بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

حسابان (۱)

پایه یازدهم ریاضی و فیزیک

فصل ۳

تهیه و تنظیم : مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2

Majid.ghaderi.mathclass.2

فصل ۳
درس ۲

تابع لگاریتمی و لگاریتم

اهداف

- ❑ درک مفهوم لگاریتم
- ❑ آشنایی با تابع لگاریتمی، نمودار و ضابطهٔ آن
- ❑ آشنایی با ارتباط بین توابع نمایی و لگاریتمی
- ❑ یافتن مقدار تقریبی لگاریتم یک عدد با استفاده از نمودار
- ❑ آشنایی با ویژگی های تابع لگاریتمی و تعیین دامنه و برد آنها
- ❑ رسم توابع حاصل از انتقال تابع لگاریتمی

اندازه گیری ها در بسیاری از علوم مختلف، شامل طیف وسیعی از اعداد می شوند. برای سادگی محاسبات، می توان آنها را توان هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت.
با این کار می توان اندازه های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچکتری نشان داد یا اندازه های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد.

کاربرد این ساده سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست شناسی، زمین شناسی، جمعیت شناسی، مهندسی و... مشهود است.

ابداع لگاریتم یکی از مهم ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است.

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی دربارهٔ لگاریتم گفته است:
«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می کند و از خطاهای کوچک می گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است.»

مثالی از یک تابع لگاریتمی

صفحه ۸۰ کتاب درسی

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری ها در هر ساعت دو برابر می شود. در درس اول دیدیم که اگر جرم باکتری ها را پس از t ساعت با $m(t)$ نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کنیم یعنی $m(۰)=۱$ ، جرم باکتری ها پس از t ساعت تابعی است نمایی با ضابطهٔ $m(t)=۲^t$

اینک می خواهیم بدانیم در چه زمانی وزن باکتری ها ۵۱۲ گرم است، یعنی $m(t)=۵۱۲$

می دانیم توابع نمایی یک به یک هستند، در نتیجه وارون پذیرند. اگر $m(t)=p$ جرم باکتری پس از t ساعت را نشان دهد، آنگاه تابع وارون آن یعنی $m^{-۱}(p)=t$ زمان رسیدن توده باکتری به جرم p را نشان می دهد.

زمان t (ساعت)	$m(t)=p$ جرم باکتری پس از t ساعت
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲

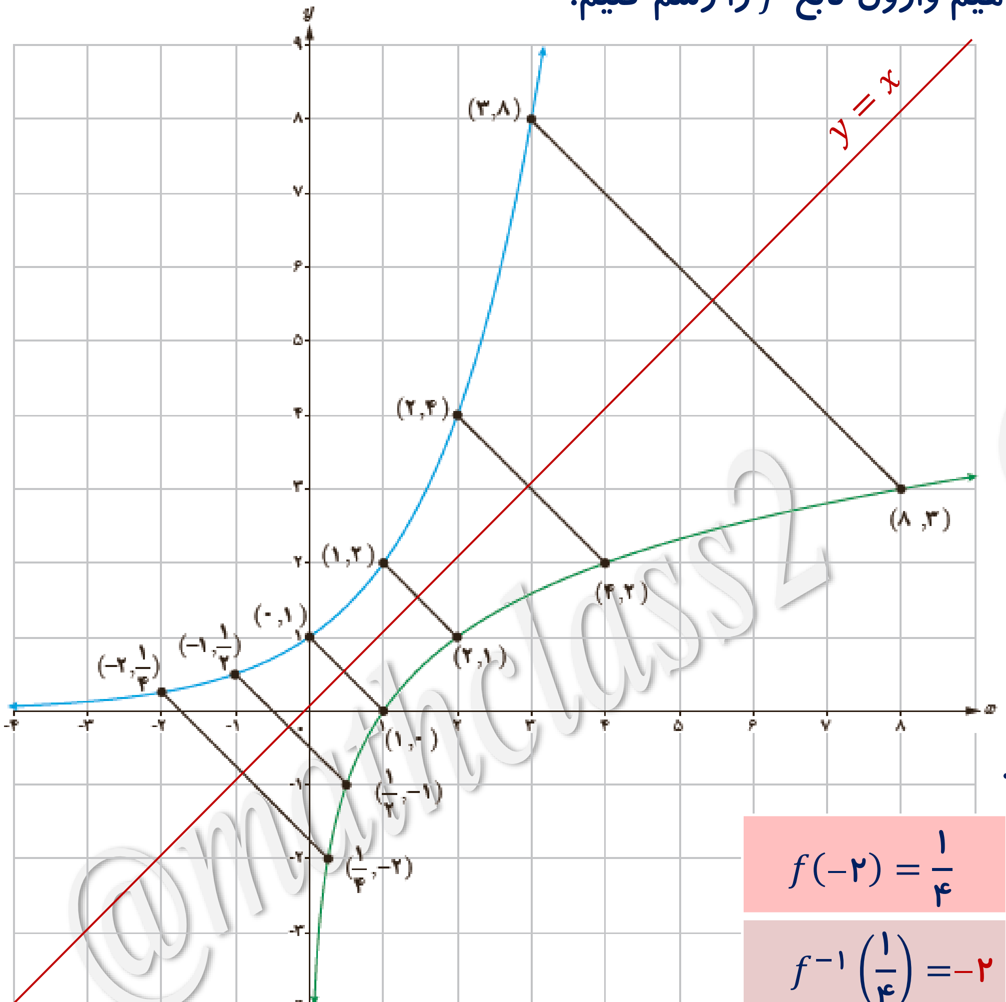
زمان t (ساعت)	$m^{-۱}(p)=t$ زمان رسیدن به جرم p
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲

پس برای پاسخ دادن به سوال فوق به وارون تابع $m(t)=۲^t$ نیاز داریم.

صفحه ۸۰ کتاب درسی

در درس قبل با نمودار تابع نمایی $f(x) = ۲^x$ آشنا شدیم و یک به یک بودن آن برایمان ثابت شد.

می دانیم هر تابع یک به یک وارون پذیر است. حال می خواهیم وارون تابع f را رسم کنیم.



یادآوری

برای رسم وارون یک تابع، قرینهٔ آن را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات) رسم می کردیم.

۱) دامنهٔ و برد توابع f و $f^{-۱}$ را با توجه به نمودار آنها به دست آورید.

دامنهٔ تابع f برابر با $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{R}^+$ است.

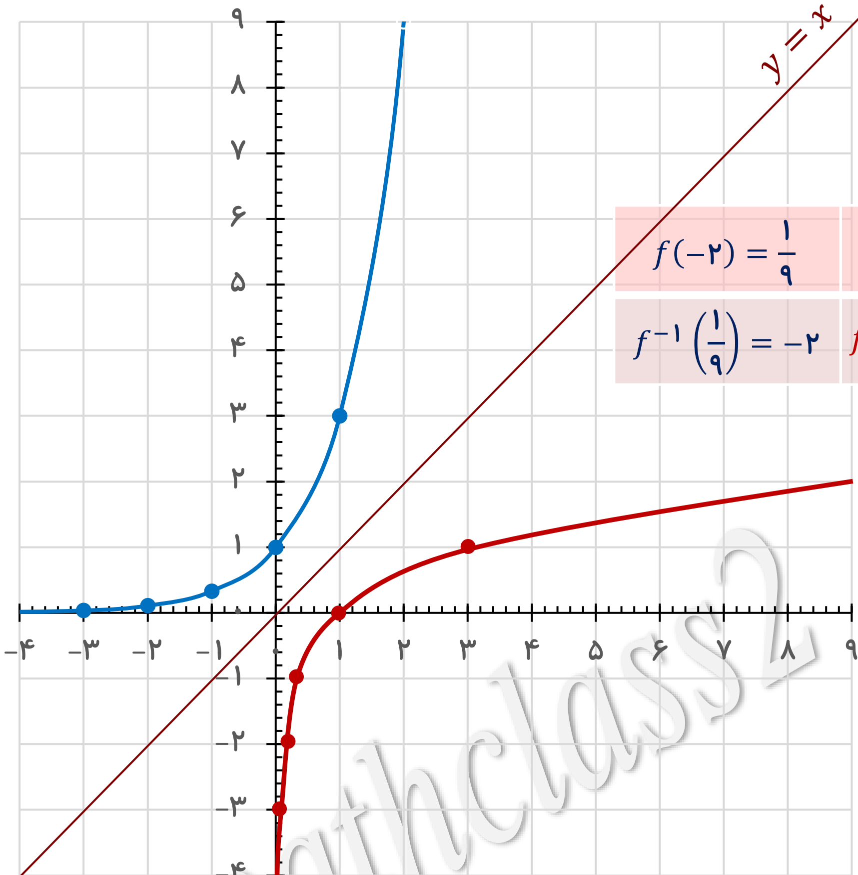
دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ برابر با $\mathbb{R}^+$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.

۲) با توجه به نمودار توابع f و $f^{-۱}$ جدول زیر را کامل کنید.

$f(۲) = ۴$	$f(۰) = ۱$	$f(-۱) = \frac{۱}{۲}$	$f(-۲) = \frac{۱}{۴}$
$f^{-۱}(۴) = ۲$	$f^{-۱}(۱) = ۰$	$f^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right) = -۱$	$f^{-۱}\left(\frac{۱}{۴}\right) = -۲$

فعالیت صفحه ۸۱ کتاب درسی

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.



۱) با توجه به نمودار تابع f ، نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم کنید.

با توجه به نمودار توابع f و $f^{-۱}$ جدول زیر را کامل کنید.

$f(۲) = ۹$	$f\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۵/۱$	$f(۱) = ۳$	$f(۰) = ۱$	$f(-۱) = \frac{۱}{۳}$	$f(-۲) = \frac{۱}{۹}$
$f^{-۱}(۹) = ۲$	$f^{-۱}(۵/۱) = \frac{۳}{۲}$	$f^{-۱}(۳) = ۱$	$f^{-۱}(۱) = ۰$	$f^{-۱}\left(\frac{۱}{۳}\right) = -۱$	$f^{-۱}\left(\frac{۱}{۹}\right) = -۲$

۲) درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

- نقطهٔ $\left(-۲ , \frac{۱}{۹}\right)$ روی نمودار f قرار دارد. درست
- نقطهٔ $\left(-۱ , \frac{۱}{۳}\right)$ روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد. نادرست
- نقطهٔ $(۱ , ۰)$ روی نمودار f قرار دارد. نادرست
- نقطهٔ $\left(\frac{۱}{۹} , -۲\right)$ روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد. درست
- تابع $f^{-۱}$ یک به یک است. درست

وارون تابع نمایی $f(x) = ۳^x$ را به صورت $f^{-۱}(x) = \log_۳ x$ نشان می دهیم و آن را لگاریتمِ x در مبنای ۳ می خوانیم.

به عبارت دیگر، تابع نمایی ۳^x و تابع لگاریتمی $\log_۳ x$ وارون یکدیگرند.

صفحه ۸۱ کتاب درسی

تابع لگاریتم x در مبنای a

وارون تابع نمایی $f(x)=a^x$ را به صورت $f^{-1}(x)=\log_a x$ نشان می دهیم و آن را لگاریتمِ x در مبنای a می خوانیم.

به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت مانند a به شرطی که $a\neq 1$ ، داریم:

$$f(x)=a^x \iff f^{-1}(x)=\log_a x$$

توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

مثال:

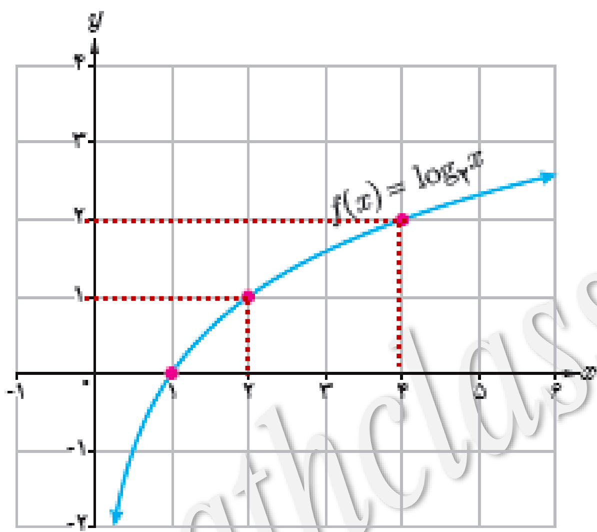
$$f(x)=5^x \iff f^{-1}(x)=\log_5 x$$

$$g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x \iff g^{-1}(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$$

صفحه ۸۱ کتاب درسی

تعیین مقدار لگاریتم اعداد حقیقی نظیر x در مبنای a از روی نمودار

با توجه به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_{۲} x$ می توان دید:



الف) $f(۱)=\log_{۲} ۱=۰$

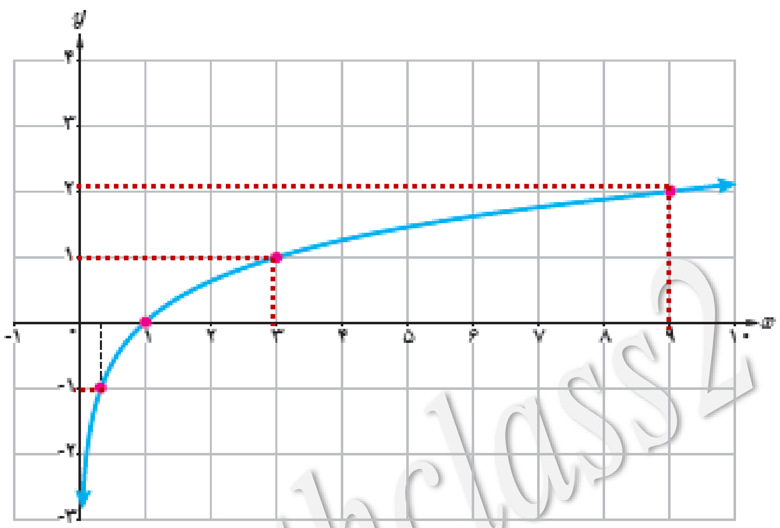
ب) $f(۲)=\log_{۲} ۲=۱$

پ) $f(۴)=\log_{۲} ۴=۲$

صفحه ۸۲ کتاب درسی

تعیین مقدار لگاریتم اعداد حقیقی نظیر x در مبنای a از روی نمودار

با توجه به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_{۳} x$ می توان دید:



الف) $f(۱)=\log_{۳} ۱ = ۰$

ب) $f(۳)=\log_{۳} ۳ = ۱$

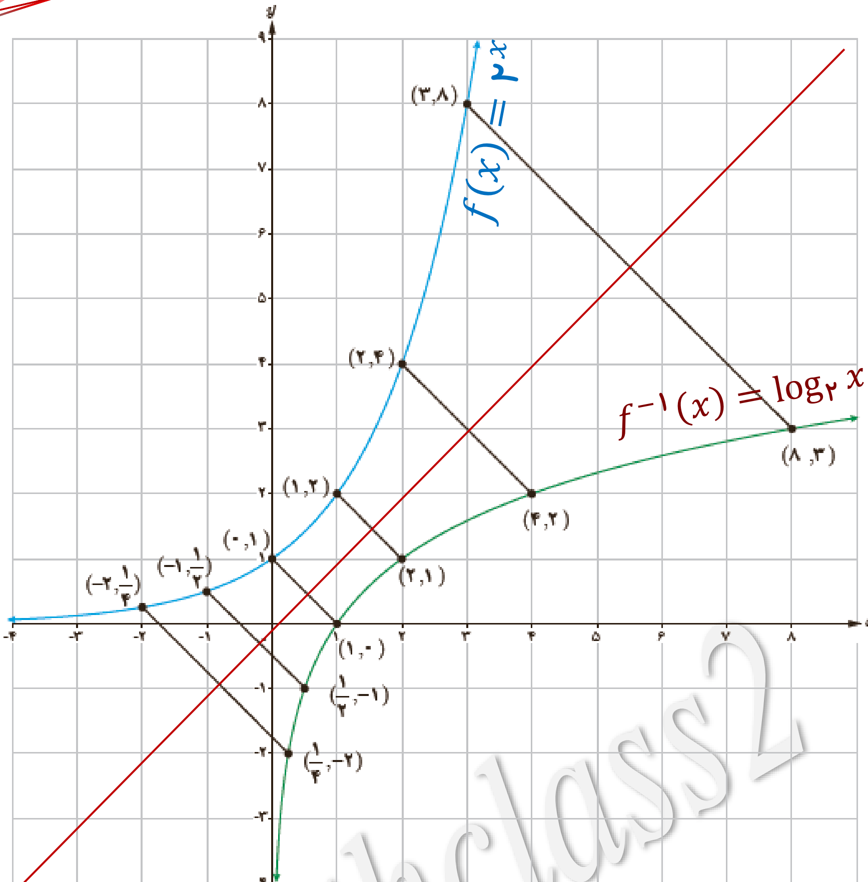
پ) $f\left(\frac{۱}{۳}\right)=\log_{۳} \frac{۱}{۳} = -۱$

ت) $f(۹)=\log_{۳} ۹ = ۲$

محاسبهٔ لگاریتم یک عدد

نمودار تابع $f(x)=۲^x$ و $f^{-۱}(x)=\log_۲ x$ را در نظر بگیرید.

با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.



نمایی	$۲^{۰}=۱$	$۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$	$۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}$
لگاریتمی	$\log_۲ ۱=۰$	$\log_۲ \frac{۱}{۲}=-۱$	$\log_۲ \frac{۱}{۴}=-۲$

نمایی	$۲^{۳}=۸$	$۲^{۲}=۴$	$۲^{۱}=۲$
لگاریتمی	$\log_۲ ۸=۳$	$\log_۲ ۴=۲$	$\log_۲ ۲=۱$

صفحه ۸۲ کتاب درسی

نتیجه

به طور کلی برای هر عدد حقیقی مثبت مانند a به شرطی که $a\neq ۱$ ، و همچنین برای هر $c>۰$ داریم:

$$a^b=c \iff \log_a c=b$$

مثال : $۲^{۳}=۸ \iff \log_۲ ۸=۳$

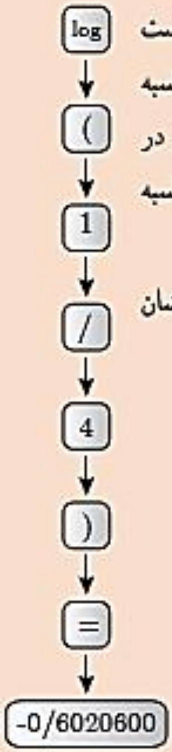
مثال صفحه ۸۲ کتاب درسی

فرض کنید $f(x)=\log_{۱۰} x$ ، مقدار تابع را در هر یک از نقاط زیر در صورت وجود حساب کنید. مقادیر خواسته شده را با ماشین حساب محاسبه و با پاسخ خود مقایسه کنید.

الف) $x=۱۰$ ب) $x=۱۰۰$

پ) $x=-۲$ ت) $x=۱۰۰۰$

برای محاسبه لگاریتم در ماشین‌حساب کافی است از دگمه log استفاده کنیم. مثلاً برای محاسبه $\log_{۱۰} ۱۰$ ابتدا دگمه log سپس عدد ۱۰ و در نهایت دگمه = را می‌زنیم. همچنین برای محاسبه $\log_{۱۰} \frac{۱}{۴}$ به‌صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم: و ماشین‌حساب مقدار آن‌را به‌صورت زیر نشان می‌دهد.



$$a^b=c \iff \log_a c=b$$

الف) $۱۰^{۱}=۱۰ \iff \log_{۱۰} ۱۰=۱$

ب) $۱۰^{۲}=۱۰۰ \iff \log_{۱۰} ۱۰۰=۲$

پ) $\log_{۱۰} -۲$ موجود نیست

لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی شود.

ت) $۱۰^{۳}=۱۰۰۰ \iff \log_{۱۰} ۱۰۰۰=۳$

مثال ۱ صفحه ۸۳ کتاب درسی

با توجه به تعریف لگاریتم، جدول زیر را داریم:

$۳^۴=۸۱$	$۲^{۱۰}=۱۰۲۴$	$۵^۳=۱۲۵$	$۶^۲=۳۶$	$۲^۵=۳۲$
$\log_۳ ۸۱=۴$	$\log_۲ ۱۰۲۴=۱۰$	$\log_۵ ۱۲۵=۳$	$\log_۶ ۳۶=۲$	$\log_۲ ۳۲=۵$

مثال ۲ صفحه ۸۳ کتاب درسی

تساوی های زیر را به صورت توانی بیان کنید.

الف) $\log_۷ ۱ = ۰ \quad \Leftrightarrow \quad ۷^۰ = ۱$

ب) $\log_۳ \frac{۱}{۲۷} = -۳ \quad \Leftrightarrow \quad ۳^{-۳} = \frac{۱}{۲۷}$

مثال ۳ صفحه ۸۳ کتاب درسی

مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $\log_۲ ۳۲ = ۵ \quad \Leftrightarrow \quad ۲^۵ = ۳۲$

ب) $\log_۶ ۶ = ۱ \quad \Leftrightarrow \quad ۶^۱ = ۶$

پ) $\log_۴ ۱ = ۰ \quad \Leftrightarrow \quad ۴^۰ = ۱$

تمرین تکمیلی

سوال ۱ : جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$\log_{۸} ۱ = ۰ \Leftrightarrow ۸^{۰} = ۱$	$۱۰^{۳} = ۱۰۰۰ \Leftrightarrow \log_{۱۰} ۱۰۰۰ = ۳$
$\log_{۲} \frac{۱}{۱۶} = -۴ \Leftrightarrow ۲^{-۴} = \frac{۱}{۱۶}$	$۹^{\frac{۱}{۲}} = ۳ \Leftrightarrow \log_{۹} ۳ = \frac{۱}{۲}$
$\log_{۵} ۱۲۵ = ۳ \Leftrightarrow ۵^{۳} = ۱۲۵$	$۴^{۳} = ۶۴ \Leftrightarrow \log_{۴} ۶۴ = ۳$
$\log_{\frac{۱}{۳}} ۲۷ = -۳ \Leftrightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۳} = ۲۷$	$۲^{۵} = ۳۲ \Leftrightarrow \log_{۲} ۳۲ = ۵$
$\log_{\frac{۱}{۵}} ۱۲۵ = -۳ \Leftrightarrow \left(\frac{۱}{۵}\right)^{-۳} = ۱۲۵$	$۲^{-۳} = \frac{۱}{۸} \Leftrightarrow \log_{۲} \frac{۱}{۸} = -۳$
$\log_{\frac{۱}{۲}} ۱۶ = -۴ \Leftrightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۴} = ۱۶$	$۳^{-۴} = \frac{۱}{۸۱} \Leftrightarrow \log_{۳} \frac{۱}{۸۱} = -۴$

دقت کنید: لگاریتم اعداد منفی تعریف نشده است. به عنوان مثال؛ مقدار عبارت های زیر تعریف نشده است.

$\log_{۳}(-۳)^{۳}$ $\log_{\frac{۱}{۲}} -۱۶$ $\log_{۲} \frac{-۱}{۱۶}$ $\log_{۵} -۱۲۵$

تمرین تکمیلی

سوال ۲ : مقدار $\log_{۲} ۲۵$ بین کدام اعداد صحیح قرار دارد؟

در اینجا مبنا برابر با ۲ است.

$$\log_{۲} ۲۵ = x \rightarrow ۲^x = ۲۵$$

پس می بایست دو عدد بیابیم که بر پایه ۲ تجزیه شوند و ۲۵ بین آن دو واقع باشد. آن دو عدد ۱۶ و ۳۲ هستند.

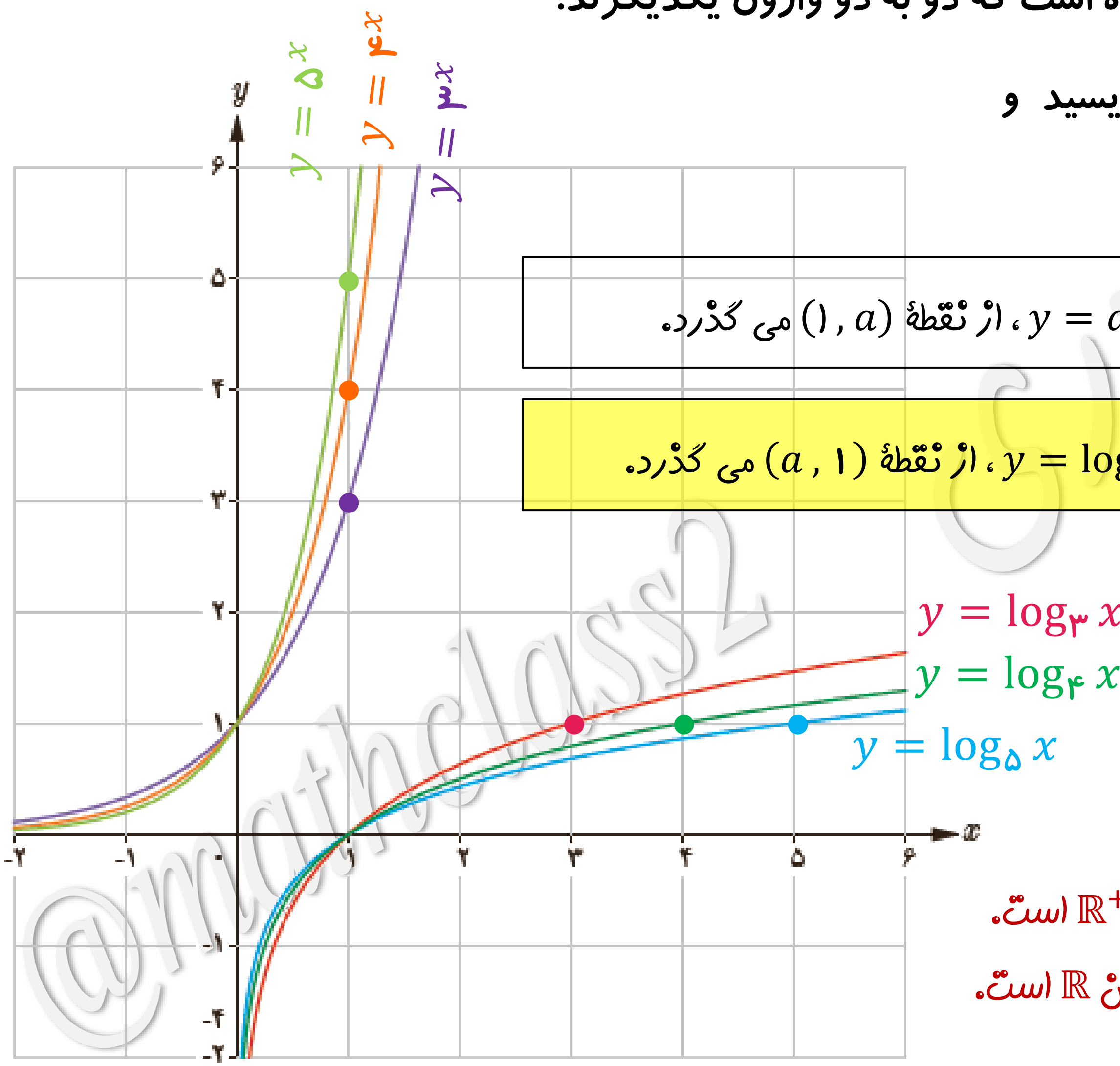
$$۱۶ < ۲۵ < ۳۲ \rightarrow \log_{۲} ۱۶ < \log_{۲} ۲۵ < \log_{۲} ۳۲ \rightarrow ۴ < \log_{۲} ۲۵ < ۵$$

در شکل مقابل، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند.

ضابطهٔ آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و

دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.

یادآوری	نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a^x$، از نقطهٔ $(۱ , a)$ می گذرد.
نتیجه	نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$، از نقطهٔ $(a , ۱)$ می گذرد.



دامنهٔ توابع نمایی برابر با $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{R}^+$ است.

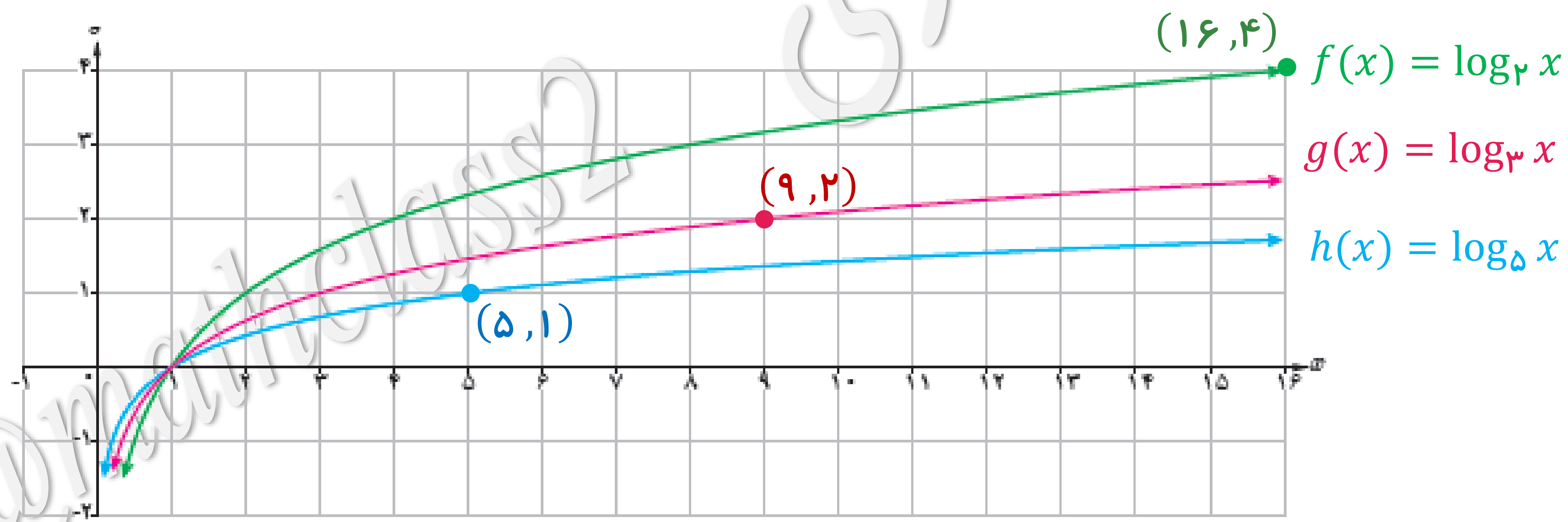
دامنهٔ توابع لگاریتمی برابر با $\mathbb{R}^+$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.

کار در کلاس صفحه ۸۳ کتاب درسی

الف) نمودار سه تابع $f(x)=\log_{۲} x$، $g(x)=\log_{۳} x$ و $h(x)=\log_{۵} x$ در شکل زیر رسم شده اند. ضابطهٔ هر یک را روی نمودار آن بنویسید.

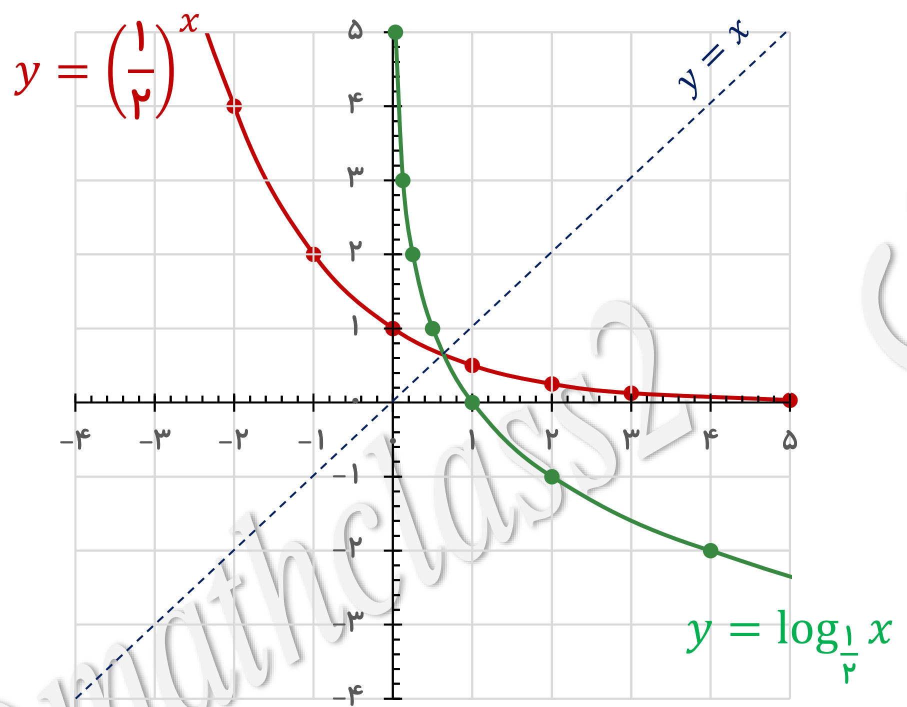
نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_a x$، از نقطهٔ $(a\,,۱)$ می گذرد.

ب) محل دقیق هریک از نقاط $(۱۶\,,۴)$ ، $(۹\,,۲)$ و $(۵\,,۱)$ را روی نمودار متناظرش نشان دهید.



کار در کلاس ۱ صفحه ۸۴ کتاب درسی

با توجه به نمودار $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ ، نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.



نسبت به خط $y=x$ قرینه اند.

به عبارتی دیگر وارون یکدیگرند.

تمرین تکمیلی

رسم تابع لگاریتم با کمک گرفتن از وارون آن و نقطه یابی کردن

سوال ۳ : نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x) = \log_{۳} x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

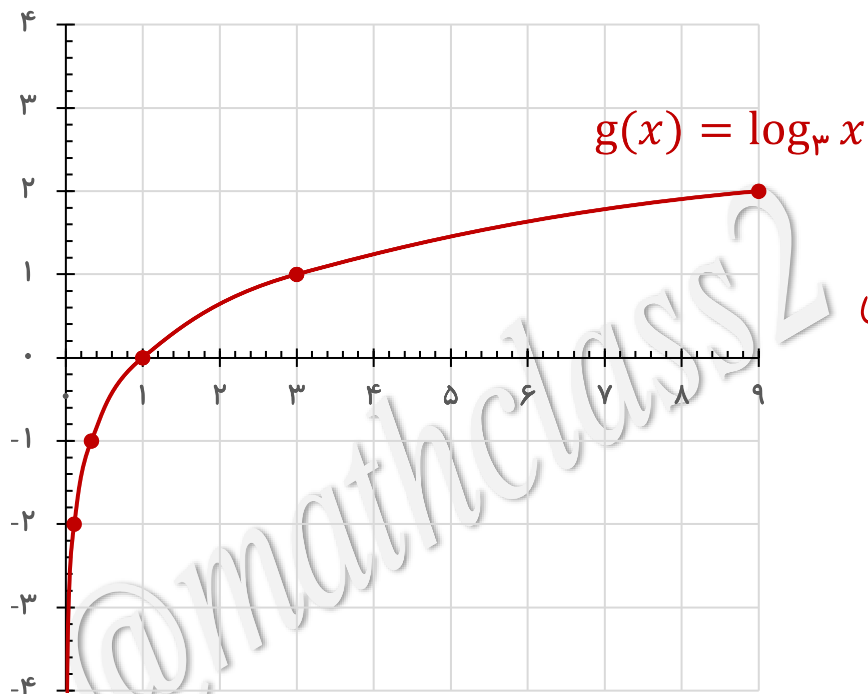
وارون تابع $g(x)$ را نوشته و جدول مقادیر را برای آن تشکیل می دهیم.

$$g(x) = \log_{۳} x \iff g^{-۱}(x) = ۳^x$$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
۳^x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹

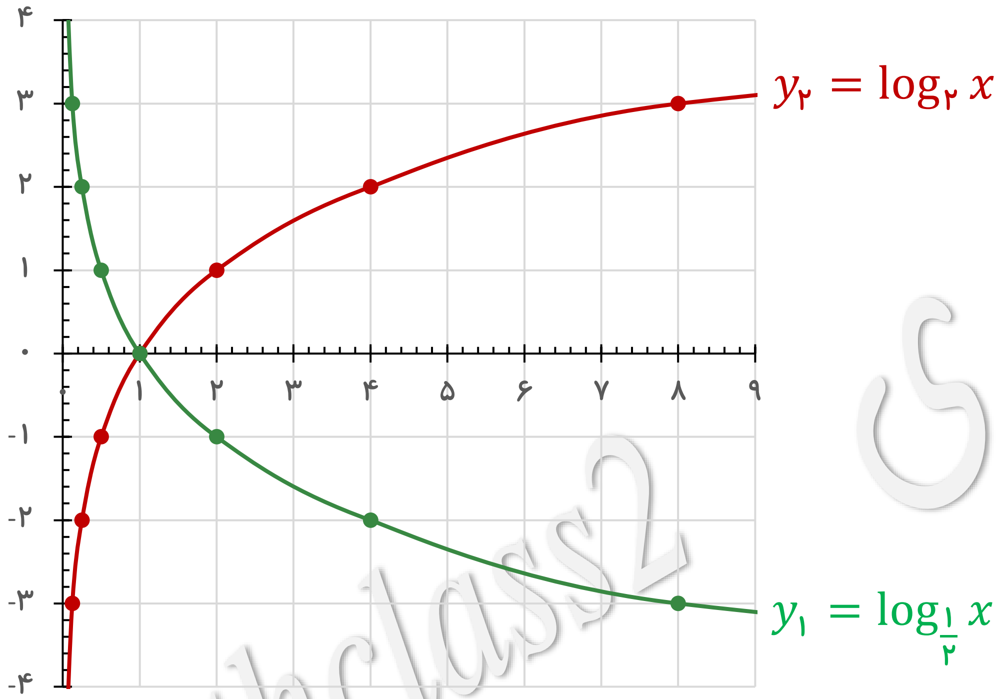
حال کافی است مولفه های سطر اول و دوم جدول قبل را جا به جا کنیم تا مختصات نقاط تابع $g(x)$ به دست آید.

x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
$\log_{۳} x$	-۲	-۱	۰	۱	۲



تمرین تکمیلی

سوال ۴ : نمودار توابع با ضابطه های $y_1 = \log_{\frac{1}{2}} x$ و $y_2 = \log_2 x$ رسم شده است. با مطالعهٔ آنها به چه نتیجه ای می رسید؟

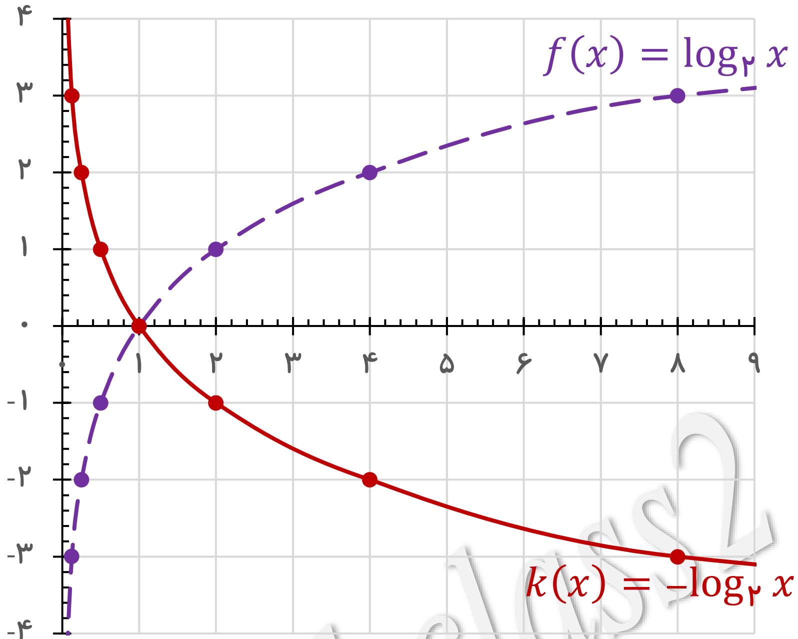


نمودار توابع با ضابطه های $y = \log_a x$ و $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ نسبت به محور xها قرینه اند.

(a همواره مثبت و مخالف یک است)

تمرین تکمیلی

سوال ۵ : نمودار تابع $k(x) = -\log_۲ x$ را رسم کنید و با نمودار $y = \log_{\frac{۱}{۲}} x$ مقایسه کنید.



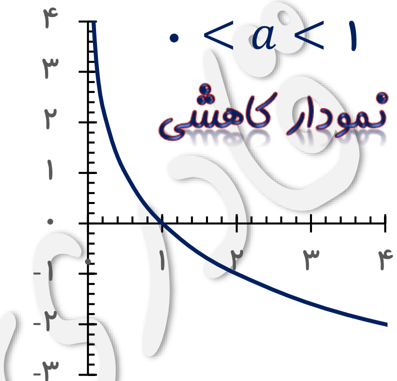
برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع لگاریتمی $f(x) = \log_۲ x$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

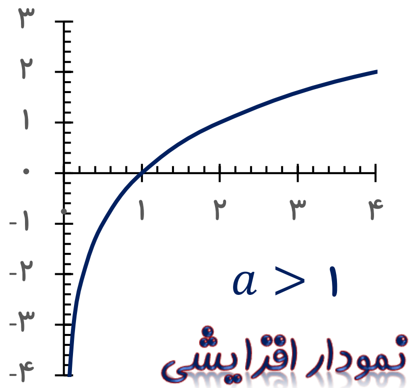
x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
$\log_۲ x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$-\log_۲ x$	۲	۱	۰	-۱	-۲

نمودار توابع $y = -\log_a x$ و $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ یکسان هستند.
(a همواره مثبت و مخالف یک است)

جمع بندی (ویژگی تابع لگاریتمی)

نمودار تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ در حالت کلی (نه انتقال یافتهٔ آن)؛ یکی از دو حالت زیر است:



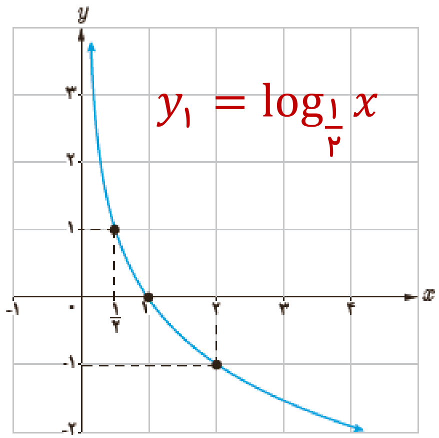


- ✓ دامنهٔ آنها بازهٔ $(۰, +\infty)$ و بردشان مجموعهٔ اعداد حقیقی است.
- ✓ این نمودارها محور xها را در نقطهٔ $(۱ , ۰)$ قطع می کنند.
- ✓ این نمودارها محور yها را در هیچ نقطه ای قطع نمی کنند.
- ✓ این نمودارها یک به یک هستند.
- ✓ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$، از نقاط $(a , ۱)$ و $\left(\frac{۱}{a}, -۱\right)$ می گذرد.

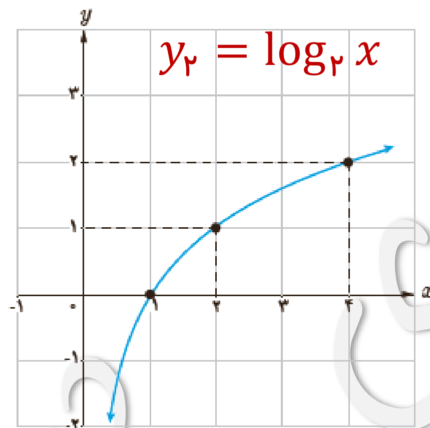
تمرین تکمیلی

سوال ۶ : نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.

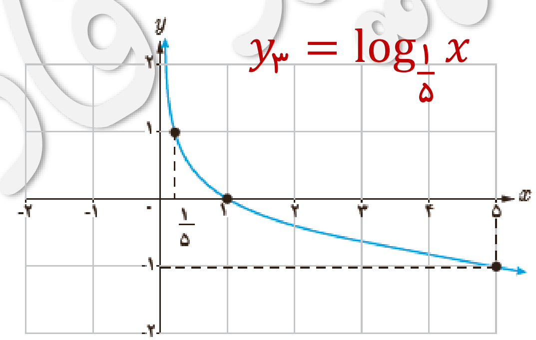
نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ ، از نقاط $(a , ۱)$ و $\left(\frac{۱}{a}, -۱\right)$ می گذرد.



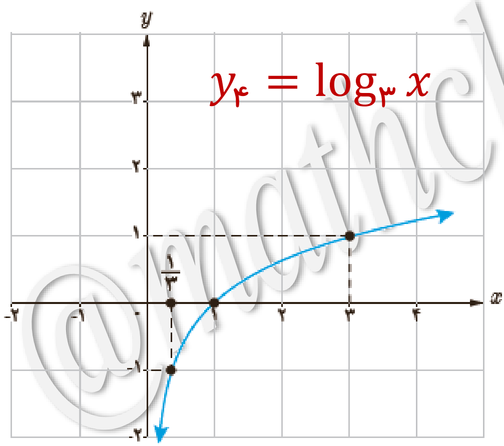
(۱)



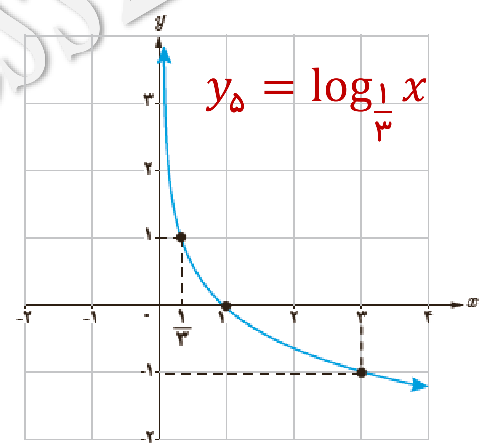
(۲)



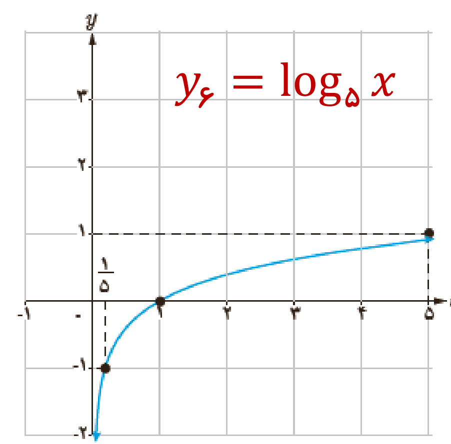
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

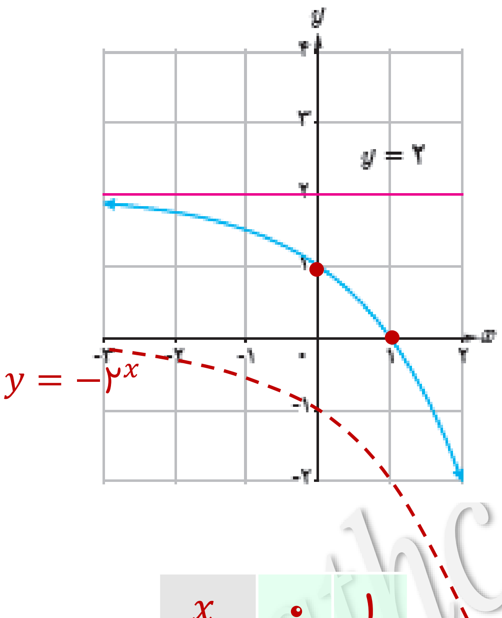
کار در کلاس ۲ صفحه ۸۴ کتاب درسی

مشخص کنید هریک از نمودارهای زیر به کدام یک از ضابطه های زیر تعلق دارد؟

الف) $y = -2^x + 2$

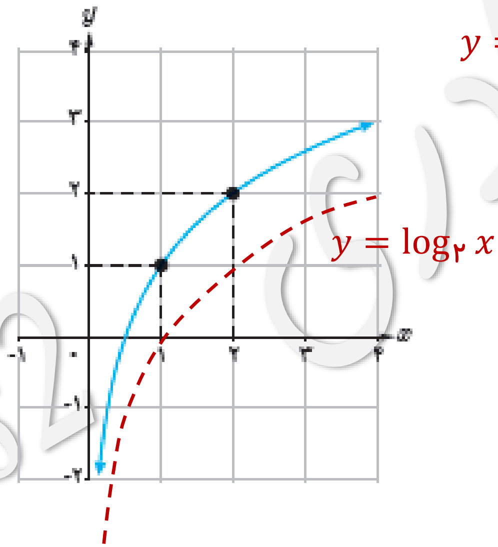
ب) $y = \log_2 x + 1$

پ) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$



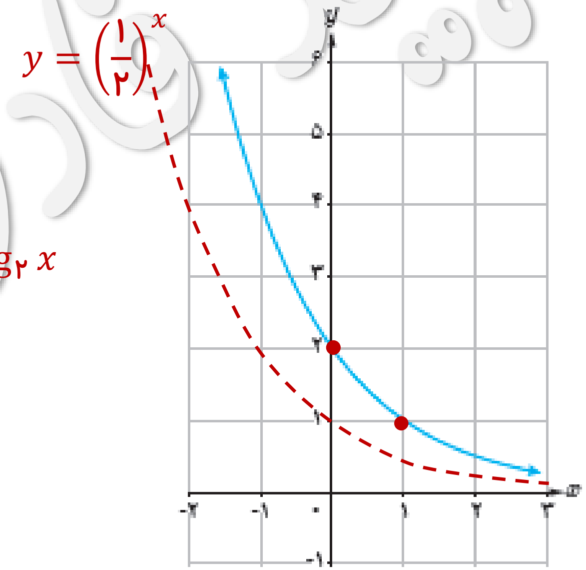
x	۰	۱
y	۱	۰

$y = 2^x$ نسبت به محور طول ها قرینه شده و ۲ واحد در جهت مثبت محور yها منتقل شده



x	۱	۲
y	۱	۲

$y = \log_2 x$ یک واحد در جهت مثبت محور yها منتقل شده



x	۰	۱
y	۲	۱

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ یک واحد در جهت مثبت محور xها منتقل شده

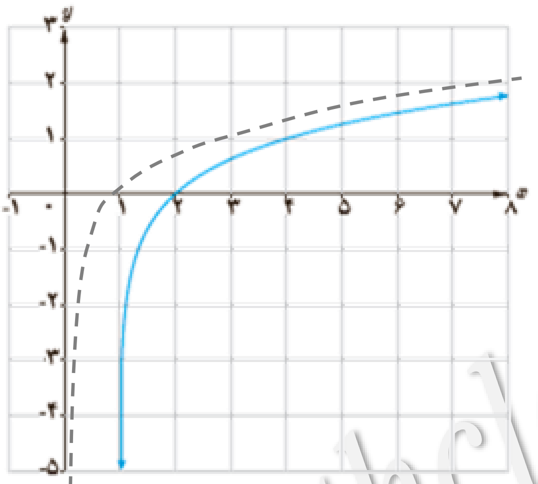
تمرین تکمیلی

سوال ۷ : نمودار های زیر انتقال یافتهٔ تابع $y = \log_{۳} x$ هستند. نشان دهید چرا هرکدام از نمودارها به ضابطهٔ بالایی خود تعلق دارند؟

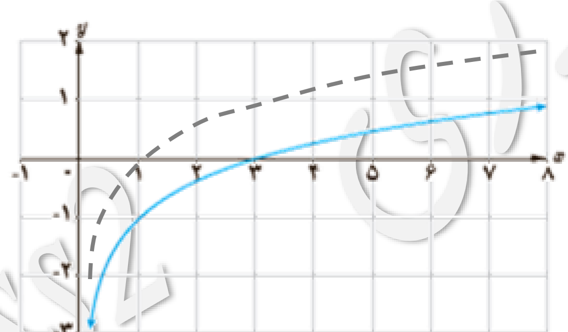
۱ $y = \log_{۳}(x - ۱)$

۲ $y = \log_{۳} x - ۱$

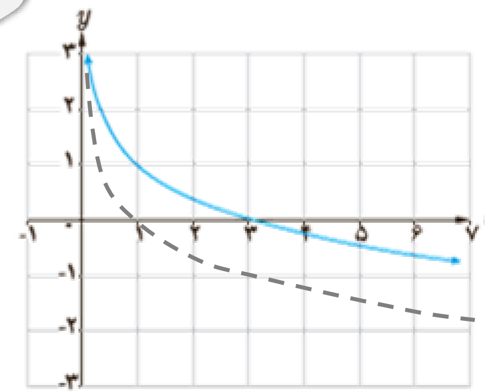
۳ $y = ۱ - \log_{۳} x$



$y = \log_{۳} x$ یک واحد در جهت مثبت محور xها منتقل شده و دامنهٔ آن xهای بزرگتر از یک است.



$y = \log_{۳} x$ یک واحد در جهت منفی محور yها منتقل شده است.



$y = \log_{۳} x$ قرینه شده و یک واحد در جهت مثبت محور yها منتقل شده است.

کار در کلاس ۳ صفحه ۸۴ کتاب درسی

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\log_{۳} ۸۱ =$

$$\log_{۳} ۸۱ = x \quad \Leftrightarrow \quad ۳^x = ۸۱ \quad \to \quad ۳^x = ۳^۴ \quad \to \quad x = ۴$$

ب) $\log_{\frac{۱}{۶}} \frac{۱}{۶} =$

$$\log_{\frac{۱}{۶}} \frac{۱}{۶} = x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{۱}{۶}\right)^x = \frac{۱}{۶} \quad \to \quad x = ۱$$

پ) $\log_{۲} ۸ =$

$$\log_{۲} ۸ = x \quad \Leftrightarrow \quad ۲^x = ۸ \quad \to \quad ۲^x = ۲^۳ \quad \to \quad x = ۳$$

تمرین ۱ صفحه ۸۵ کتاب درسی

با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت های زیر را بیابید.

الف) $\log_{۱۰} ۰/۰۱ =$

$$\log_{۱۰} ۰/۰۱ = x \quad \Leftrightarrow \quad ۱۰^{x} = ۰/۰۱ \quad \rightarrow \quad ۱۰^{x} = ۱۰^{-۲} \quad \rightarrow \quad x = -۲$$

ب) $\log_{۶} \frac{۱}{۶} =$

$$\log_{۶} \frac{۱}{۶} = x \quad \Leftrightarrow \quad ۶^{x} = \frac{۱}{۶} \quad \rightarrow \quad ۶^{x} = ۶^{-۱} \quad \rightarrow \quad x = -۱$$

پ) $\log_{۲} \sqrt{۲} =$

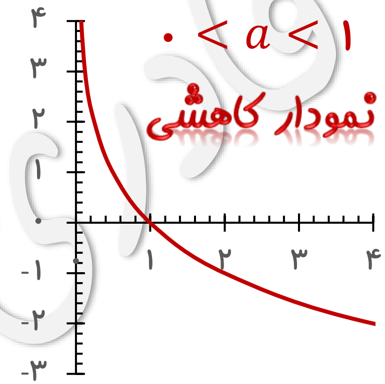
$$\log_{۲} \sqrt{۲} = x \quad \Leftrightarrow \quad ۲^{x} = \sqrt{۲} \quad \rightarrow \quad ۲^{x} = ۲^{\frac{۱}{۲}} \quad \rightarrow \quad x = \frac{۱}{۲}$$

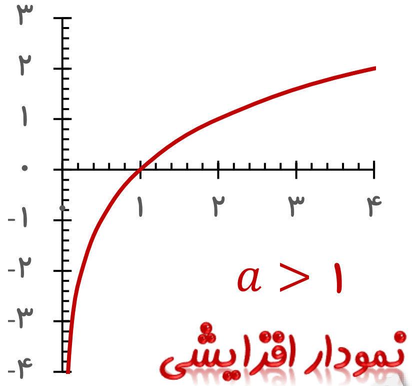
ت) $\log_{۷} \sqrt[۳]{۷^{۲}} =$

$$\log_{۷} \sqrt[۳]{۷^{۲}} = x \quad \Leftrightarrow \quad ۷^{x} = \sqrt[۳]{۷^{۲}} \quad \rightarrow \quad ۷^{x} = ۷^{\frac{۲}{۳}} \quad \rightarrow \quad x = \frac{۲}{۳}$$

تمرین ۲ صفحه ۸۵ کتاب درسی

نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a > ۱$ و $۰ < a < ۱$ باهم مقایسه کنید.





تمرین ۳ صفحه ۸۵ کتاب درسی

الف) خط $y = ۲۷$ نمودار تابع $y = ۳^x$ را در چه نقطه ای قطع می کند؟

$$۳^x = ۲۷ \quad \rightarrow \quad ۳^x = ۳^۳ \quad \rightarrow \quad x = ۳$$

ب) خط $y = ۱۰$ نمودار تابع $y = (۰/۰۱)^x$ را در چه نقطه ای قطع می کند؟

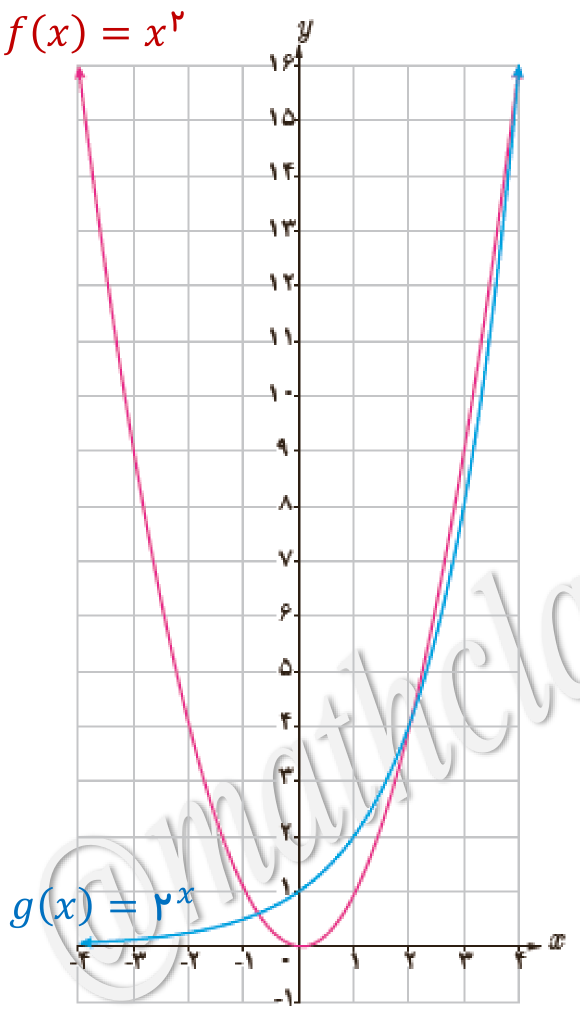
$$(۰/۰۱)^x = ۱۰ \quad \rightarrow \quad (۱۰^{-۲})^x = ۱۰ \quad \rightarrow \quad ۱۰^{-۲x} = ۱۰ \quad \rightarrow \quad -۲x = ۱$$

$$\rightarrow \quad x = -\frac{۱}{۲}$$

این سوال مربوط به درس یک (تابع نمایی) است و می بایست در تمرینات مربوط به آن مطرح شود.

تمرین ۴ صفحه ۸۵ کتاب درسی

نمودار دو تابع $f(x) = x^۲$ و $g(x) = ۲^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.



مقایسهٔ دو نمودار (یکی سهمی و دیگری نمایی)

در سهمی $y = x^۲$، متغیّر در پایه و عدد ثابت در توان است. در تابع نمایی $y = ۲^x$، متغیّر در توان و عدد ثابت در پایه است.

این سوال مربوط به درس یک است و در درسنامه درس ۱ مطرح و پاسخ داده شده است.

تمرین ۵ صفحه ۸۵ کتاب درسی

درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

- لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است. درست
- لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی شود. درست
- تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است. درست
- تابع لگاریتم محور yها را قطع می کند. نادرست
- اگر نقطهٔ $(b\ ,d)$ روی نمودار $y=a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه $(d\ ,b)$ روی نمودار $y=\log_a x$ قرار دارد.
  درست
- اگر $a>b>۰$ آنگاه $\log_{۱۰} a<\log_{۱۰} b$ نادرست

مبنا عددی مثبت و بزرگتر از یک است پس نمودار افزایشی است.

تمرین ۶ صفحه ۸۵ کتاب درسی

نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

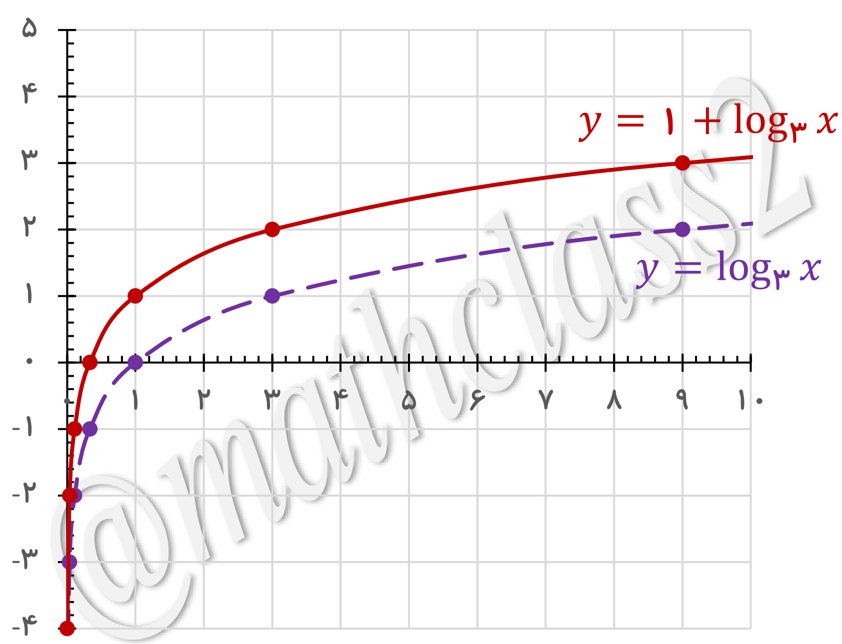
الف $y = ۱ + \log_۳ x$

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت مثبت محور yها به دست آورد.

انتقال یافتهٔ (عرضی) تابع $y = \log_۳ x$

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \log_۳ x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور yها انتقال دهیم.

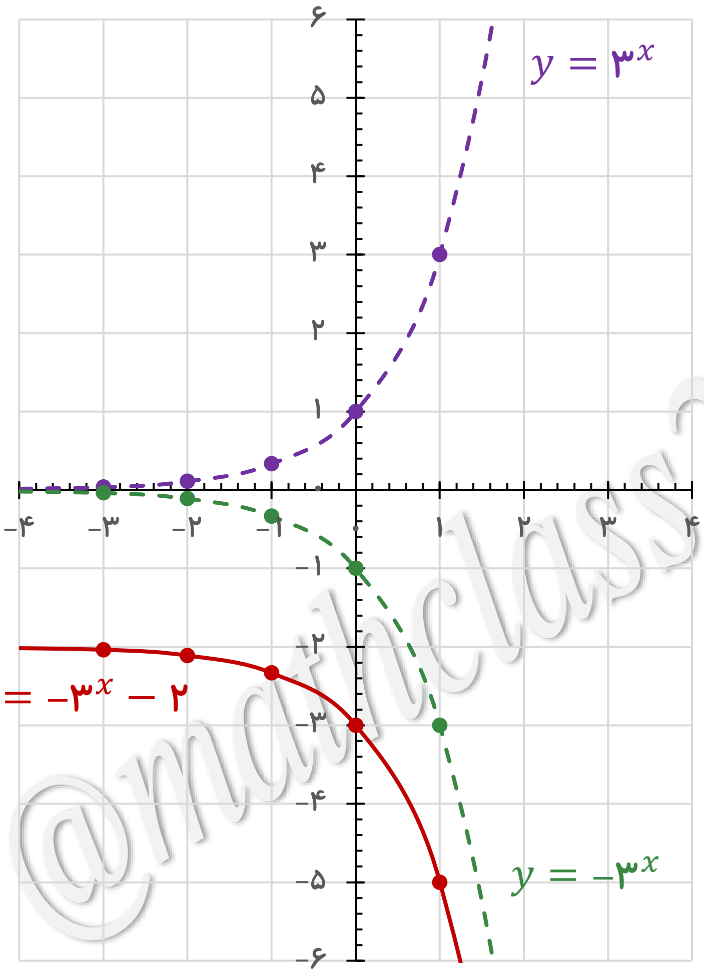
x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
$\log_۳ x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$۱ + \log_۳ x$	-۱	۰	۱	۲	۳



تمرین ۶ صفحه ۸۵ کتاب درسی

نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

ب) $y = -۳^x - ۲$



انتقال یافتهٔ (عرضی) تابع $y = -۳^x$

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = ۳^x$ را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم، سپس به اندازه ۲ واحد در جهت منفی محور yها انتقال دهیم.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
۳^x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
-۳^x	$\frac{-۱}{۹}$	$\frac{-۱}{۳}$	-۱	-۳	-۹
$-۳^x - ۲$	$\frac{-۱۹}{۹}$	$\frac{-۷}{۳}$	-۳	-۵	-۱۱

این سوال مربوط به درس یک (تابع نمایی) است و مشابه آن در درسنامه مربوطه کار شده است.

تمرین ۶ صفحه ۸۵ کتاب درسی

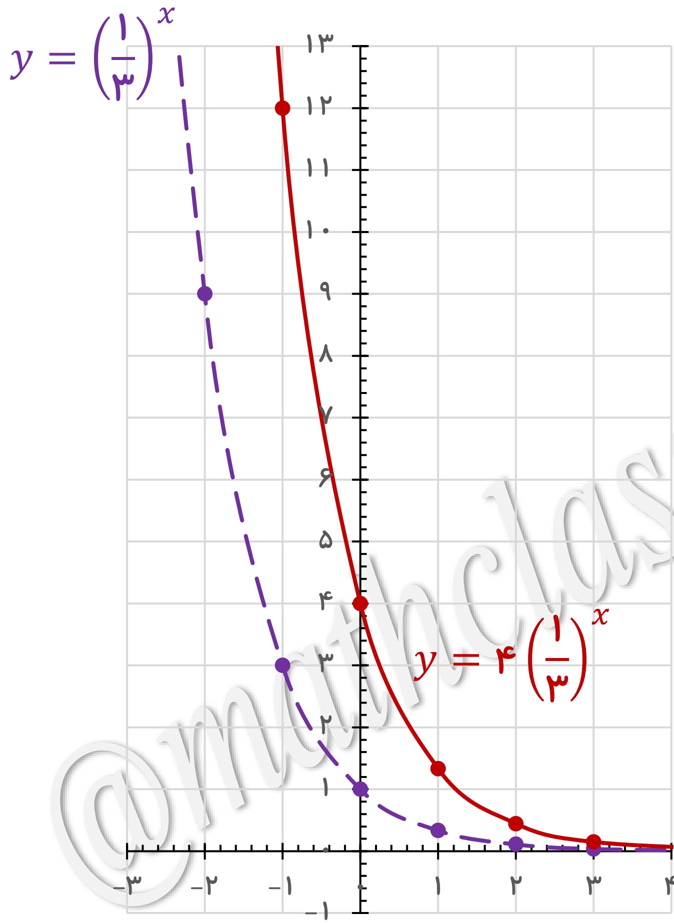
نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

پ) $y=۴\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $kf(x)$ را با k برابر کردن عرض نقاط $f(x)$ به دست آورد.

برای رسم این نمودار کافی است با حفظ طول نقاط تابع $y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ عرض آنها را ۴ برابر کنیم.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$	۹	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$
$۴\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$	۳۶	۱۲	۴	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۴}{۹}$



این سوال مربوط به درس یک (تابع نمایی) است و مشابه آن در درسنامه مربوطه کار شده است.

تمرین تکمیلی

سوال ۸ : اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_a x$ از نقطهٔ $(۲\,,\,۲)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.

$$۲=\log_a ۲ \rightarrow a^{۲}=۲ \rightarrow a=\sqrt{۲}$$

سوال ۹ : اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_a x$ از نقطهٔ $\left(\frac{۱}{۲}\,,\,-۴\right)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

$$-۴=\log_a \frac{۱}{۲} \rightarrow a^{-۴}=\frac{۱}{۲} \rightarrow \frac{۱}{a^{۴}}=\frac{۱}{۲} \rightarrow a^{۴}=۲ \rightarrow a=\sqrt[۴]{۲}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۰ : نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کنید.

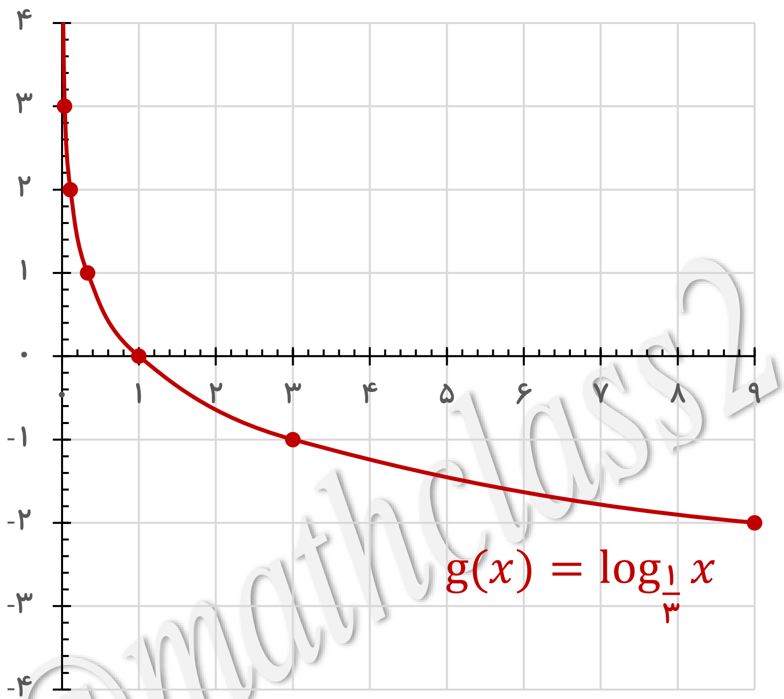
وارون تابع $g(x)$ را نوشته و جدول مقادیر را برای آن تشکیل می دهیم.

$$g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \iff g^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	۹	۳	۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

حال کافی است مولفه های سطر اول و دوم جدول قبل را جا به جا کنیم تا مختصات نقاط تابع $g(x)$ به دست آید.

x	۹	۳	۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
$\log_{\frac{1}{3}} x$	-۲	-۱	۰	۱	۲



تمرین تکمیلی

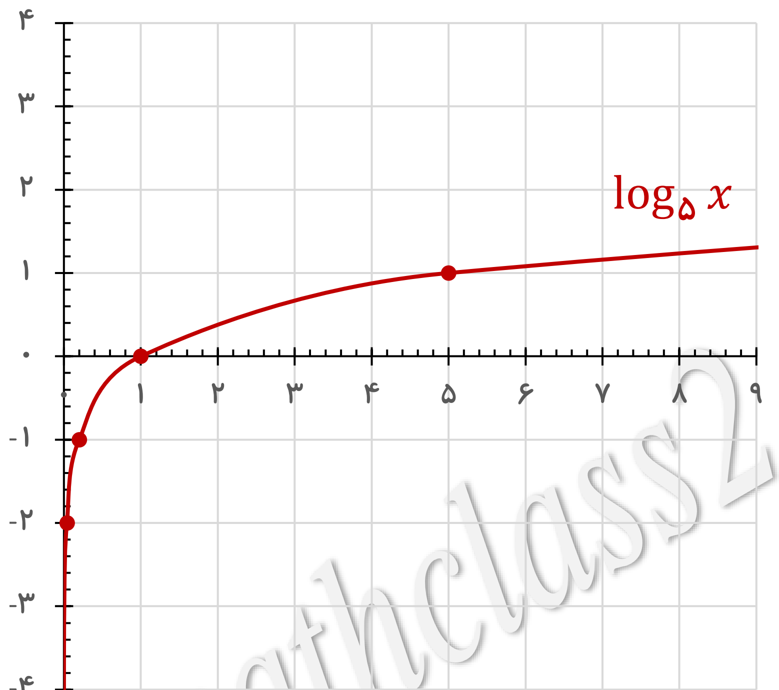
سوال ۱۱ : اگر $f(x) = ۵^x$ باشد، نمودار وارون آن را رسم کرده سپس مقدار $f^{-۱}\left(\frac{۱}{۱۲۵}\right)$ را به دست آورید.

$$f(x) = ۵^x \iff f^{-۱}(x) = \log_۵ x$$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
۵^x	$\frac{۱}{۲۵}$	$\frac{۱}{۵}$	۱	۵	۲۵

حال کافی است مولفه های سطر اول و دوم جدول قبل را جا به جا کنیم تا مختصات نقاط تابع $f(x)$ به دست آید.

x	$\frac{۱}{۲۵}$	$\frac{۱}{۵}$	۱	۵	۲۵
$\log_۵ x$	-۲	-۱	۰	۱	۲



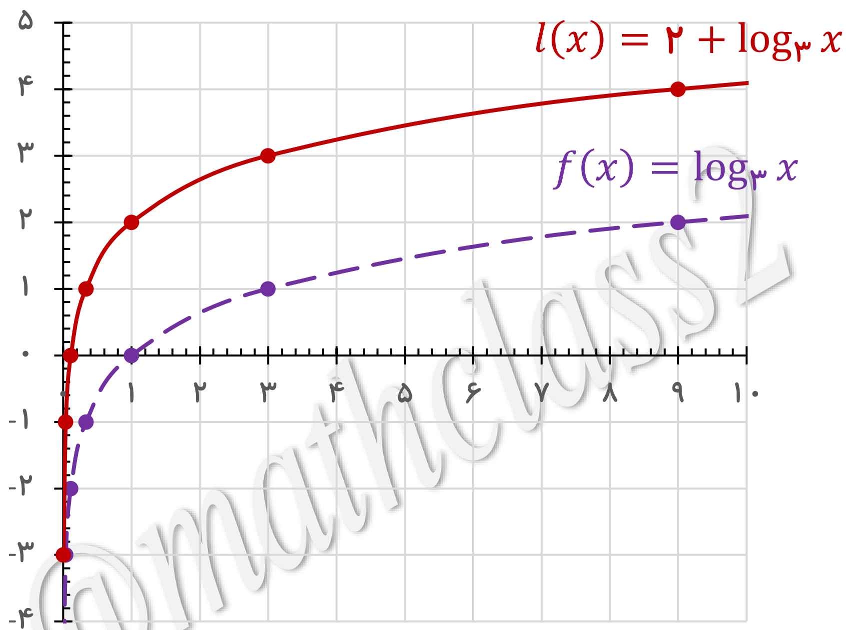
$$f^{-۱}\left(\frac{۱}{۱۲۵}\right) = \log_۵ \frac{۱}{۱۲۵} = \log_۵ ۵^{-۳} = -۳$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۲ : نمودار تابع $l(x) = ۲ + \log_۳ x$ را رسم کنید.

انتقال نمودار در راستای محور عرض ها

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $f(x) = \log_۳ x$ را به اندازه ۲ واحد در جهت مثبت محور yها انتقال دهیم.



x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
$\log_۳ x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$۲ + \log_۳ x$	۰	۱	۲	۳	۴

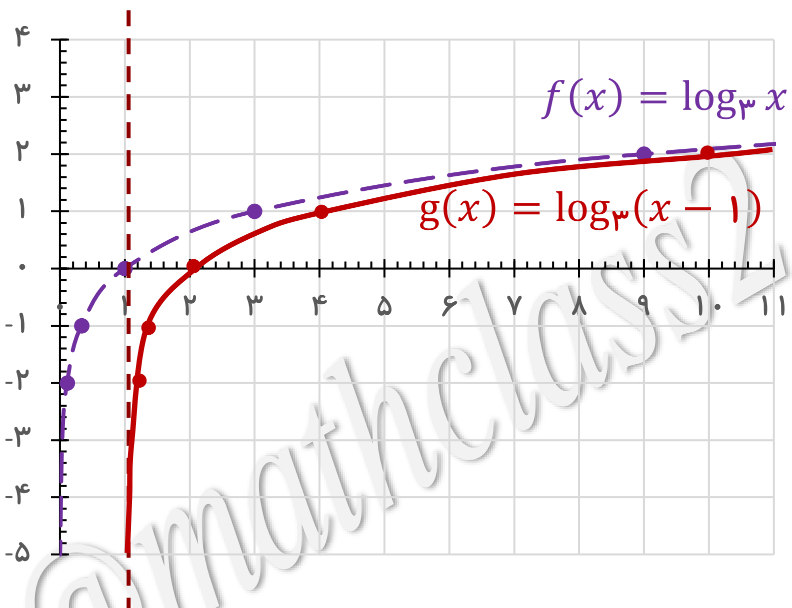
انتقال یافتهٔ (عرضی) تابع $y = \log_۳ x$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۳ : نمودار تابع $g(x) = \log_{۳}(x - ۱)$ را رسم کنید.

انتقال نمودار در راستای محور طول ها

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $f(x) = \log_{۳} x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور xها انتقال دهیم.



دقت کنید

دامنهٔ تابع $g(x) = \log_{۳}(x - ۱)$ برابر با xهای بزرگتر از یک است.

انتقال یافتهٔ (طولی) تابع $y = \log_{۳} x$

تشکیل جدول مقادیر در انتقال طولی؛ به نفع ما نیست.

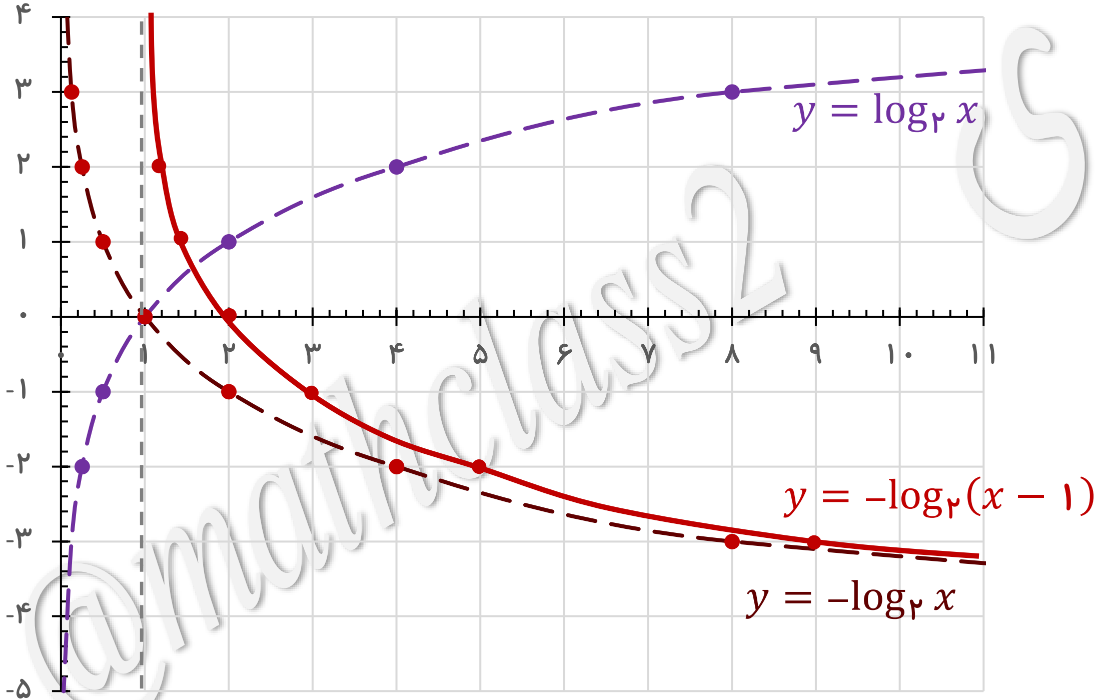
تمرین تکمیلی

سوال ۱۴ : نمودار تابع $y = -\log_۲(x - ۱)$ را رسم کنید.

دقت کنید

دامنهٔ این تابع برابر با xهای بزرگتر از یک است.

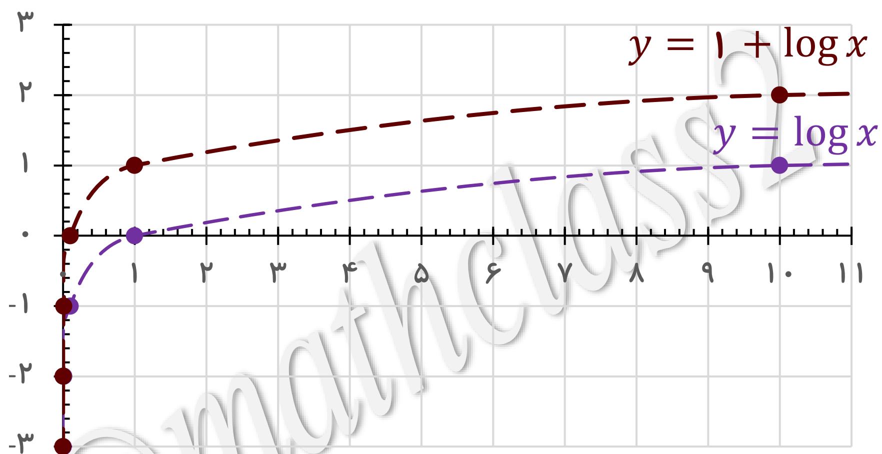
برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \log_۲ x$ را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم، سپس به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور xها انتقال دهیم.

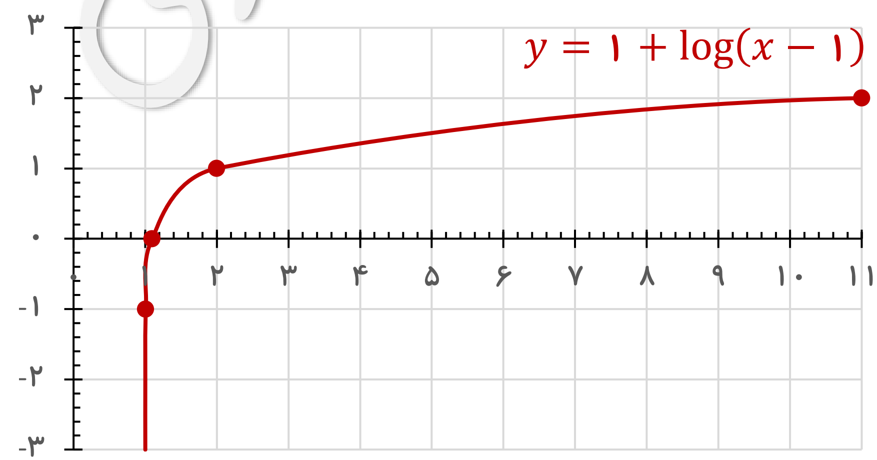


تمرین تکمیلی

سوال ۱۵ : نمودار تابع $y = ۱ + \log(x - ۱)$ را به کمک انتقال رسم کنید.

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \log x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور yها سپس یک واحد در جهت مثبت محور xها انتقال دهیم.





تمرین تکمیلی

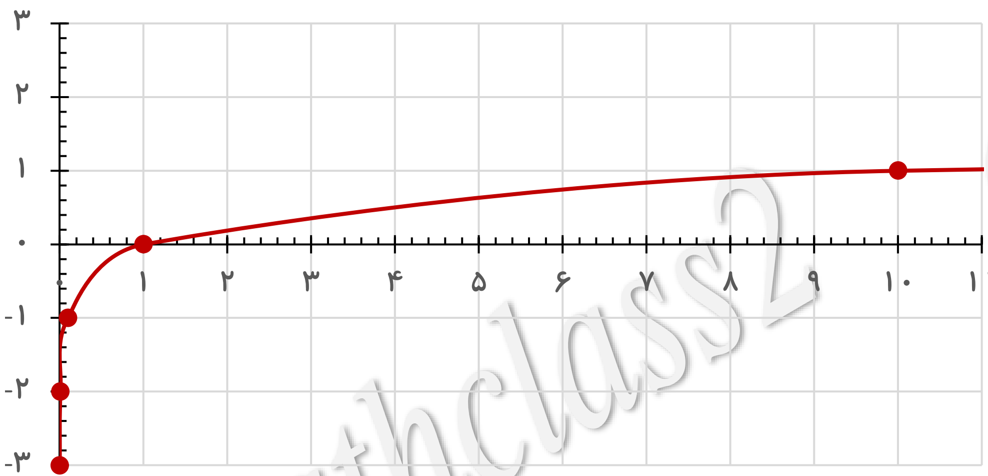
سوال ۱۶ : نمودار تابع با ضابطه زیر را رسم کنید.

$$y=\frac{|x|}{x}\log x \quad \rightarrow \quad y=\frac{x}{x}\log x \quad \rightarrow \quad y=\log x$$

دقت کنید

دامنهٔ این تابع برابر با xهای بزرگتر از صفر است.

x	$\frac{۱}{۱۰}$	۱	۱۰
$\log x$	-۱	۰	۱



پایان درس دوم