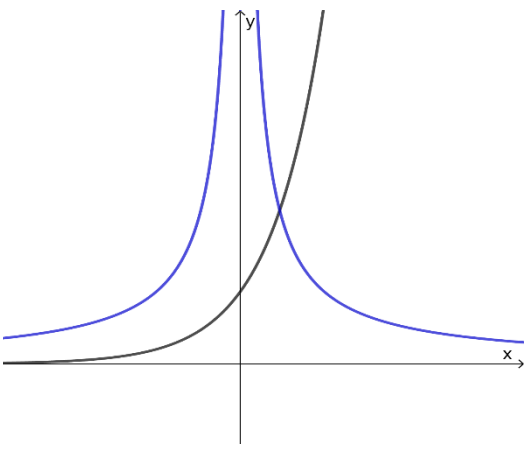
$$x < 0 \rightarrow x + 1 < 1 \rightarrow y < 1$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ x-1 & x < 1 \end{cases}$$



۸	<p>تابع $f(x) = \frac{mx-m+1}{x+2}$ یک به یک است. چه مقداری برای m نمیتوان در نظر گرفت.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $D = R - \{-2\} \rightarrow if : x = -2 \rightarrow -2x - m + 1 \neq 0 \rightarrow -3m + 1 \neq 0 \rightarrow m \neq \frac{1}{3}$	۲۰
۶	<p>جاهای خالی را پر کنید.</p> <p>اگر $f = \{(3, -1), (2, 1), (-2, 0)\}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 5}$، آنگاه $fog(3) = \dots$ و $gof^{-1}(-1) = \dots$.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $g(3) = \sqrt{9 - 5} = 2 \Rightarrow fog(3) = f(2) = 1$ $f^{-1}(-1) = 3 \Rightarrow g(f^{-1}(-1)) = g(3) = 2$	۲۱
۶	<p>درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر $f = \{(-1, 1), (2, 5), (1, 2)\}$ آن گاه دامنه تابع $f \circ f^{-1}$ برابر است با $\{-1, 5, 2\}$.</p> <p>ب) اگر D_f و D_g به ترتیب دامنه‌های توابع f و g باشند، آن گاه دامنه توابع $f + g$ و $g \cdot f$ و fog برابرند با $D_f \cap D_g$.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> <p>الف) نادرست، دامنه تابع $f \circ f^{-1}$ برابر است با $\{1, 5, 2\}$.</p> <p>ب) نادرست، دامنه تابع fog برابر با $D_f \cap D_g$ نیست.</p>	۲۲
۶	<p>اگر $f(x) = \frac{[x] - 8}{x^2 + 2}$ و $g(x) = \sqrt{9x - x^2}$، دامنه‌ی تابع $\frac{g}{f}$ را تعیین کنید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $9x - x^2 \geq 0 \Rightarrow D_g = [0, 9] \quad , \quad x^2 + 2 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ $D_{\frac{g}{f}} = [0, 9] - \{x \mid [x] = 8\} = [0, 9] - [8, 9] = [0, 8) \cup \{9\}$	۲۳
۶	<p>اگر $f(x) = \sqrt{x - 2}$ و $g(x) = x^2 + 4$ آن گاه</p> <p>الف) دامنه تابع gof را مشخص کنید.</p> <p>ب) ضابطه تابع gof را بنویسید.</p>	۲۴

	<p>(ج) برد تابع gof را تعیین کنید.</p> <p>پاسخ</p> <p>(الف)</p> $D_g = \mathbb{R}, D_f = [2, +\infty) \Rightarrow D_{gof} = \{x \in [2, +\infty) \mid \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}\} = [2, +\infty)$ <p>(ب)</p> $gof(x) = (\sqrt{x-2})^2 + 4 = x + 2$ <p>(ج) با توجه به ضابطه تابع gof که یک تابع خطی است و با توجه به دامنه‌ی آن داریم</p> $R_{gof} = [4, +\infty) \text{ پس } x \geq 2 \Rightarrow x + 2 \geq 4$	
<p>۶</p>	<p>اگر $f = \{(3, 4), (-1, 0), (2, 3), (1, 2)\}$ و $g = \{(1, -1), (3, 1), (-2, 5), (-1, 2)\}$ آن گاه توابع</p> <p>زیر را بنویسید.</p> <p>(الف) $f - g$</p> <p>(ب) $\frac{g}{f}$</p> <p>پاسخ</p> <p>(الف)</p> $f - g = \{(1, 3), (-1, -2), (3, 3)\}$ <p>(ب)</p> $\frac{g}{f} = \left\{ \left(1, -\frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{4}\right) \right\}$	<p>۲۵</p>
<p>۶</p>	<p>اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ باشد، نمودارهای توابع $f^{-1}of$ و f^{-1} را رسم کنید.</p> <p>پاسخ</p> <p>چون $R_f = [0, +\infty) = D_{f^{-1}}$ و $D_f = (-\infty, 1]$</p> <p>از طرفی $f^{-1}of(x) = x$ و $x \in R_f$ که $f^{-1}of(x) = x$ پس $x \in D_f$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>$f^{-1}of(x)$</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>$f^{-1}(x)$</p> </div> </div>	<p>۲۶</p>

<p>۱۰</p>	<p>با توجه به نمودار زیر $f(2) + f(-3)$ را بدست آورید.</p>  <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $f(2) + f(-3) = 1 + 0 = 1$	<p>۲۷</p>
<p>۶</p>	<p>به کمک روش هندسی، تعداد و علامت جواب‌های معادله $x 5^x = 1$ را مشخص کنید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> <p>می‌دانیم $x = 0$ در معادله صدق نمی‌کند (جواب معادله نیست) پس طرفین را بر x تقسیم می‌کنیم. حال معادله به صورت $5^x = \frac{1}{ x }$ خواهد بود. نمودارهای توابع $y = 5^x$ و $y = \frac{1}{ x }$ را رسم می‌کنیم:</p>  <p style="text-align: right;">مشاهده می‌شود که معادله دارای یک ریشه مثبت است.</p>	<p>۲۸</p>

۶	<p>اگر تابع f به صورت مقابل تعریف شده باشد، حاصل $f(f(-1))$ را بیابید.</p> $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^x & x < 1 \\ \frac{x}{2^2} & x > 1 \end{cases}$ <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $f(f(-1)) = f\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right) = f(4) = 4$	۲۹
۱۰	<p>جاهای خالی را کامل نمایید.</p> <p>الف) اگر $f(x) = 3x + 5$ ضابطه $f^{-1} \circ f$ برابر است با: -----</p> <p>ب) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$ در این صورت دامنه $f \circ g$ برابر است با: -----</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> <p>الف) $f^{-1} \circ f = x$ ب) $D_{f \circ g} = (-\infty, 0]$</p>	۳۰
۱۰	<p>جمله‌های درست را با «✓» و جمله‌های نادرست را با «✗» مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن‌گاه $f \circ g(4) = 35$</p> <p>ب) $D_g \cap R_f = \emptyset$ شرط تشکیل $f \circ g$ می باشد.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> <p>الف) ✗ ب) ✗</p>	۳۱
۱۰	<p>اگر $f = \{(10, 7)(-2, 4)(3, -5)(2, 1)\}$ و $g = \{(2, 11)(4, -2)(6, 3)(3, 2)\}$ باشد در این صورت $f \circ g$ را بیابید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $f \circ g = \{(4, 4)(6, -5)(3, 1)\}$	۳۲
۱۰	<p>اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = x^2 + 3$ باشند:</p> <p>الف) تابع $f + g$ و دامنه آن را بدست آورید.</p> <p>ب) تابع $\frac{f}{g}$ و دامنه آن را بدست آورید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $g(x) = x^2 + 3 \text{ و } f(x) = \sqrt{3-x}$ $(f + g)(x) = \sqrt{3-x} + x^2 + 3$ $D_f = (-\infty, 3] \text{ و } D_g = R$ $D_{f+g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 3]$	۳۳

	$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{3-x}}{x^2+3} \text{ (ب)}$ $\frac{f}{g} = D_f \cap D_g - \{x g(x) = 0\} = (-\infty, 3]$	
۱۰	<p>اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = x^2 + 1$ باشد:</p> <p>الف) ضابطه تابع $gof(x)$ را بدست آورید.</p> <p>ب) دامنه تابع $fog(x)$ را با استفاده از تعریف بدست آورید.</p> <p>ج) مقدار عددی $gof(2)$ را بدست آورید.</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ</p> <p>الف) $gof(x) = (\sqrt{2-x})^2 + 1 = 2 - x + 1 = -x + 3$</p> <p>ب) $D_{fog} = \{x \in D_g g(x) \in D_f\} = \{x \in R x^2 + 1 \in (-\infty, 2]\} = [-1, 1]$</p> <p>ج) $gof(2) = 1$</p>	۳۴