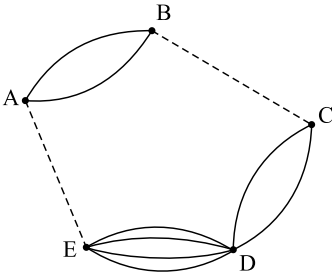


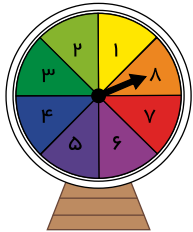
۱ تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر A به شهر E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد. (همه حالت‌های ممکن را بنویسید.)



۲ روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:
الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟
ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

۳ انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آن‌ها به‌طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:
الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.
ب) نظر هیچ دو نفری از آن‌ها مانند هم نباشد.

۴ در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آن‌ها را می‌گیرند و پس از نشان‌دار کردن، رهاشان می‌کنند. بعد از مدتی محیط‌بانان به‌طور تصادفی ۷ تا از آن‌ها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان‌دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداکثر ۲ قوچ نشان‌دار باشند.



۵ عقربه دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که: الف) عقربه روی یک عدد اول بایستد.
ب) عقربه یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.
پ) عقربه روی یک عدد مضرب ۳ بایستد.

۶ از جعبه‌ای که شامل ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به‌طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:
الف) هر سه سیب سالم باشند.
ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.
پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

۷ هریک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به‌طور تصادفی یک کارت را برمی‌داریم؛ مطلوب است تعیین:
الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی
ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.
پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد.
ت) پیشامدهای $A - B$ و $A \cap B$ را با اعضا مشخص کنید.



۸ مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است.

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟

پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

۹ با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (بامعنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

۱۰ برای توصیف داده های کمی باید هر دو شاخص و گزارش شود.

۱۱ اندازه گیری نمونه و اندازه جامعه را تعریف کنید.

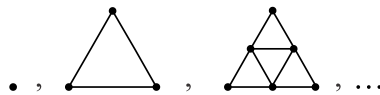
۱۲ جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه ای
۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...			×
۴, ۱, ۴, ۱, ...		×	
$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$	×	×	
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$	×		×

۱۳

جملات دنباله بازگشتی $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$, $a_1 = 1$ کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می کنند؟

الف)



ب)



۱۴ شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت های زیر بنویسید.

الف) $a_1 = 11$

ب) $a_1 = 25$

۱۵ اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله:

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

پاسخنامه تشریحی

۱ اگر از شهر B به شهر C، راه و از شهر A به شهر E، y راه داشته باشیم:

 تعداد مسیرها: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ یا $A \rightarrow E \rightarrow D$

$$\Rightarrow 20 = 2 \times x \times 2 + y \times 4$$

$$\Rightarrow 20 = 4x + 4y \rightarrow \boxed{\Delta = x + y}$$

برای مقدار x و y حالت‌های زیر ممکن است:

$$x + y = \Delta \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 4 \checkmark \\ x = 2 \rightarrow y = 3 \checkmark \\ x = 3 \rightarrow y = 2 \checkmark \\ x = 4 \rightarrow y = 1 \checkmark \\ x = 5 \rightarrow y = 0 \times \end{cases}$$

۲

الف) ۳ نقطه از بین ۱۲ نقطه انتخاب می‌کنیم:

$$C(12, 3) = \frac{12!}{3! \times 9!} = \frac{\cancel{12} \times \cancel{11} \times 10}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 220$$

ب) ۲ نقطه از بین ۱۲ نقطه انتخاب می‌کنیم:

$$C(12, 2) = \frac{12 \times 11}{2} = 66$$

۳

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times \cancel{9} \times \cancel{8}}{\cancel{3} \times \cancel{2}} = 120$$

الف) A پیشامد اینکه حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

$$n(A) = \underbrace{\binom{5}{2} \times \binom{5}{1}}_{\text{دو نفر موافق و یک نفر غیر موافق}} + \underbrace{\binom{5}{3} \times \binom{5}{0}}_{\text{هر سه موافق}}$$

$$= 10 \times 5 + 10 \times 1 = 60 \Rightarrow P(A) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

ب) B پیشامد اینکه نظر هیچ دو نفری از آن‌ها مانند هم نباشد.

$$n(B) = \underbrace{\binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1}}_{\text{یک موافق، یک مخالف و یک منتفع}}$$

$$= 5 \times 4 \times 3 = 60 \Rightarrow P(B) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

۴

$$\begin{array}{l} \text{نشان‌دار} \\ + \text{بدون نشانه} \\ \hline \text{قوچ } 20 \end{array} \Rightarrow n(S) = \binom{20}{7} = \frac{20 \times 19 \times \cancel{18} \times 17 \times \cancel{16} \times \cancel{15} \times 14}{\cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 77520$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{5}{2} \times \binom{15}{5}}_{\substack{\text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار}}} + \underbrace{\binom{5}{1} \times \binom{15}{6}}_{\substack{\text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار}}} + \underbrace{\binom{5}{0} \times \binom{15}{7}}_{\substack{\text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار} \\ \text{نشان‌دار}}}$$

$$= 10 \times 3003 + 5 \times 5005 + 1 \times 6435 = 61490$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{61490}{77520} = \frac{6149}{7752}$$

۵

$$S = \{1, 2, \dots, 8\} \Rightarrow n(S) = 8$$

الف) A پیشامد اینکه عقربه روی یک عدد اول بایستد.

$$\text{الف) } A = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow \text{احتمال مطلوب: } P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ب) B پیشامد اینکه یک عدد اول یا فرد نشان دهد.



ب) $B = \{1, 2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow$ احتمال مطلوب: $P(B) = \frac{5}{8}$

پ) C پیشامد اینکه عقربه روی یک عدد مضرب ۳ باشد.

پ) $C = \{3, 6\} \Rightarrow n(C) = 2 \Rightarrow$ احتمال مطلوب: $P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

۶

الف) A پیشامد اینکه هر سه سیب سالم باشد.

$$n(S) = \binom{17}{3} = \frac{17 \times 16 \times 15}{3 \times 2 \times 1} = 680$$

$$n(A) = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{220}{680} = \frac{11}{34}$$

هر سه سالم

ب) B پیشامد اینکه دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشد.

$$n(B) = \binom{12}{2} \times \binom{5}{1} = \frac{12 \times 11}{2} \times 5 = 330 \Rightarrow P(B) = \frac{330}{680} = \frac{33}{68}$$

دو سالم یک لکه‌دار

پ) C پیشامد اینکه تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیش‌تر باشد.

$$n(C) = C_2^{12} \times C_1^5 + C_3^{12} \times C_0^5 = \binom{12}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{12}{3} \times \binom{5}{0}$$

$$= 66 \times 5 + 220 = 550 \Rightarrow P(C) = \frac{550}{680} = \frac{55}{68}$$

دو سالم یک لکه‌دار سه سالم

۷

الف) $S = \{1, 3, \dots, 19\}$

ب) $A = \{3, 9, 15\}$

پ) $B = \{1, 9\}$

ت) $A \cap B = \{9\}$ ، $A - B = \{3, 15\}$

۸ در بین مجموعه A ، ۴ رقم زوج داریم:

الف) $(2) \times (3) \times (4) \times (5) \times (4) = 480$

یکان دهگان صدگان هزارگان ده‌هزارگان

اولین رقم سمت چپ ۸ یا ۹ باشد:

ب) $(2) \times 5 \times 4 \times 3 \times (2) = 240$ (بدون تکرار ارقام)

(با تکرار ارقام) $(2) \times (6) \times (6) \times (6) \times (6) = 7776$

پ) $C(6, 3) = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$

ت) $C(5, 2) = C_2^5 = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

۹

تعداد حروف کلمه ولایت برابر ۵ (و - ل - ا - ی - ت) است؛ بنابراین:

الف) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ب) $\frac{3 \times 4 \times 1}{1} = 12$ (بدون تکرار)

(با تکرار) $5 \times 5 \times 1 = 25$

پ) $\frac{1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}{1} = 6$ (بدون تکرار)

(با تکرار) $\frac{1 \times 5 \times 5 \times 5 \times 1}{1} = 125$

۱۰ مرکزی - پراکنندگی

۱۱ تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه و تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه می‌نامند.

جملات دنباله	رابطه بازگشتی	ضابطه دنباله	دنباله دو ضابطه‌ای
۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...	$a_{n+1} = a_n + 3$ $a_1 = 5$	$a_n = 3n + 2$	×
۴, ۱, ۴, ۱, ...	$a_{n+1} = a_n + 3(-1)^n$ $a_1 = 4$	×	$a_n = \begin{cases} 4 & \text{فرد } n \\ 1 & \text{زوج } n \end{cases}$
$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots$	×	×	$a_n = \begin{cases} n & \text{فرد } n \\ \frac{1}{n} & \text{زوج } n \end{cases}$
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$	×	$a_n = \frac{n}{n+1}$	×

۱۳ جملات هریک از دنباله‌ها که برابر با رأس الگوهاست را می‌نویسیم:

الف) $a_1 = 1$ و $a_2 = 3$ و $a_3 = 6$

ب) $a_1 = 1$ و $a_2 = 4$ و $a_3 = 9$

حال جملات دنباله بازگشتی صورت سؤال را نوشته و با موارد الف و ب مقایسه می‌کنیم.

$a_{n+1} = a_n + (n + 1)$ و $a_1 = 1$

$a_2 = a_{1+1} = a_1 + (1 + 1) = 1 + (2) = 3$

$a_3 = a_{2+1} = a_2 + (2 + 1) = 3 + (3) = 6$

پس الگوی مورد نظر الگوی الف می‌باشد.

۱۴ الف

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$$

$a_1 = 11$

$\xrightarrow{n=1} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=1} a_2 = 3a_1 + 1 \xrightarrow{a_1=11} a_2 = 3(11) + 1 = 34$

$\xrightarrow{n=2} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{2}a_2 \xrightarrow{a_2=34} a_3 = \frac{1}{2}(34) = 17$

$\xrightarrow{n=3} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=3} a_4 = 3a_3 + 1 \xrightarrow{a_3=17} a_4 = 3(17) + 1 = 52$

$\xrightarrow{n=4} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=4} a_5 = \frac{1}{2}a_4 \xrightarrow{a_4=52} a_5 = \frac{1}{2}(52) = 26$

$\xrightarrow{n=5} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=5} a_6 = 3a_5 + 1 \xrightarrow{a_5=26} a_6 = 3(26) + 1 = 79$

ب)

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$$

$a_1 = 25$

$\xrightarrow{n=1} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=1} a_2 = 3a_1 + 1 \xrightarrow{a_1=25} a_2 = 3(25) + 1 = 76$

$\xrightarrow{n=2} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{2}a_2 \xrightarrow{a_2=76} a_3 = \frac{1}{2}(76) = 38$

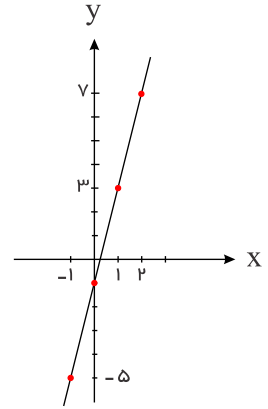
$\xrightarrow{n=3} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=3} a_4 = 3a_3 + 1 \xrightarrow{a_3=38} a_4 = 3(38) + 1 = 115$

$\xrightarrow{n=4} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \xrightarrow{n=4} a_5 = \frac{1}{2}a_4 \xrightarrow{a_4=115} a_5 = \frac{1}{2}(115) = \frac{115}{2}$

$\xrightarrow{n=5} a_{n+1} = 3a_n + 1 \xrightarrow{n=5} a_6 = 3a_5 + 1 \xrightarrow{a_5=\frac{115}{2}} a_6 = 3\left(\frac{115}{2}\right) + 1 = \frac{347}{2}$

۱۵ الف) برای رسم نمودار تابع که دامنه‌اش \mathbb{R} است، داریم:

$$y = 4x - 1 \quad \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & -5 & -1 & 3 \end{array}$$



با در نظر گرفتن آن که دامنه دنباله \mathbb{N} است، تنها نقاط قرمز رنگ نمودار دنباله است.
 (ب) رابطه بازگشتی از مقایسه دو جمله متوالی حاصل می‌شود:

$$f(0) = -1 \quad , \quad f(1) = 3$$

$$f(1) - f(0) = 3 - (-1) = 4$$

$$a_{n+1} = a_n + 4 \quad \text{نمایش بازگشتی} \quad , \quad a_n = 4n - 1 \quad \text{نمایش تابعی دنباله}$$

شیب خط عددی است که با افزودن آن به جمله قبلی، جمله بعدی پدید می‌آید.