دبیرستان
استعداد های ناب صالحین

ناحیه ۳ اهواز

جزوه ی درس ریاضیات پایه نهم

فصل سوم : هندسه و استدلال

تهیه کننده : فیروز محمودی

همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

@firouz1363

در زندگی روزمره گاهی نیاز داریم تا با دلیل آوردن در مورد یک موضوع خاص، به نتیجه گیری در مورد آن بپردازیم. این کار را در ریاضیات و هندسه نیز انجام می دهیم که به آن **استدلال** گفته می شود.

تعریف استدلال: دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

انواع استدلال

الف) استدلال استقرایی: نتیجه گیری بر اساس مشاهده ها، حواس پنج گانه و آزمایش ها می باشد. (این نوع استدلال معتبر و قابل اطمینان نیست)

ب) استدلال استنتاجی: نتیجه گیری بر اساس قوانین و اصول پذیرفته شده می باشد (این نوع استدلال محکم و قابل اطمینان است)

نکته: در هندسه و ریاضیات از استدلال استنتاجی استفاده می شود، ولی این کار از اهمیت استدلال استقرایی کم نمی کند. زیرا با کمک این نوع استدلال هم می توانیم به قوانین و قضایای خوبی دست پیدا کنیم.

خطا در حواس پنج گانه: گاهی در دیدن اشکال خطا می کنیم. گاهی حواس ما در تشخیص گرما و سرمای آب خطا می کند. خطاها، گاهی به علت خطای وسایل آزمایشگاهی و گاهی به علت خطای انسانی است. بنابراین مشاهده کردن و یا استفاده از حواس پنج گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی نیست. البته بکار بردن شکل ها و ترسیم آنها و استفاده از شهود، به تشخیص راه حل ها و ارائه ی حدس های درست، کمک زیادی می کند. ولی نمی توانیم با اطمینان بگوییم که تشخیص ما حتماً درست بوده است.

مثال: کدام یک از استدلالهای زیر قابل اطمینان تر است؟

الف) من تا به حال تابستان سرما نخورده ام، پس تابستان امسال هم سرما نمی خورم.
ب) مساحت یک دایره به شعاع 7cm از مساحت یک دایره به شعاع 5cm بیشتر است.

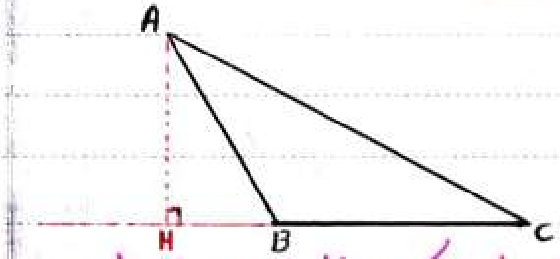
جواب: گزینه ی ب صحیح است.

مثال نقض:

در مواردی که بخواهیم درستی یک موضوع را زیر سوال ببریم و یا نادرستی آنرا ثابت کنیم، از یک مثال دلخواه استفاده می کنیم که نادرستی آن موضوع را نتیجه بدهد، که به این مثال «**مثال نقض**» گفته می شود.

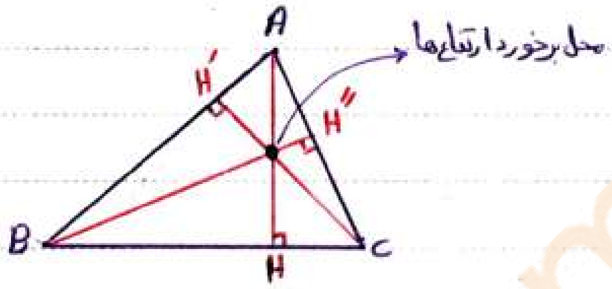
مثال: آیا عبارت «در هر مثلث، ارتفاع وارد بر هر یک از ضلع‌ها، درون مثلث قرار می‌گیرد.» درست است؟

جواب: برای رد درستی عبارت بالا فقط کافی است که یک مثلث چنان رسم کنیم که یکی از ارتفاع‌ها خارج از مثلث قرار بگیرد. برای این منظور در مثلث ABC ارتفاع AH خارج از این مثلث قرار دارد، که نشان می‌دهد عبارت بالا نادرست است.

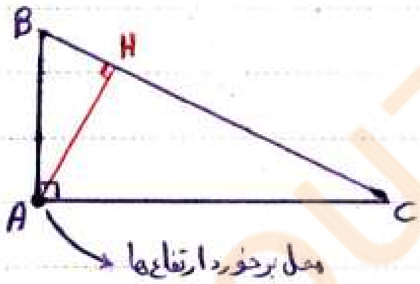


در واقع ما با رسم این مثلث (که ارتفاع AH خارج از آن قرار دارد) یک مثال نقض برای نادرست بودن عبارت بالا ارائه کرده‌ایم.

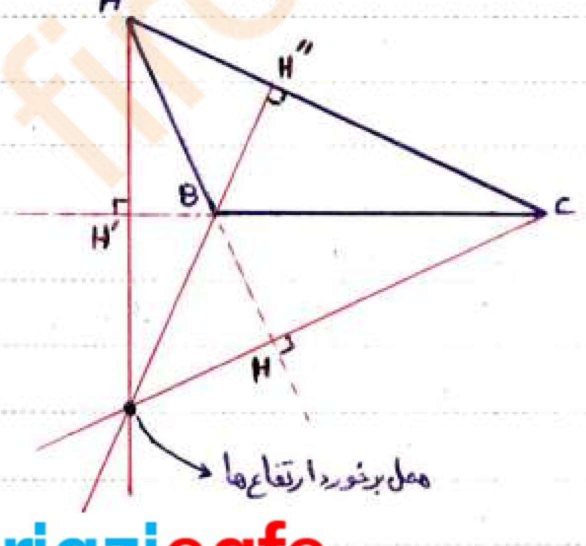
نکته: هر مثلث سه ارتفاع دارد که در یک نقطه متقاطع هستند، و محل برخورد ارتفاع‌ها بستگی به نوع مثلث دارد. بنابراین:



الف) اگر در یک مثلث همه‌ی زاویه‌ها تند باشند، ارتفاع‌ها در داخل مثلث همدیگر را قطع می‌کنند.



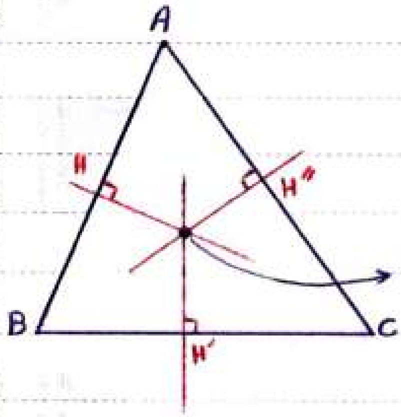
ب) در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع‌ها، روی رأس قائمه همدیگر را قطع می‌کنند.



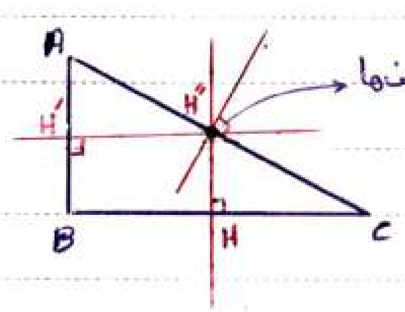
ج) اگر مثلثی یک زاویه‌ی باز داشته باشد، ارتفاع‌های این مثلث در نقطه‌ای خارج از مثلث، همدیگر را قطع می‌کنند.

نکته: هر مثلث سه عمود منصف دارد که در یک نقطه متقاطع هستند و محل برخورد این عمود منصف ها بستگی به نوع مثلث دارد. بنابراین:

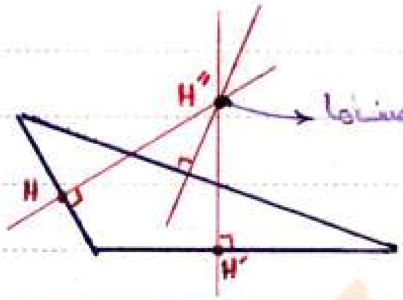
الف) اگر در یک مثلث همه ی زاویه ها تند باشند. محل برخورد عمود منصف ضلع ها، درون مثلث قرار می گیرد.



ب) در هر مثلث قائم الزاویه، محل برخورد عمود منصفها وسط وتر است.



ج) اگر مثلثی یک زاویه ی باز داشته باشد، محل برخورد این سه عمود منصف خارج از مثلث داده شده می باشد.



همانطور که آموختیم، برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع، حواس پنج گانه یا ارائه ی مثالهای متعدد و یا توجه به ابعاد ظاهری، کافی نیست. و باید از دلیل های منطقی و درست کمک بگیریم و با استدلال کردن درستی آن موضوع را ثابت کنیم.

نکته: در روند استدلال و رسیدن به خواسته ی مسأله «حکم» باید از اطلاعات داده شده در مسأله «فرض یا داده ها»، و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است استفاده کنیم. بنابراین در هر مسأله:

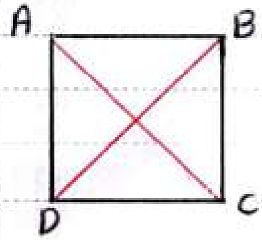
الف) به اطلاعات مسأله و دانسته های قبلی در مورد آن «فرض مسأله» گفته می شود.

ب) به خواسته ی مسأله «حکم» گفته می شود.

ج) به استدلالی که موضوع یا ادعای مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد «اثبات» گفته می شود.

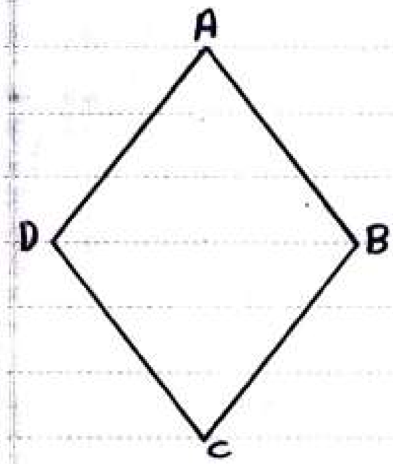
نکته: اولین قدم برای اثبات هر موضوع، تشخیص فرض، حکم، تعاریف و اصول مربوط به آن است.

مثال: در مسأله‌ی زیر فرض و حکم را مشخص کنید.
« ثابت کنید که در مربع مقابل، قطرها با هم برابرند. »



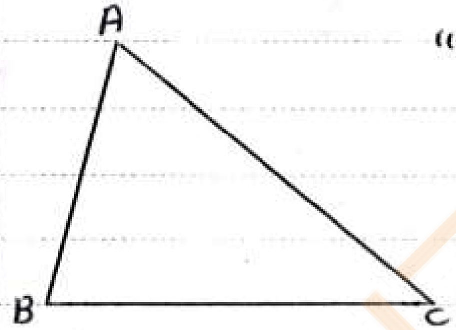
فرض	$\overset{\square}{ABCD}$ یک مربع است
حکم	$\overline{AC} = \overline{BD}$

مثال: در مسأله‌ی زیر فرض و حکم را مشخص کنید.
« ثابت کنید که در هر لوزی، زاویه‌های مقابل با هم مساویند. »



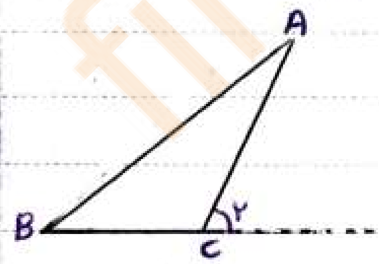
فرض	$\overset{\square}{ABCD}$ یک لوزی دلخواه است.
حکم	$\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{D} = \hat{B}$

مثال: در مسأله‌ی زیر فرض و حکم را مشخص کنید.
« ثابت کنید که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه می‌باشد. »



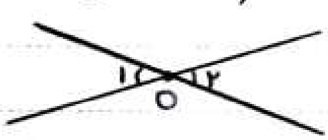
فرض	$\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث دلخواه است
حکم	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

مثال: در مسأله‌ی زیر فرض و حکم را مشخص کنید.
« ثابت کنید که در هر مثلث، اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور به آن. »



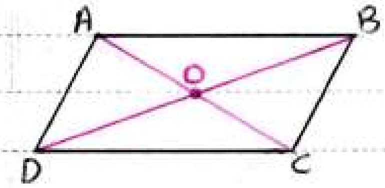
فرض	$\hat{C}_2$ زاویه خارجی و $\overset{\Delta}{ABC}$ دلخواه است.
حکم	$\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$

مثال: در مسأله‌ی « ثابت کنید که دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم برابرند » فرض و حکم را مشخص کنید.



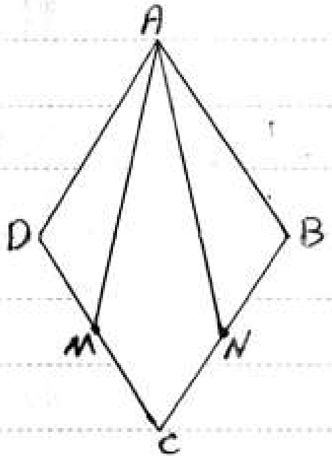
فرض	زاویه‌های O_1 و O_2 متقابل به رأسند
حکم	$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

مثال: در مسأله‌ی زیر، فرض و حکم را مشخص کنید:
« ثابت کنید که در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها همدیگر را نصف می‌کنند. »



فرض	$\square ABCD$ متوازی‌الاضلاعی دلخواه است.
حکم	$\overline{AO}=\overline{OC}$, $\overline{DO}=\overline{OB}$

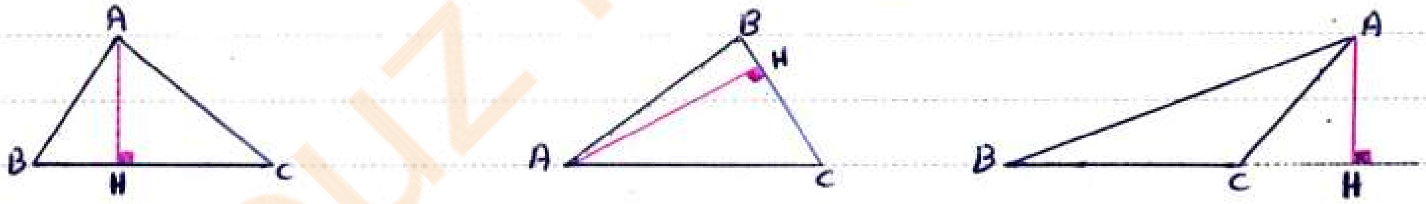
مثال: در مسأله‌ی زیر، فرض و حکم را مشخص کنید:
« در شکل مقابل $ABCD$ لوزی است و M و N وسط دو ضلع آن می‌باشند ثابت کنید که مثلثهای ANB و AMD همنهشت هستند. »



فرض	$ABCD$ لوزی است و $DM=MC$ و $BN=NC$
حکم	$ANB \cong AMD$

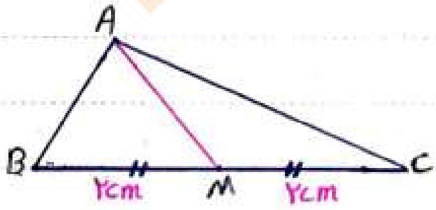
یادآوری:
تعریف ارتفاع در مثلث: به پاره‌خطی گفته می‌شود که از یک رأس بر ضلع مقابل به خودش یا امتداد آن عمود می‌شود.

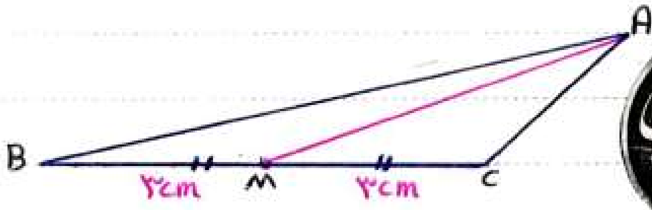
مثال: در مثلثهای مقابل، AH ارتفاع مثلث ABC می‌باشد.



تعریف میانه در مثلث: به پاره‌خطی گفته می‌شود که از یک رأس، به وسط ضلع مقابل به خودش وصل می‌شود.

مثال: در مثلثهای مقابل AM میانه‌ی مثلث ABC می‌باشد.

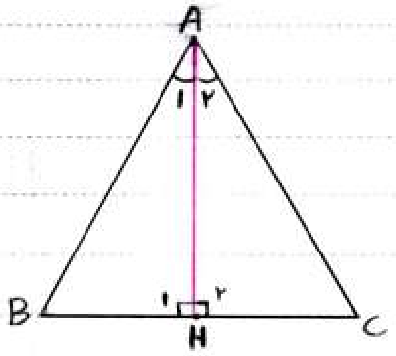




نکته‌ی مهم: برای هر مثلث سه میانه می‌توان رسم کرد که این میانه‌ها همدیگر را در نقطه‌ای داخل مثلث قطع می‌کنند.

مثال: در مسأله‌ی زیر فرض و حکم را مشخص کنید.

«ثابت کنید که در هر مثلث متساوی الاضلاع، نیمساز هر زاویه، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر ضلع مقابل آن می‌باشد.»



فرض	$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$
حکم	$\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ$ و $\overline{BH}=\overline{HC}$

نکته: برای حل مسأله‌های هندسی، راه حل کلی وجود ندارد. اما انجام مراحل زیر را توصیه می‌کنیم.

الف) صورت مسأله را به دقت خوانده و مفاهیم تشکیل دهنده‌ی آن را خوب بشناسید.

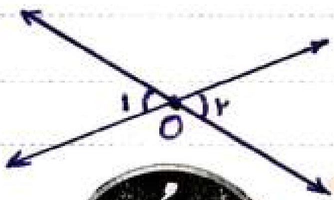
ب) اگر مسأله شکل ندارد، با توجه به صورت مسأله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.

ج) داده‌های مسأله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را بشناسید و در یک جدول بنویسید.

د) برای رسیدن از فرض به حکم مسأله، یک راه حل پیدا کنید.

مثال: در مسأله‌ی زیر، فرض و حکم را بنویسید و سپس با استدلال مناسب، آن را ثابت کنید.

«ثابت کنید که دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم برابرند.»



فرض	$\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ متقابل به رأس هستند
حکم	$\hat{O}_1=\hat{O}_2$

اثبات:

$$\begin{cases}\hat{O}_1+\hat{O}_3=180^\circ\\ \hat{O}_3+\hat{O}_2=180^\circ\end{cases} \Rightarrow \hat{O}_1+\cancel{\hat{O}_3}=\cancel{\hat{O}_3}+\hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2$$

مثال: در مسأله‌ی زیر فرض و حکم و استدلال را بنویسید.

«ثابت کنید که در لوزی قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.»

فرض	شکل داده شده لوزی است.
حکم	قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

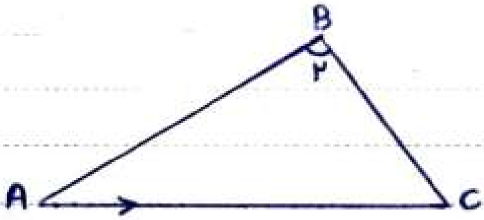
اثبات:

الف) در هر متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

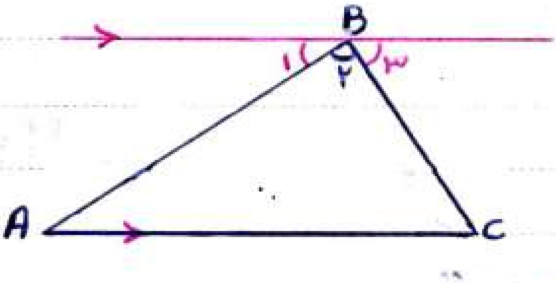
ب) لوزی نوعی متوازی الاضلاع است.

$\Rightarrow$ در لوزی قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

مثال: ثابت کنید که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° می باشد.



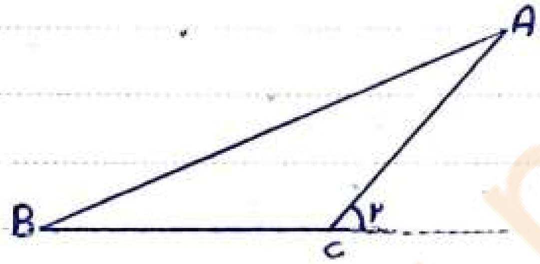
فرض	$\overset{\Delta}{ABC}$ دلخواه است.
حکم	$\hat{A}+\hat{B}_2+\hat{C}=180^\circ$



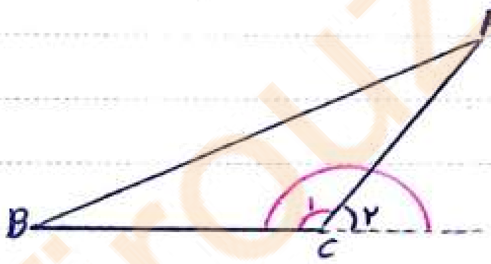
اثبات: از نقطه‌ی B خطی به موازات ضلع AC رسم می کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} B_1+B_2+B_3=180^\circ \\ \hat{B}_1=\hat{A} \\ \hat{B}_3=\hat{C} \end{cases} \Longrightarrow \hat{A}+\hat{B}_2+\hat{C}=180^\circ$$

مثال: ثابت کنید که در هر مثلث، اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی، برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور به آن.



فرض	$\overset{\Delta}{ABC}$ دلخواه است و C_2 زاویه‌ی خارجی آن
حکم	$\hat{C}_2=\hat{A}+\hat{B}$



اثبات:

$$\begin{cases} \hat{C}_2+\hat{C}_1=180^\circ \\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_1=180^\circ \end{cases} \Longrightarrow \hat{C}_2+\cancel{\hat{C}_1}=\hat{A}+\hat{B}+\cancel{\hat{C}_1}$$

بنابراین: $\hat{C}_2=\hat{A}+\hat{B}$

مثال: آیا استدلال زیر درست است؟ چرا؟

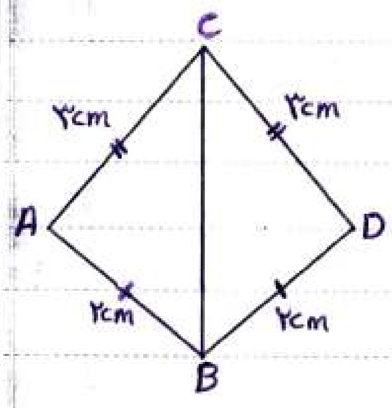
هر لوزی یک متوازی الاضلاع است
ABCD یک متوازی الاضلاع است. } بنابراین ABCD یک لوزی است.

جواب: استدلال غلط است. لوزی ها متوازی الاضلاع هستند نه این که متوازی الاضلاع ها لوزی باشند.

حالتهای همنهشتی مثلثها

الف) (ض ض ض) : هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری برابر باشند می‌گوییم این دو مثلث همنهشت هستند

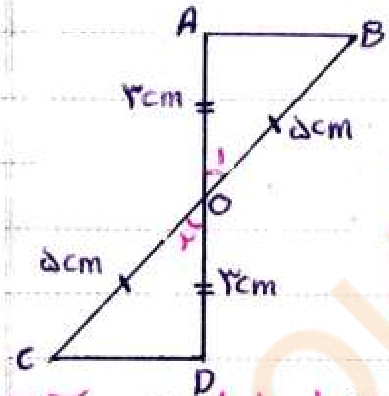
مثال: در شکل مقابل، دلیل همنهشتی مثلثهای ABC و BCD را بنویسید.



$$\begin{cases} AB = BD = 2cm \\ AC = DC = 3cm \\ BC = \text{ضلع مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{BCD} \quad (\text{ض ض ض})$$

ب) (ض ز ض): هرگاه دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها از مثلثی، با دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها از مثلث دیگری برابر باشند، می‌گوییم این دو مثلث همنهشت هستند

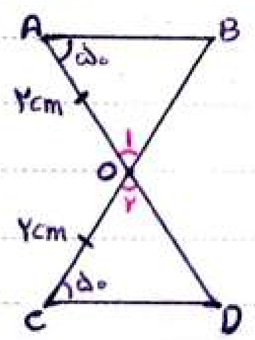
مثال: در شکل مقابل دلیل همنهشتی مثلثهای AOB و COD را بنویسید.



$$\begin{cases} OA = OD = 3cm \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 : \text{متقابل به رأس} \\ = OC = 5cm \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD} \quad (\text{ض ز ض})$$

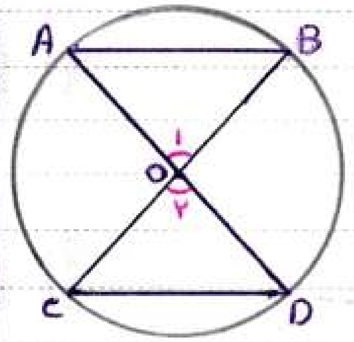
ج) (ز ض ز) : هرگاه دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث دیگری برابر باشند، می‌گوییم این دو مثلث همنهشت هستند.

مثال: در شکل مقابل دلیل همنهشتی مثلثهای AOB و COD را بنویسید.



$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 : \text{متقابل به رأس} \\ OA = OC = 2cm \\ \hat{A} = \hat{C} = 50^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD} \quad (\text{ز ض ز})$$

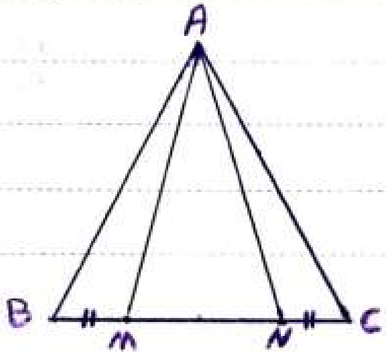
مثال: در شکل مقابل O مرکز دایره است. دلیل همنهشتی مثلثهای AOB و COD را بنویسید.



$$\left\{\begin{array}{ll} OA = OC & \text{هر دو شعاع دایره} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{متقابل به رأس} \\ OB = OD & \text{هر دو شعاع دایره} \end{array}\right. \Rightarrow \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD}$$

(ض ز ض)

مثال: در مثلث متساوی الساقین ABC اگر $\overline{BM} = \overline{NC}$ باشد، ثابت کنید که $\overline{AM} = \overline{AN}$ می باشد.



فرض	$\overline{AB} = \overline{AC}$, $\hat{B} = \hat{C}$, $\overline{BM} = \overline{NC}$
حکم	$\overline{AM} = \overline{AN}$

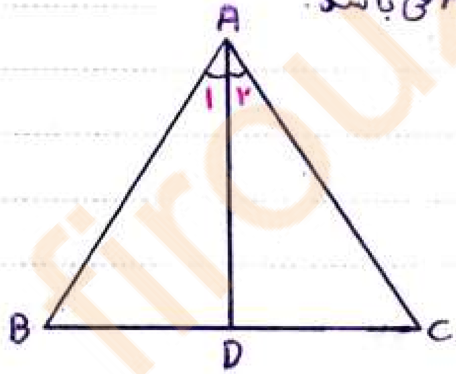
جواب: در مثلثهای ABM و ACN داریم:

$$\left\{\begin{array}{ll} AB = AC & \text{: طبق فرض} \\ \hat{B} = \hat{C} & \text{طبق فرض} \\ BM = NC & \text{طبق فرض} \end{array}\right. \Rightarrow \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{ANC}$$

(ض ز ض)

بنابراین اجزای متناظر این دو مثلث باهم برابرند، پس $\overline{AM} = \overline{AN}$ می باشد.

مثال: مثلث ABC متساوی الساقین است و AD نیمساز زاویه ی A می باشد. ثابت کنید که AD میانه نیز هست؟



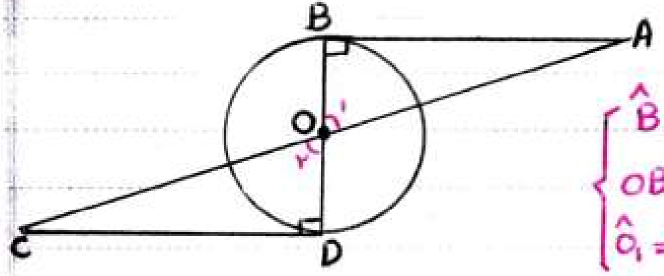
فرض	$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $\overline{AB} = \overline{AC}$
حکم	$\overline{BD} = \overline{DC}$

$$\left\{\begin{array}{ll} AB = AC & \text{: طبق فرض} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & \text{طبق فرض} \\ AD = & \text{ضلع مشترک} \end{array}\right. \Rightarrow \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{ADC}$$

(ض ز ض)

بنابراین اجزای متناظر این دو مثلث باهم برابرند. پس BD=DC می باشد یعنی که نقطه ی D وسط ضلع BC قرار دارد. که این موضوع نشان می دهد پاره خط AD میانه ی مثلث ABC می باشد.

مثال: در شکل مقابل دلیل همنهشتی مثلثهای AOB و COD را بنویسید.



$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \\ OB = OD \quad \text{شعاع دایره} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad \text{متقابل به رأس} \end{cases} \longrightarrow \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD}$$
(ز ض ز)

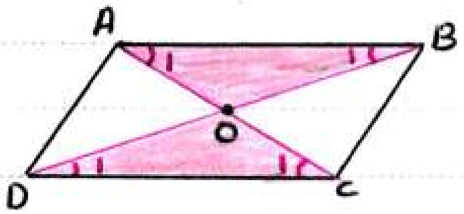
تساوی اجزای متناظر را بنویسید.

$\hat{A} = \hat{C}$ $\qquad \overline{AB} = \overline{CD}$

$B = D$ $\qquad \overline{OA} = \overline{OC}$

$O_1 = O_2$ $\qquad \overline{OB} = \overline{OD}$

مثال: ثابت کنید که در هر متوازی الاضلاع، قطرها همدیگر را نصف می کنند. (فرض و حکم نوشته شود)



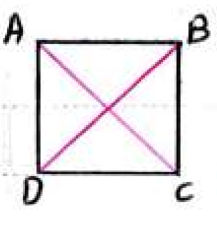
فرض	$\overset{\square}{ABCD}$ متوازی الاضلاع است.
حکم	$AO = OC$, $DO = OB$

اثبات: در مثلثهای AOB و DOC داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \quad \text{خطوط موازی و مورّب} \\ AB = DC \quad \text{طبق فرض} \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \quad \text{خطوط موازی و مورّب} \end{cases} \Longrightarrow \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{DOC}$$
(ز ض ز)

بنابراین اجزای متناظر این دو مثلث باهم برابرند یعنی $AO = OC$ (به این معنی که نقطه ی O وسط قطر AC قرار دارد. و قطر بزرگ که از نقطه ی O می گذرد، قطر AC را نصف می کند) و به همین صورت می توان نشان داد که $DO = OB$ می باشد.

مثال: ثابت کنید که قطرهای هر مربع باهم برابرند.



جواب: در مثلثهای ADC و BCD داریم:

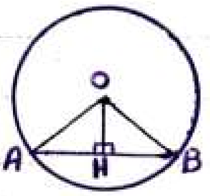
$$\begin{cases} AD = BC \quad \text{هر دو ضلع مربع} \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \quad \text{ویژگی مربع} \\ DC = DC \quad \text{هر دو ضلع مربع} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow \text{اجزای متناظر برابرند} \Rightarrow AC = BD$$

یعنی قطرها باهم برابر هستند

حالتهای همنهشتی مثلثهای قائم الزاویه

الف) وتر و یک ضلع : اگر وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم الزاویه ی دیگر برابر باشند، می گوئیم این دو مثلث باهم همنهشت هستند.

مثال: در شکل مقابل O مرکز دایره است، دلیل همنهشتی دو مثلث AOH و BOH را بنویسید.

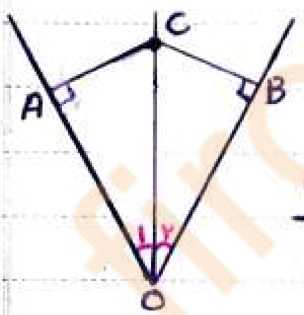


فرض	O مرکز دایره است
حکم	$AOH \cong BOH$

$$\begin{cases} \underset{\text{وتر}}{OA} = \underset{\text{وتر}}{OB} & \text{هر دو شعاع دایره} \\ \underset{\text{ضلع}}{OH} = \underset{\text{ضلع}}{OH} & \text{ضلع مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOH} \cong BOH \ (\text{و ض})$$

ب) وتر و یک زاویه تند : اگر وتر و یک زاویه ی تند از یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک زاویه ی تند از یک مثلث قائم الزاویه ی دیگر برابر باشند، می گوئیم این دو مثلث باهم همنهشت هستند.

مثال: در شکل مقابل پاره خط OC نیمساز زاویه ی AOB می باشد، دلیل همنهشتی مثلثهای AOC و BOC را بنویسید.

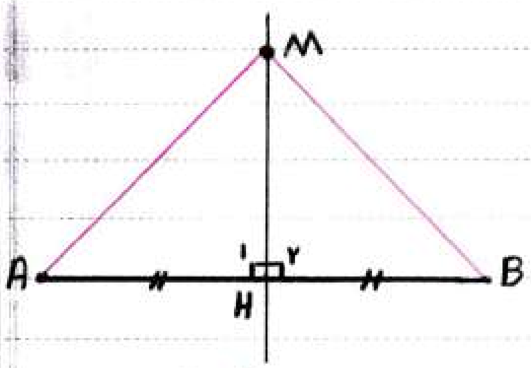


فرض	$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
حکم	$\overset{\Delta}{AOC} \cong \overset{\Delta}{BOC}$

$$\begin{cases} \underset{\text{وتر}}{OC} = \underset{\text{وتر}}{OC} & \text{وتر مشترک} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{طبق فرض} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOC} \cong BOC \ (\text{و ز})$$

نکته: دو مثلث قائم الزاویه می توانند بنابر حالتهای (ض ض ض) یا (ز ض ز) یا (ض ز ض) نیز باهم همنهشت باشند.

مثال: ثابت کنید که فاصله‌ی هر نقطه‌ی دلخواه روی عمود منصف یک پاره خط ، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است . (فرض و حکم نوشته شود)



پاسخ : ابتدا یک پاره خط دلخواه رسم می‌کنیم و عمود منصف آن را مشخص می‌کنیم . سپس نقطه‌ی دلخواهی مثل M را روی آن درنظر می‌گیریم . باید ثابت کنیم که فاصله‌ی نقطه‌ی M از دو سر این پاره خط به یک اندازه است .

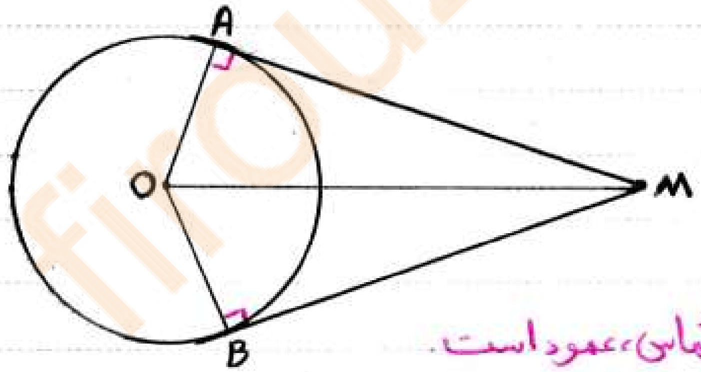
فرض	M نقطه‌ای دلخواه روی عمود منصف پاره خط AB $AH = HB \quad \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90$
حکم	$MA = MB$

اثبات؛ در مثلثهای AMH و BMH داریم؛

$$\left\{\begin{array}{ll} MH = MH & \text{ضلع مشترک} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ & \text{طبق فرض} \\ AH = HB & \text{طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(ض ز ض)}}{\overset{\triangle}{AMH} \cong \overset{\triangle}{BMH}}$$

بنابراین اجزای متناظر این دو مثلث باهم برابرند و $MA = MB$

مثال : از نقطه‌ی M خارج از دایره دو مماس MA و MB را رسم کرده‌ایم ، ثابت کنید طول مماسهای MA و MB باهم برابرند .



فرض	$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$
حکم	$MA = MB$

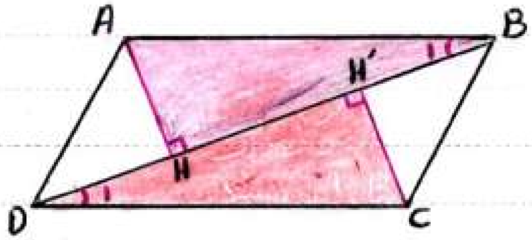
نکته‌ی مهم : شعاع دایره بر خط مماس ، در نقطه‌ی تماس ، عمود است .

بنابراین مثلثهای AOM و BOM قائم الزاویه هستند .

$$\left\{\begin{array}{ll} \overset{\text{وتر}}{OM} = \overset{\text{وتر}}{OM} & \text{وتر مشترک دو مثلث} \\ \underset{\text{ضلع}}{OA} = \underset{\text{ضلع}}{OB} & \text{هر دو شعاع دایره} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{(وض)}}{\overset{\triangle}{AOM} \cong \overset{\triangle}{BOM}}$$

بنابراین اجزای متناظر این دو مثلث باهم برابرند و می‌توان نتیجه گرفت که؛ $MA = MB$ می‌باشد .

مثال: ثابت کنید که در هر متوازی‌الاضلاع فاصله‌ی دو رأس مقابل به‌هم‌دیگر، از قطر بین آنها به یک فاصله است.



فرض	$ABCD$ متوازی‌الاضلاع است
حکم	$AH = CH'$

$$\begin{cases} AB = DC & \text{طبق فرض} \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 & \text{خطوط موازی و مورب} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{AHB} \cong \overset{\triangle}{CH'D} \ (\text{وز})$$

(وتر، وتر)

بنابراین اجزای متناظر این دو مثلث باهم برابر هستند و می‌توان نتیجه گرفت که: $AH = CH'$

مثال: استدلال زیر را با عبارت مناسب کامل کنید.

مربع نوعی ...... است.

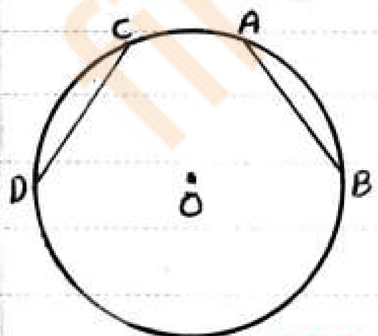
در لوزی قطرها عمود منصف همدیگرند $\Rightarrow$ در .... قطرها عمود منصف همدیگرند.

مثال: استدلال زیر را کامل کنید.

لوزی، نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در متوازی‌الاضلاع .... $\Rightarrow$ در لوزی، ضلع‌های روبرو ....

مثال: با کامل کردن استدلال زیر نشان دهید که «کمان‌های نظیر وترهای مساوی باهم برابرند.»

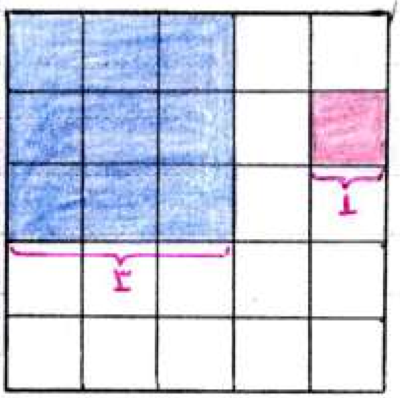


فرض	$AB = CD$
حکم	$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

$$\begin{cases} OC = \ldots \\ \ldots = OB \\ AB = \ldots & \text{طبق فرض} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{COD} \cong \overset{\triangle}{AOB} \ (\text{بنابر حالت} \ \ldots) \Rightarrow \hat{\ldots} = \hat{\ldots} \Rightarrow \overset{\frown}{\ldots} = \overset{\frown}{\ldots}$$

شکلهای متشابه:

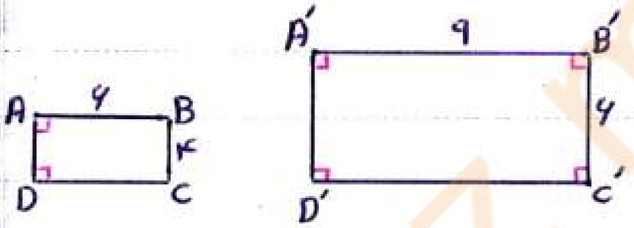
به شکل روبرو نگاه کنید. شکل سمت چپ مربعی به ضلع ۳ واحد و شکل سمت راست مربعی به ضلع ۱ واحد است.



همانطور که می بینید اندازه ی همه ی زاویه های مربع سمت چپ با اندازه ی زاویه ی متناظرشان در مربع سمت راست برابر هستند و تنها تفاوت این دو مربع، اندازه ی ضلع هاشان است. که آن هم همگی به یک نسبت تغییر کرده است. (نسبت ۱ به ۳) یعنی در مربع سمت چپ، همه ی ضلع ها، سه برابر اضلاع متناظرشان در مربع سمت راست هستند، در چنین حالتی می گوئیم: این دو مربع باهم متشابهند

تعریف: هرگاه در دو چند ضلعی، همه ی اضلاع به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده و یا حتی بدون تغییر باشد) و اندازه ی زاویه های دو چند ضلعی تغییری نکرده باشد، می گوئیم آن دو چند ضلعی، باهم متشابهند

مثال: دو مستطیل مقابل متشابهند زیرا:



الف) زاویه های متناظر آنها باهم برابرند

$\hat{A} = \hat{A'} = 90^\circ$ $\hat{B} = \hat{B'} = 90^\circ$

$\hat{D} = \hat{D'} = 90^\circ$ $\hat{C} = \hat{C'} = 90^\circ$

ب) اضلاع متناظر باهم متناسب هستند.

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ $\frac{BC}{B'C'} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\frac{AD}{A'D'} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\frac{DC}{D'C'} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

بنابراین می نویسیم: $ABCD \sim A'B'C'D'$

علامت تشابه

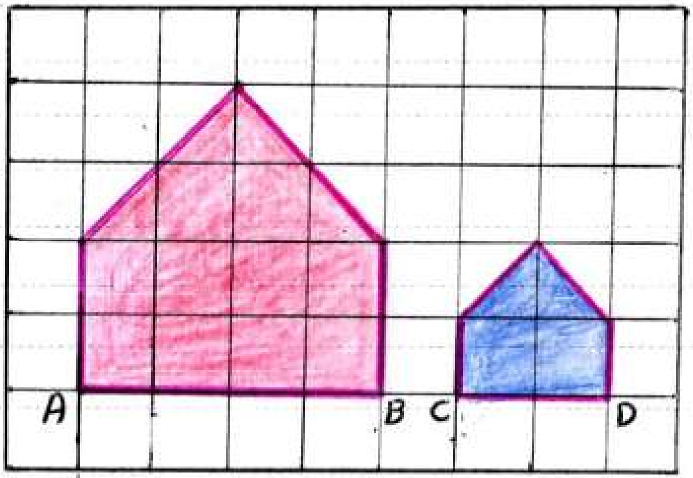
نکته ی مهم: همه ی مربعها باهم متشابهند. زیرا:

الف) زاویه های متناظر آنها باهم برابر است.

ب) نسبت اضلاع هر دو مربع دلخواه همواره ثابت است.

مثال : در شکل مقابل شکل سمت راست با شکل سمت چپ متشابه است و اندازه‌ی هر یک از ضلع های شکل سمت چپ، دو برابر ضلع های متناظر آن در شکل سمت راست است.
به عنوان مثال ضلع AB دو برابر ضلع متناظر آن یعنی CD می باشد. پس

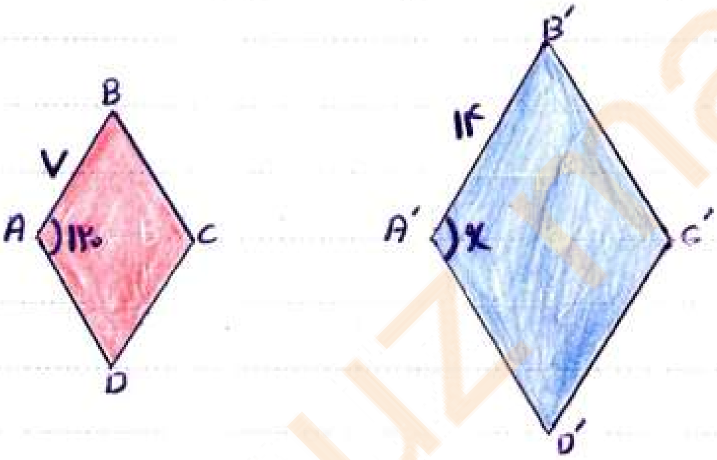
$$\frac{AB}{CD} = \frac{4}{2} = 2$$



نکته : این نسبت بین همه‌ی اضلاع متناظر در دو شکل، ثابت و « برابر ۲ » می باشد. به چنین نسبتی در ریاضیات « نسبت تشابه » گفته می شود.

تعریف : به نسبت اندازه‌ی دو ضلع متناظر، در دو شکل متشابه « نسبت تشابه » گفته می شود.

مثال : اگر دو لوزی مقابل متشابه باشند، اندازه های خواسته شده را بدست آورید.



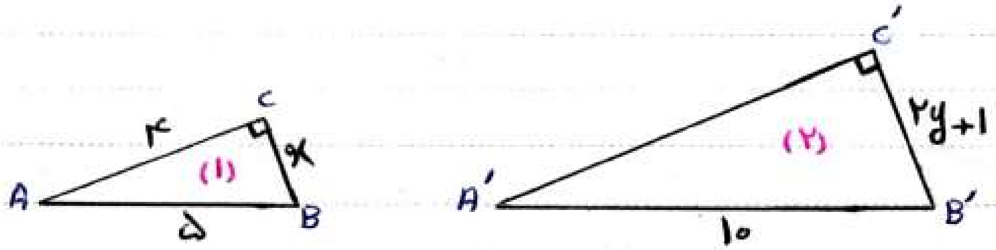
$$\hat{x} = 120^\circ$$

نسبت تشابه $= \frac{7}{14}$ یا $\frac{14}{7}$

نکته‌ی مهم : برای بیان نسبت تشابه این دو لوزی می توانیم به دو صورت مختلف عمل کنیم
الف) اگر طول ضلع لوزی کوچک را بر طول ضلع لوزی بزرگ تقسیم کنیم نسبت تشابه آنها $\frac{7}{14}$ یا همان $\frac{1}{2}$ می باشد (به این معنی که طول ضلع لوزی کوچک نصف طول ضلع لوزی بزرگ می باشد.
ب) اگر طول ضلع لوزی بزرگ را بر طول ضلع لوزی کوچک تقسیم کنیم، نسبت تشابه آنها $\frac{14}{7}$ یا همان ۲ می باشد (به این معنی که طول ضلع لوزی بزرگ، دو برابر طول ضلع لوزی کوچک می باشد.

بنابراین اگر نسبت تشابه این دو لوزی را $\frac{7}{14}$ در نظر بگیریم، درست است و اگر نسبت تشابه این دو لوزی را $\frac{14}{7}$ هم در نظر بگیریم، باز هم درست است.

مثال: اگر مثلثهای مقابل متشابه باشند، مقدار x و y چقدر است؟



جواب: مثلث (۱) قائم الزاویه است و می توانیم به کمک رابطه ی فیثاغورس مقدار x را بدست آوریم بنابراین:

$$x^{۲}=۵^{۲}-۴^{۲}$$

$$x^{۲}=۲۵-۱۶=۹ \Rightarrow x=\sqrt{۹}=۳$$

از طرفی چون این دو مثلث متشابهند، نسبت اضلاع متناظر آنها باهم برابر است. بنابراین

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{CB}{C'B'}=\frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{۵}{۱۰}=\frac{\overset{۳}{x}}{۲y+1}=\cancel{\frac{۴}{A'C'}}$$

(کسری که خط خورده است به کار ما نمی آید)

$$\frac{۵}{۱۰}=\frac{۳}{۲y+1} \Longrightarrow ۵(۲y+1)=۱۰\times۳$$

$$۱۰y+۵=۳۰$$

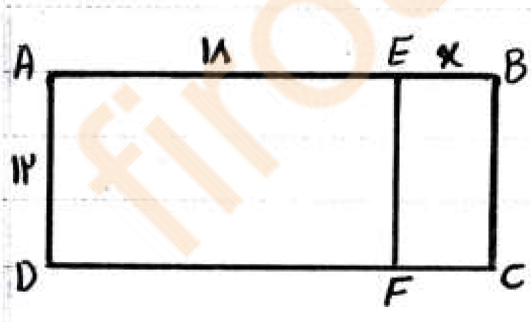
$$۱۰y=۳۰-۵=۲۵$$

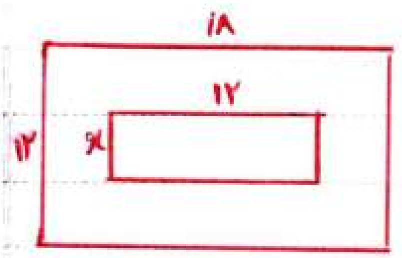
$$y=\frac{۲۵}{۱۰}=۲{,}۵$$

مثال: اگر مستطیل های $AEFD$ و $EBCF$ باهم متشابه باشند،

الف) مقدار x چقدر است؟

ب) نسبت تشابه این دو مستطیل را بدست آورید.





$$\frac{۱۲}{x}=\frac{۱۸}{۱۲} \Rightarrow ۱۸x=۱۲\times۱۲ \Rightarrow ۱۸x=۱۴۴ \Rightarrow x=\frac{۱۴۴}{۱۸}=۸$$

$$\text{نسبت تشابه}=\frac{۱۸}{۱۲}$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: دو لوزی باهم متشابهند و نسبت تشابه آنها $\frac{۲}{۳}$ می باشد، اگر طول ضلع لوزی کوچکتر ۱۰ باشد طول ضلع لوزی بزرگتر چقدر است؟

جواب: ابتدا دو لوزی رسم می کنیم (یکی بزرگ و یکی کوچک). چون نسبت تشابه این دو لوزی $\frac{۲}{۳}$ می باشد به این معنی است که نسبت اضلاع لوزی کوچکتر به اضلاع لوزی بزرگتر برابر کسر $\frac{۲}{۳}$ می باشد. بنابراین فرض می کنیم طول ضلع لوزی بزرگتر x باشد.

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{۲}{۳}$$

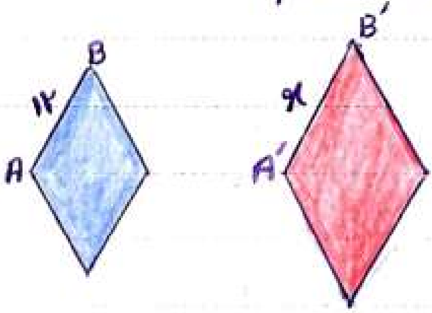
$$\frac{۱۰}{x} = \frac{۲}{۳}$$

$$۲x = ۳۰ \Rightarrow x = ۱۵$$

مثال: دو لوزی متشابهند و نسبت تشابه آنها $\frac{۳}{۴}$ می باشد، اگر طول ضلع یکی از این لوزی ها ۱۲ باشد طول ضلع لوزی دیگری چقدر است؟

جواب: در صورت سؤال گفته است که طول ضلع یکی از این لوزی ها ۱۲ می باشد. ولی دقیقاً مشخص نکرده است که طول ضلع کدام یک از این لوزی ها ۱۲ می باشد. بنابراین ما نمی دانیم که این عدد ۱۲ مربوط به طول ضلع لوزی بزرگتر است یا مربوط به طول ضلع لوزی کوچکتر. پس باید دو حالت مختلف را در نظر بگیریم

الف) اگر طول ضلع لوزی کوچکتر ۱۲ باشد، طول ضلع لوزی بزرگتر را x در نظر می گیریم

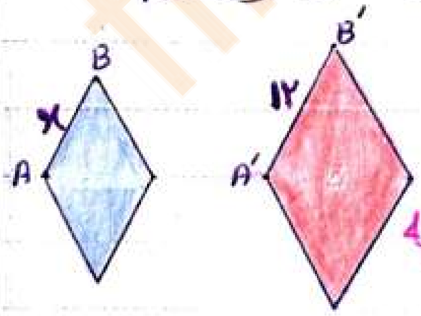


$$\text{نسبت تشابه} = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۱۲}{x} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۳x = ۴۸ \Rightarrow x = \frac{۴۸}{۳} = ۱۶$$

بنابراین طول ضلع لوزی بزرگتر ۱۶ می باشد

ب) اگر طول ضلع لوزی بزرگتر ۱۲ باشد. طول ضلع لوزی کوچکتر را x در نظر می گیریم



$$\text{نسبت تشابه} = \frac{۳}{۴}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{x}{۱۲} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۴x = ۳۶ \Rightarrow x = \frac{۳۶}{۴} = ۹$$

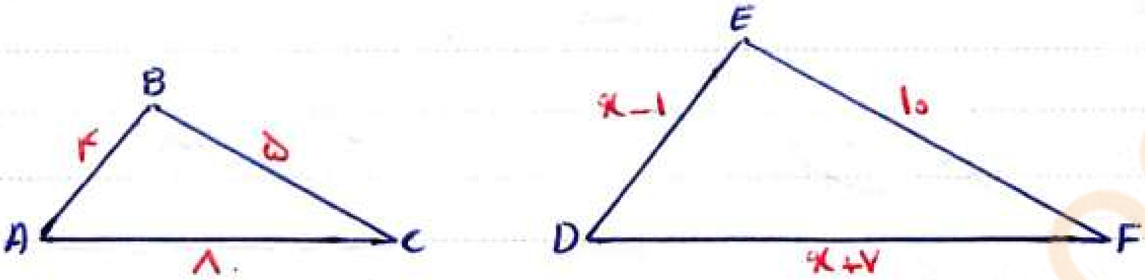
بنابراین طول ضلع لوزی کوچکتر ۹ می باشد

مثال: مثلث ABC با اضلاع ۴، ۵ و ۸ با مثلث DEF با ضلع های $x-1$ ، ۱۰ و $x+7$ متشابه است. (طول ضلع مثلثها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است)

الف) مقدار x چقدر است؟

ب) طول ضلع کوچکتر مثلث DEF چقدر است؟

جواب:



نسبت تشابه این دو مثلث را می نویسیم.

$$\frac{4}{x-1}=\frac{5}{10}=\frac{8}{x+7}$$

اکنون به سه روش مختلف می توانیم مقدار x را بدست آوریم.

$$\frac{4}{x-1}=\frac{5}{10} \Rightarrow 5(x-1)=4\times 10$$
$$5x-5=40$$
$$5x=40+5=45 \Rightarrow x=\frac{45}{5}=9$$

$$\frac{5}{10}=\frac{8}{x+7} \Rightarrow 5(x+7)=8\times 10$$
$$5x+35=80$$
$$5x=80-35=45 \Rightarrow x=\frac{45}{5}=9$$

$$\frac{4}{x-1}=\frac{8}{x+7} \quad 8(x-1)=4(x+7)$$
$$8x-8=4x+28$$
$$8x-4x=+28+8$$
$$4x=36 \Rightarrow x=\frac{36}{4}=9$$

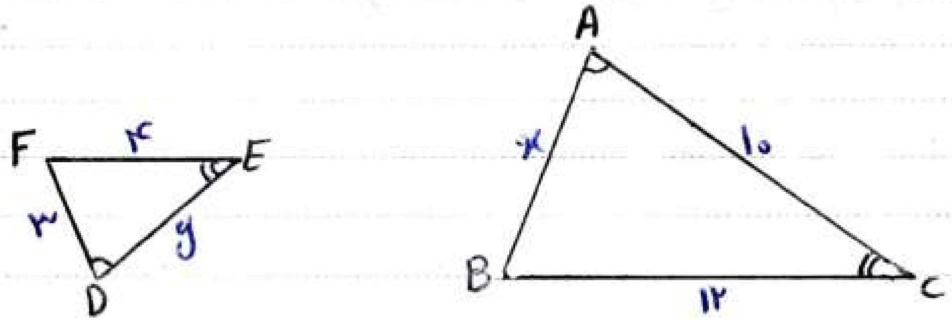
$EF=10$

$DF=x+7=9+7=16$

$DE=x-1=9-1=8$

بنابراین کوچکترین ضلع مثلث DEF برابر ۸ می باشد.

مثال: دو مثلث مقابل متشابه هستند، مقدار x و y را بدست آورید.



جواب:

ابتدا نسبت تشابه دو مثلث را می نویسیم.

$$\frac{DE}{AC}=\frac{FE}{BC}=\frac{FD}{AB}$$

$$\frac{y}{10}=\frac{4}{12}=\frac{3}{x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{10}=\frac{4}{12} \Rightarrow 12y=40 \Rightarrow y=\frac{40}{12} \\ \frac{4}{12}=\frac{3}{x} \Rightarrow 4x=36 \Rightarrow x=\frac{36}{4}=9 \end{cases}$$

مثال: مثلث ABC به طول اضلاع ۳ و ۵ و ۷ با مثلث DEF به طول اضلاع $2x-1$ و $4y+3$ و ۲۱ متشابه است. (اندازه ی اضلاع DEF از کوچک به بزرگ نوشته شده اند، مقادیر x و y را بدست آورید.

جواب: ابتدا نسبت تشابه دو مثلث را می نویسیم.

$$\frac{3}{2x\ 1}=\frac{5}{4y+3}=\frac{7}{21} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2x-1}=\frac{7}{21} \Rightarrow 7(2x-1)=3\times 21 \\ 14x-7=63 \\ 14x=63+7=70 \Rightarrow x=\frac{70}{14}=5 \\ \frac{5}{4y+3}=\frac{7}{21} \Rightarrow 7(4y+3)=5\times 21 \\ 28y+21=105 \\ 28y=105-21=84 \Rightarrow y=\frac{84}{28}=3 \end{cases}$$

مثال: برای کدام گزینه می توان مثال نقض آورد.

الف) هر لوزی، متوازی الاضلاع است.

ب) نسبت تشابه دو مثلث همنهشت، یک است.

ج) دو شکل متشابه، همنهشت هستند. ✓

د) هر دو مثلث متساوی الاضلاع، متشابه هستند.

مقیاس نقشه

حتماً تا حالا به نقشه‌ی روستا، شهر یا کشور خود نگاه کرده‌اید. در کنار نقشه، عددی به عنوان مقیاس نوشته شده است. مثلاً در کنار نقشه نوشته شده ۱ به ۱۰۰۰۰ این عدد به این معنی است که هر یک سانتی‌متر روی نقشه، نشان دهنده‌ی ۱۰۰۰۰ سانتی‌متر در دنیای واقعی (روی زمین) است.

$$\text{فرمول محاسبه‌ی مقیاس} = \frac{\text{فاصله‌ی بین دو نقطه روی نقشه}}{\text{فاصله‌ی بین همان دو نقطه روی زمین}}$$

مثال: در یک نقشه با مقیاس $\frac{1}{200}$ فاصله‌ی بین دو نقطه $5cm$ می‌باشد، فاصله‌ی این دو نقطه در اندازه‌ی واقعی چقدر است؟

$$\frac{1}{200}=\frac{5cm}{x} \Rightarrow x=\frac{200\times 5cm}{1}=\frac{1000cm}{1}=1000cm=10\ \text{متر}$$

مثال: در یک نقشه فاصله‌ی دو شهر A و B برابر $3cm$ می‌باشد، درصورتی که می‌دانیم فاصله‌ی این دو شهر ۳۰ کیلومتر است. مقیاس این نقشه چقدر است؟

$$\text{مقیاس}=\frac{3cm}{30km}=\frac{3cm}{30000m}=\frac{3\cancel{cm}}{3000000\cancel{cm}}=\frac{3}{3000000}=\frac{1}{1000000}$$

مثال: مقیاس نقشه‌ای $\frac{1}{2000}$ می‌باشد، اگر فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B در حالت واقعی ۲٫۵ کیلومتر باشد. فاصله‌ی این دو نقطه روی نقشه

$$\frac{1}{2000}=\frac{x}{2.5km} \Rightarrow x=\frac{1\times 2.5km}{2000}=\frac{2.5km}{2000}=\frac{2.5\times \cancel{1000}^{1}\,m}{\cancel{2000}_{2}}=\frac{2.5m}{2}=1.25m$$

مثال: فاصله‌ی دو نقطه در نقشه‌ای به مقیاس $\frac{1}{150}$ برابر ۸ واحد است. اگر فاصله‌ی این دو نقطه روی نقشه‌ای به مقیاس $\frac{1}{B}$ برابر ۲ واحد باشد. مطلوب است.

الف) فاصله‌ی واقعی دو نقطه

ب) مقدار B