

به نام خدا

۲۴ / ۸ / ۹۹

حل تمرینها - فعالیتها و کار در کلاسهای

درس دوم از فصل دوم حسابان 1



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi

فصل دوم: تابع ۴۵

صفحه ۴۵

کار در کلاس

مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

(الف)

$$\begin{cases} g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

(ب)

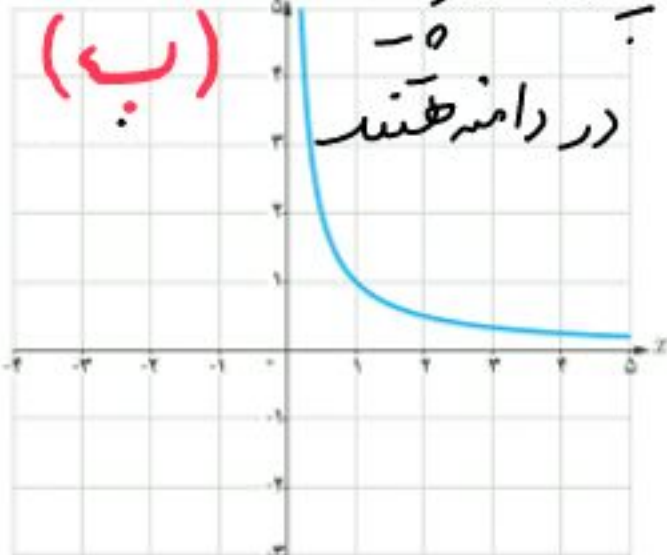
$$\begin{cases} h: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

(پ)

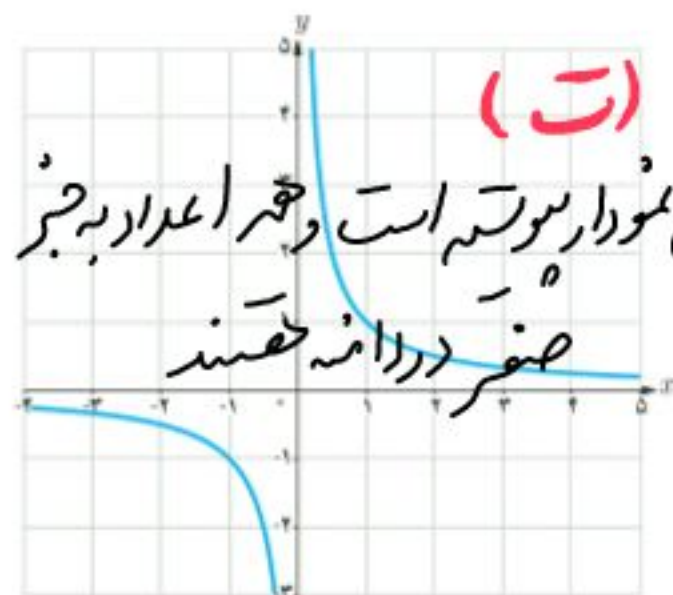
$$\begin{cases} t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

(ت)

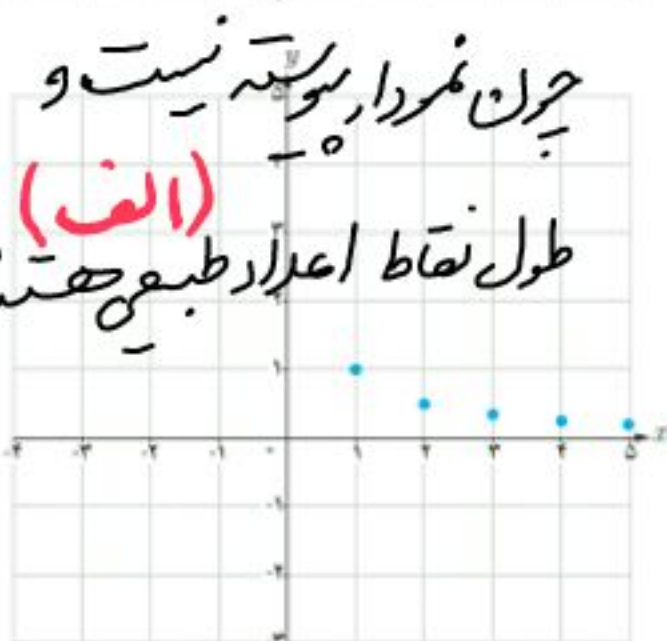
چون نمودار پیوسته است، هر اعداد مثبت



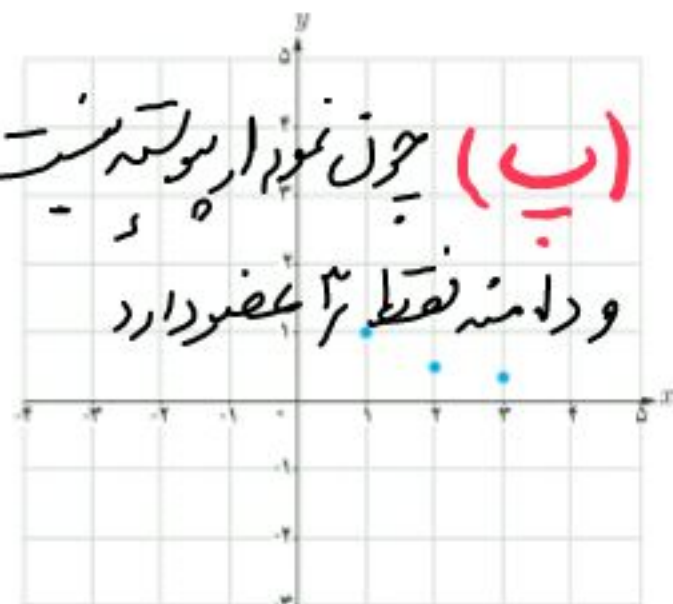
چون نمودار پیوسته است و همه اعداد به جز صفر در دامنه هستند



چون نمودار پیوسته نیست و طول نقاط اعداد طبیعی هستند



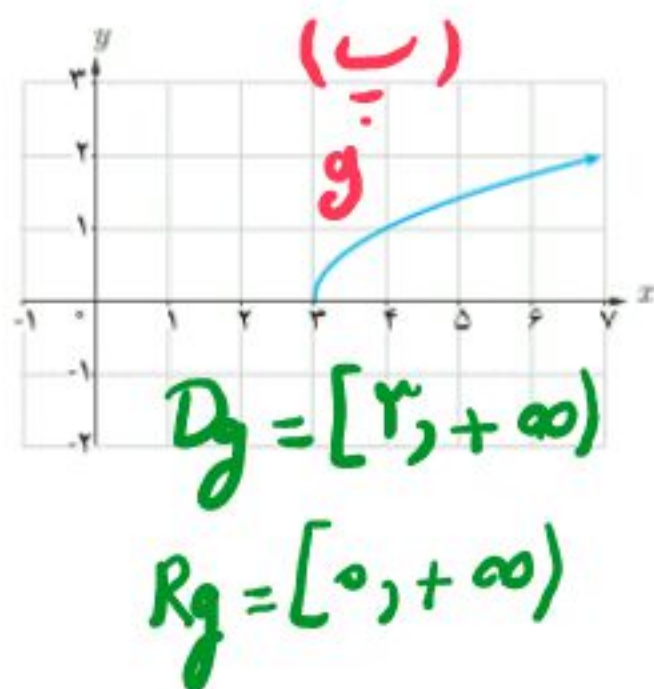
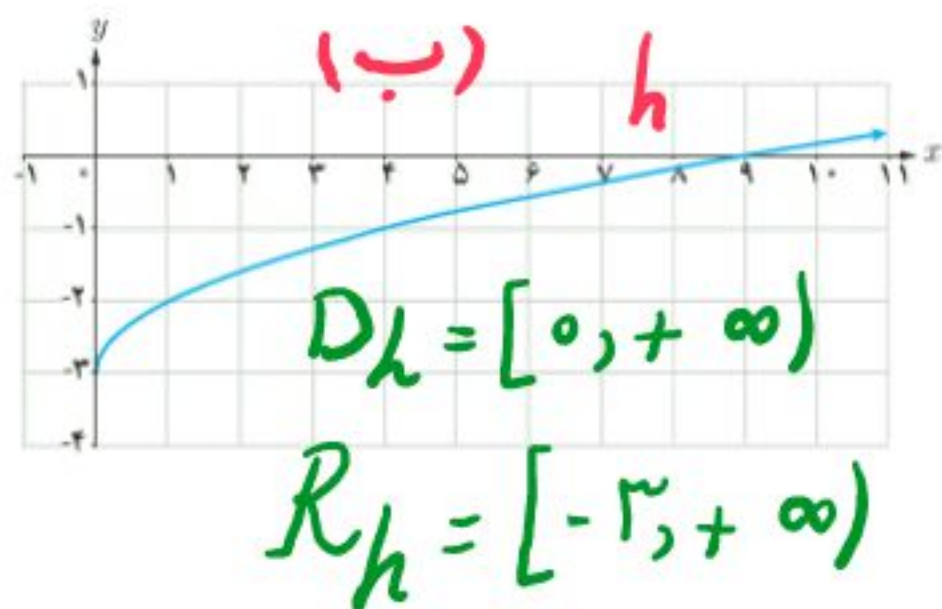
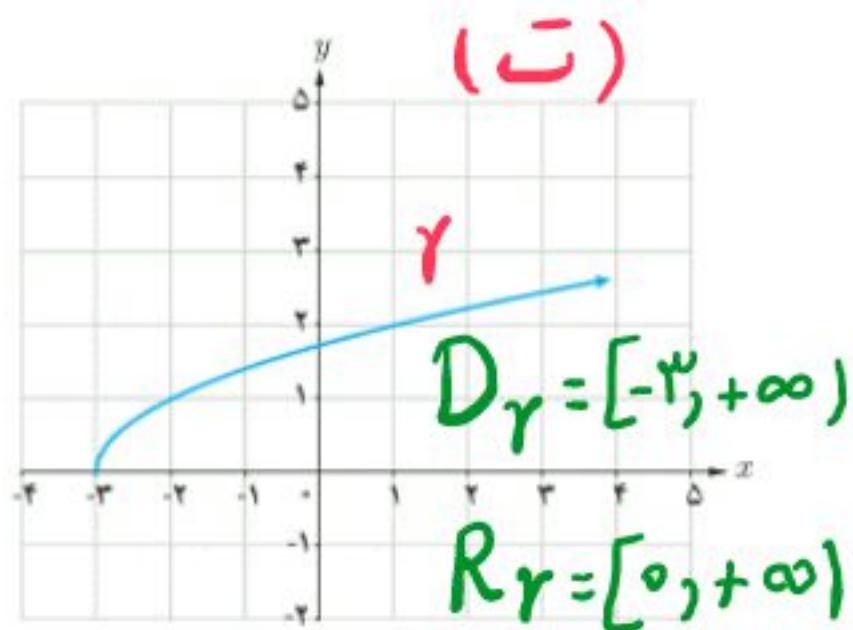
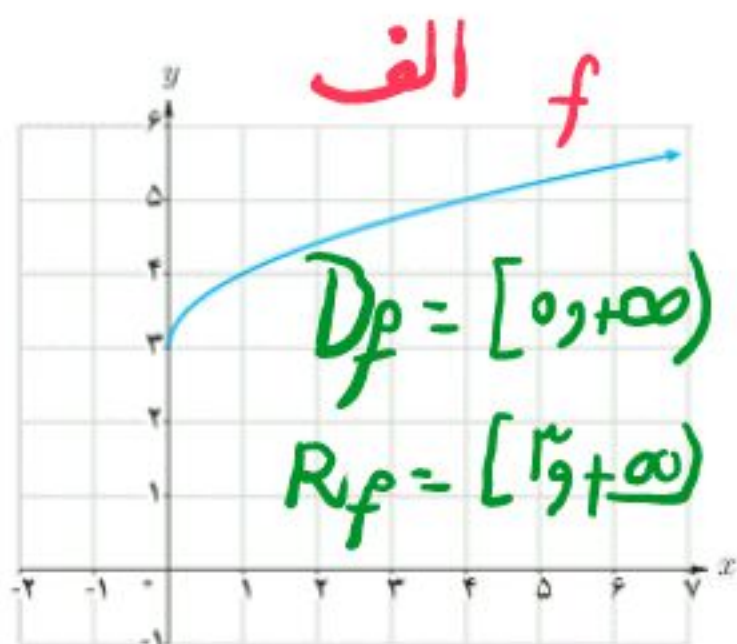
چون نمودار پیوسته نیست و دامنه فقط از اعداد دارد



به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نمودار چهار تابع:

الف) $f(x) = \sqrt{x} + 3$ ، ب) $h(x) = \sqrt{x} - 3$ ، پ) $g(x) = \sqrt{x - 3}$ ، ت) $r(x) = \sqrt{x + 3}$

رسم شده‌اند. تابع مربوط به هر نمودار را مشخص و دامنه و برد آن را معلوم کنید.



نکته: در انتقال تابع $f(x) = \sqrt{x} + a$ تابع \sqrt{x} به

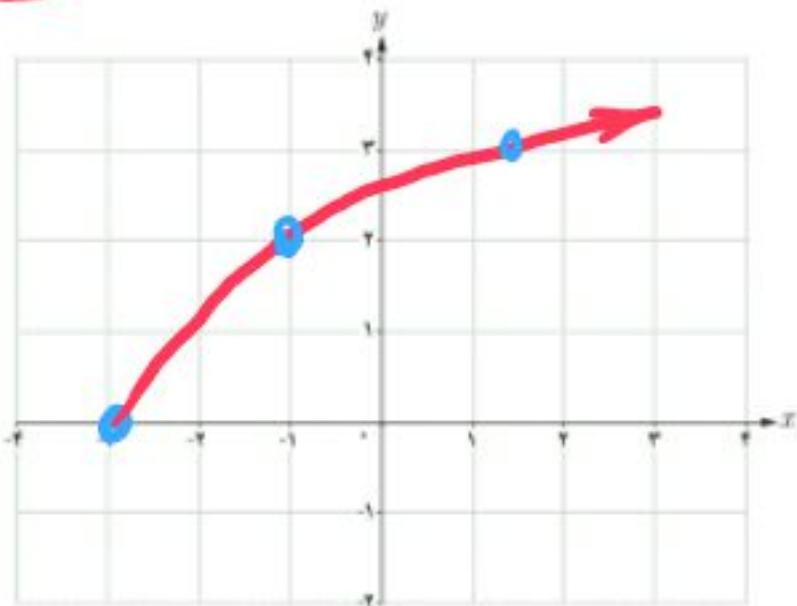
اندازه a روی محور عرض جابه‌جایی شود \uparrow و در تابع

$g(x) = \sqrt{x + a}$ نمودار تابع \sqrt{x} به اندازه a - روی محور طول

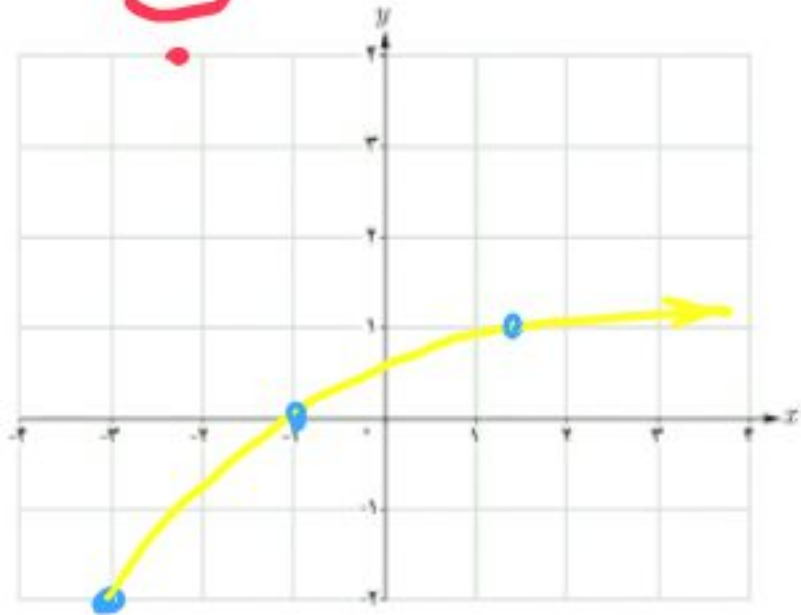
جابه‌جایی شود \rightleftarrows

الف) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2x+6}$ را به دست آورید. سپس به کمک نقطه یابی نمودار آن را رسم کرده و برد تابع را نیز معلوم کنید.
 ب) نمودار تابع $g(x) = \sqrt{2x+6} - 2$ را به کمک انتقال رسم کنید.

الف



ب



الف) $D_f : 2x+6 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -6 \rightarrow x \geq -3$

$D_f = [-3, +\infty)$

x	-3	-1	1.5
$f(x)$	0	2	3

برای تابع $R_f = [0, +\infty)$

ب) نمودار تابع $g(x) = \sqrt{2x+6} - 2$ از انتقال

حجم نقاط نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2x+6}$ به اندازه 2

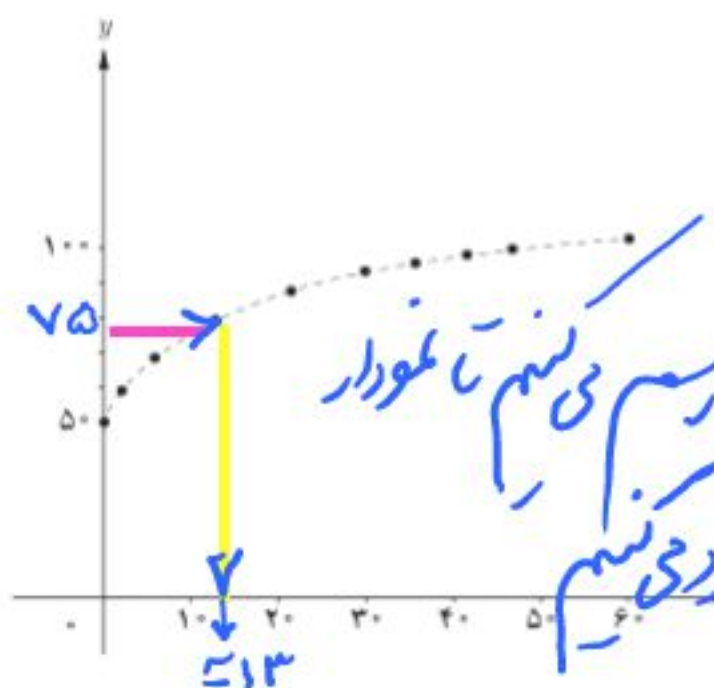
واحد به پایین رسم می شود

تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را، به تقریب، و برحسب سانی متر تا ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. x نشان‌دهنده ماه‌های پس از تولد است. در حالت کلی دامنه این تابع رادیکالی بازه $[0, \infty)$ است ولی در این مثال که واقعی است دامنه آن بازه $[0, 60]$ می‌باشد.

(صفحه ۴۱)

الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده‌ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰	۵۷	۶۴	۷۲/۱	۷۸	۸۵	۸۸/۳	۹۲	۹۹	۱۰۴/۲



ب) برد این تابع چیست؟

پ) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟

ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید

که کودکی با قد ۷۵ سانتی متر حدوداً چند ماهه است.

از نقطه $y=75$ روی محور عرض خطی موازی محور طول رسم می‌کنیم تا نمودار
رابطه نقطه قطع کند. از آن نقطه به محور طول عمود می‌کشیم
حل برخورد جواب مسئله است

بر برد تابع $R_f = [50, 104.2]$ (ب)

پ) $f(16) = 78$

$$f(16) = \sqrt{16} + 50 = 4 + 50 = 54$$

$$\sqrt{x} + 50 = 75 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{25}{1} \quad (ت)$$

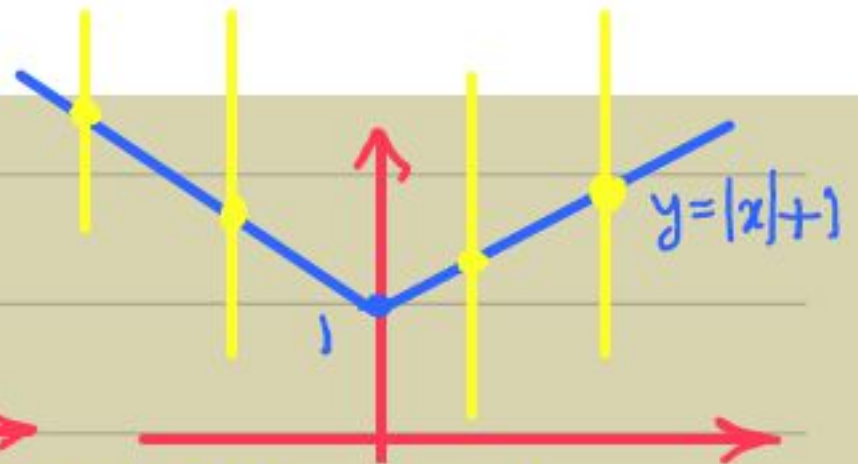
$$x = \left(\frac{25}{1}\right)^2 = 625$$

کودک حدوداً ۲۵ ماهه است

کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می کند؟ دلیل بیاورید.

الف) $y = |x| + 1$

ب) $x = |y| + 1$



الف $y = |x| + 1$

تابع است

دلیل

هر خط موازی محور عرض منودار تابع را

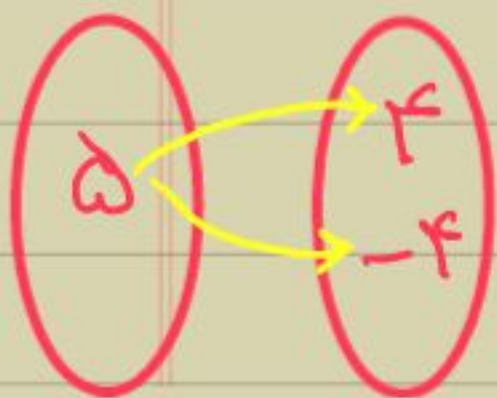
حداکثر در یک نقطه قطع می کند

ب $x = |y| + 1$ تابع نیست

$$x = 5 \rightarrow 5 = |y| + 1 \Rightarrow |y| = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = -4 \end{cases}$$

به ازای ورودی $x = 5$ دو مقدار متفاوت

(فرضی) بدست می آید



تابع نیست

هزینه ارسال یک بسته پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

x (وزن بسته) کیلوگرم	$0 < x \leq 2$	$2 < x \leq 5$	$5 < x \leq 10$	$10 < x \leq 12$
$f(x)$ (هزینه ارسال) بر حسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

$$f(x) = \begin{cases} 5 & 0 < x \leq 2 \\ 10 & 2 < x \leq 5 \\ 17 & 5 < x \leq 10 \\ 20 & 10 < x \leq 12 \end{cases}$$

اگر حداکثر وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

الف) ضابطه تابعی را که جدول فوق نشان می‌دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به دست آورید:

ب) برای ارسال دو بسته به وزن‌های ۹ کیلوگرم و

۱۱/۵ کیلوگرم چه هزینه‌ای باید پرداخت؟

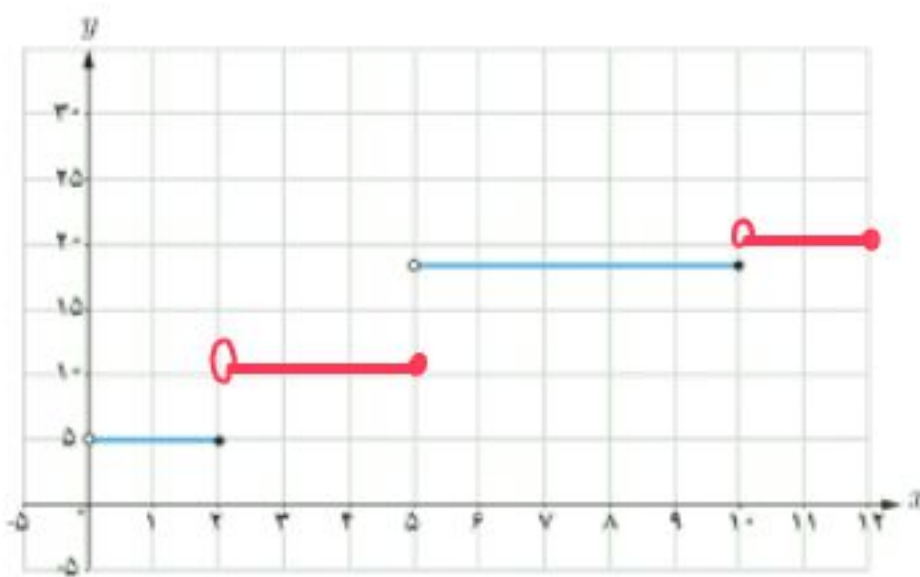
پ) قسمتی از نمودار این تابع در شکل روبه‌رو رسم شده

است. بقیه نمودار را رسم کنید.

توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه

تقسیم کرد به گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت

باشد، تابع پله‌ای می‌نامند.



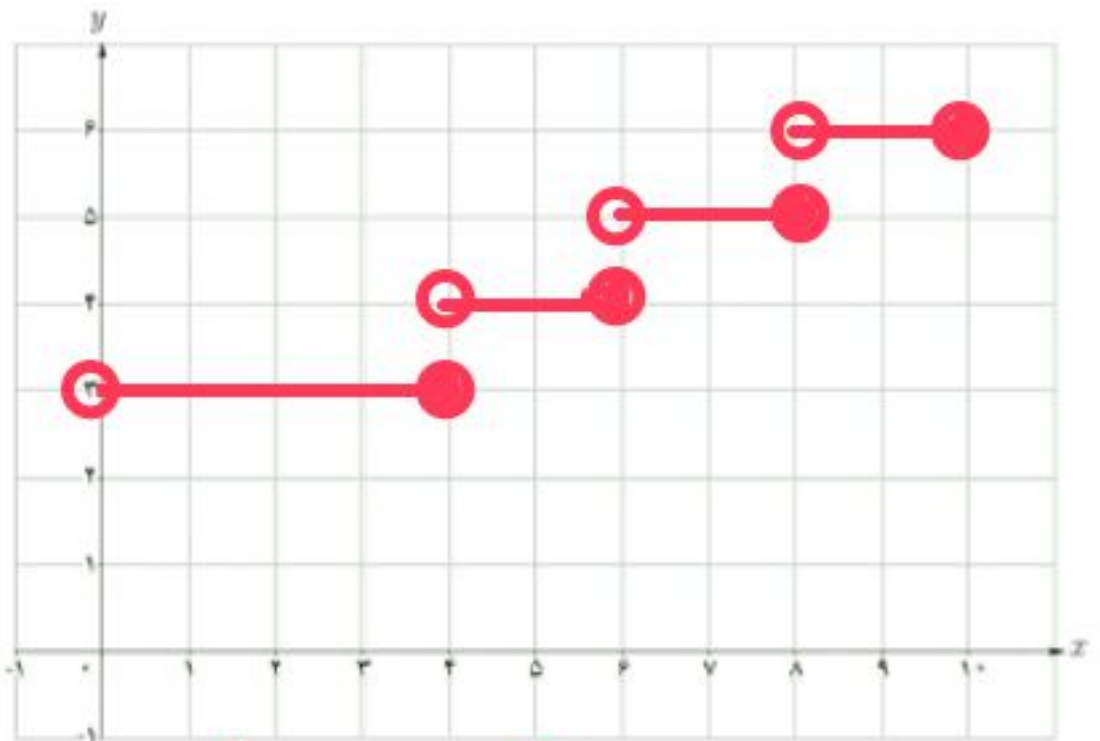
$$D_f = (0, 12] \quad R_f = \{5, 10, 17, 20\}$$

ب) $5 < 9 \leq 10 \Rightarrow$ هزینه = ۱۷ $\Rightarrow 17 + 20 = 37$

$10 < 11,5 \leq 12 \Rightarrow$ هزینه = ۲۰ \Rightarrow ۳۷ هزار تومان

۱ توقفگاه (پارکینگ) یک مجتمع تفریحی - ورزشی برای چهار ساعت اول توقف یک خودرو ۳ هزار تومان و برای هر دو ساعت اضافه با زمانی کمتر از آن ۱۰۰۰ تومان دریافت می کند. اگر حداکثر مدت توقف در این توقفگاه ده ساعت باشد، نمودار تابعی را که هزینه توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان دهد رسم کنید. دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

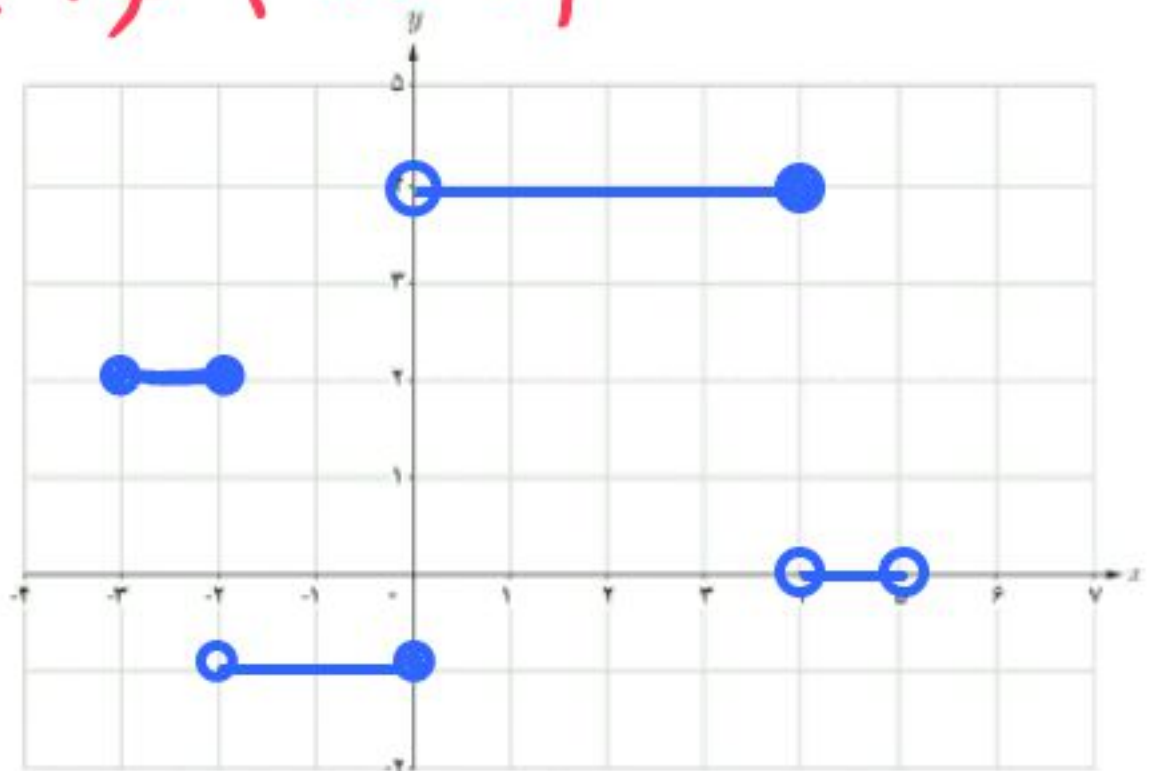
$$f(x) = \begin{cases} 3000 & 0 < x \leq 4 \\ 4000 & 4 < x \leq 6 \\ 5000 & 6 < x \leq 8 \\ 4000 & 8 < x \leq 10 \end{cases}$$



$$D_f = (0, 10] \\ \text{دامنه}$$

$$R_f = \{3, 4, 5, 6\} \\ \text{برد}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -3 \leq x \leq -2 \\ -1 & -2 < x \leq 0 \\ 4 & 0 < x \leq 4 \\ 0 & 4 < x < 5 \end{cases}$$

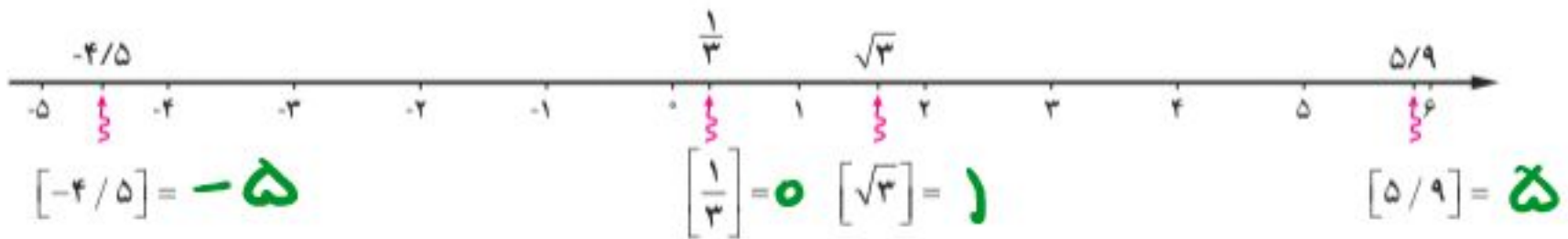


$$\text{دامنه } D_f = [-3, 5)$$

$$\text{برد } R_f = \{2, -1, 4, 0\}$$

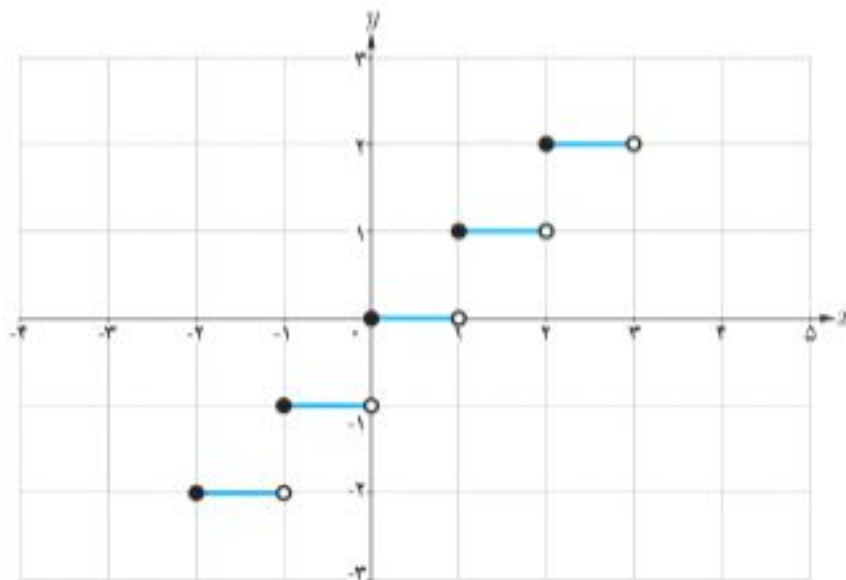
صفحه ۵۱

عدد صحیح باشد $x = [x]$. جزء صحیح اعداد نشان داده شده روی محور را بیابید.



تابعی که به هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و آن را به صورت $f(x) = [x]$ نمایش می‌دهند. $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \mathbb{Z}$. نمودار تابع با توجه به جدول در بازه $[-2, 3)$ رسم شده است.

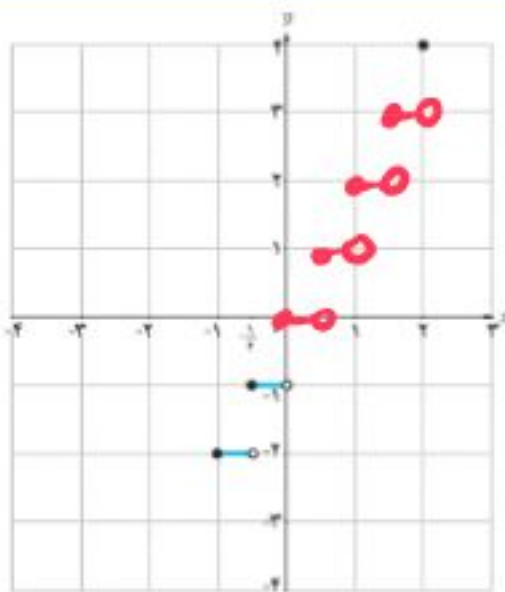
x	$y = [x]$
$-2 \leq x < -1$	$y = -2$
$-1 \leq x < 0$	$y = -1$
$0 \leq x < 1$	$y = 0$
$1 \leq x < 2$	$y = 1$
$2 \leq x < 3$	$y = 2$



صفحه ۵۱

۱ نمودار تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4$



$2x$	$-2 \leq 2x < -1$	$-1 \leq 2x < 0$	$0 \leq 2x < 1$	$1 \leq 2x < 2$	$2 \leq 2x < 3$	$3 \leq 2x < 4$
$[2x]$	-2	-1	0	1	2	3
x	$-1 \leq x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \leq x < 0$	$0 \leq x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq x < 1$	$1 \leq x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \leq x < 2$

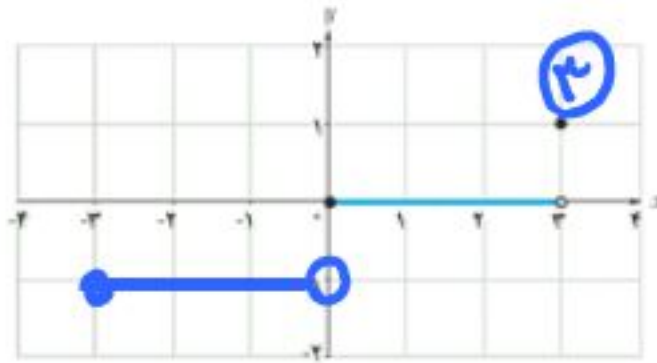
$0 < 2x < 1$ $1 < 2x < 2$ $3 < 2x < 4$

$0 < x < \frac{1}{2}$ $1 < x < \frac{3}{2}$ $\frac{1}{2} < x < 1$

۲ نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{3}x \right]$ را در بازه $[-3, 3]$ رسم کنید (کامل کنید). صفحه ۵۲

۲ $0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{1}{3}x \right] = 0 \\ 0 \leq x < 3 \end{cases}$

۱ $-1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow$



$-3 \leq x \leq 3 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{3}x \leq 1$

۱ $-1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ \left[\frac{1}{3}x \right] = -1 \end{cases}$

۲ $0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 3 \\ \left[\frac{1}{3}x \right] = 0 \end{cases}$

۳ $f(3) = \left[\frac{1}{3} \times 3 \right] = [1] = 1$

دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$

ب) $f(x) = \frac{-3x}{x^2+1}$

پ) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-12}$

ت) $f(x) = \sqrt{3x+1}$

ث) $f(x) = 2\sqrt{x-3}$

ج) $f(x) = \sqrt{8-x}$

الف) $2-x=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
 عبارت منفرجه

ب) $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ ریشه ندارد $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
 عبارت منفرجه

پ) $x^2+x-12=0 \Rightarrow (x+4)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=3 \end{cases}$
 عبارت منفرجه ریشه های منفرجه

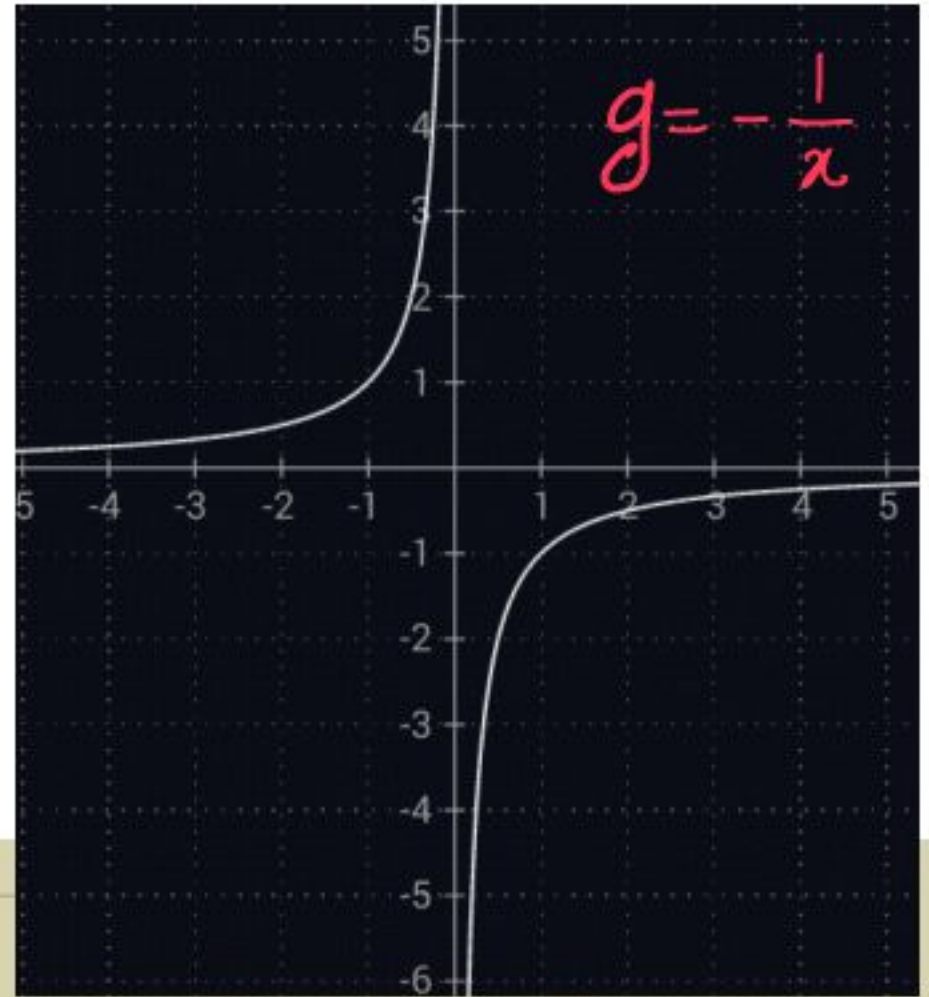
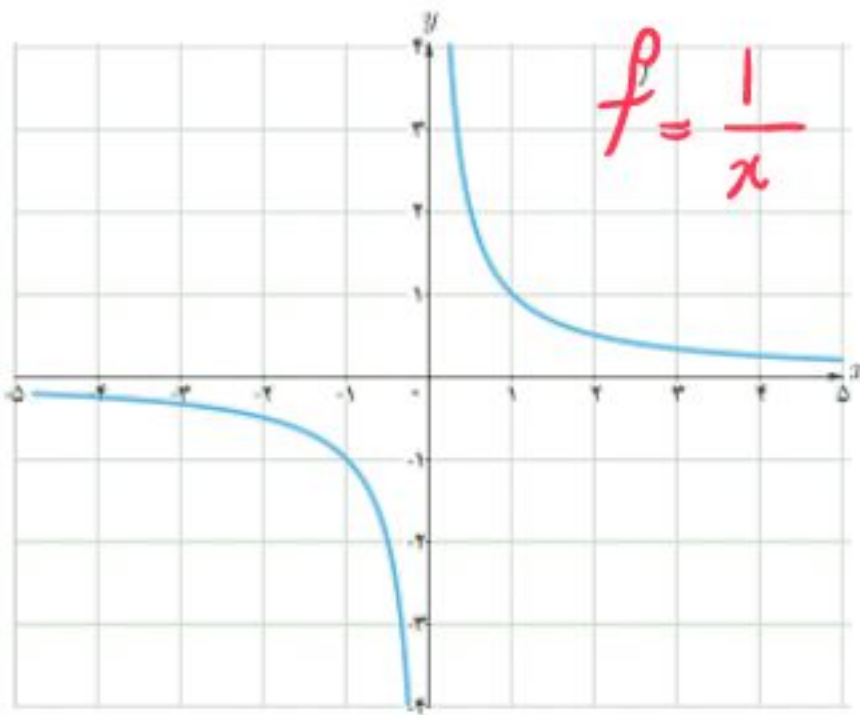
$$D_f = \mathbb{R} - \{-4, 3\}$$

ت) $3x+1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow D_f = [-\frac{1}{3}, +\infty)$
 عبارت زیر را در فعال

ث) $x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$
 عبارت زیر را در فعال

ج) $8-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -8 \Rightarrow x \leq 8$
 عبارت زیر را در فعال
 $D_f = (-\infty, 8]$

۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x) = -\frac{1}{x}$ را رسم کرد.

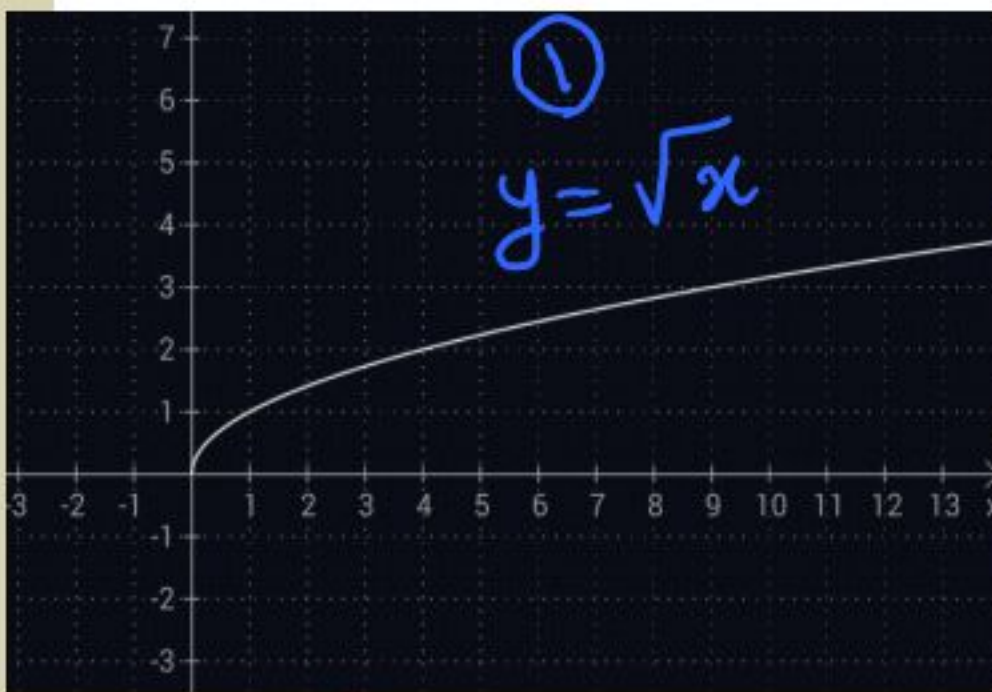


نمودار g از قرینه کردن نمودار f

نسبت به محور y ها (طول) بدست می‌آید. چون معادله f در

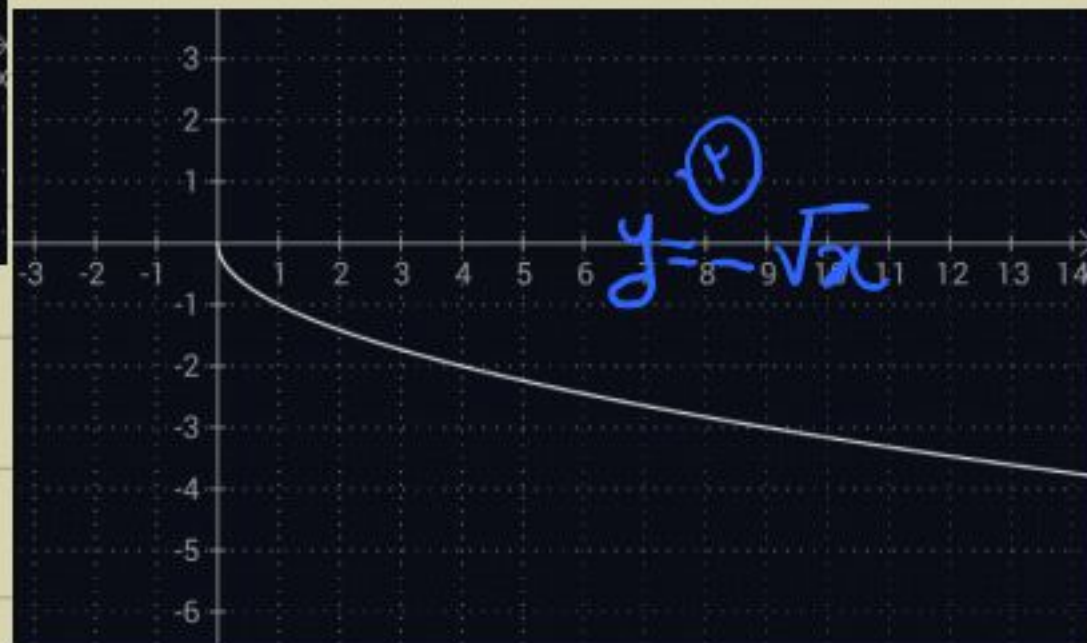
نمودار g قرینه معادله f شدند.

۳ نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.



نمودار ۲ از قرینه کردن نمودار ۱

نسبت به محور طول بدست می‌آید

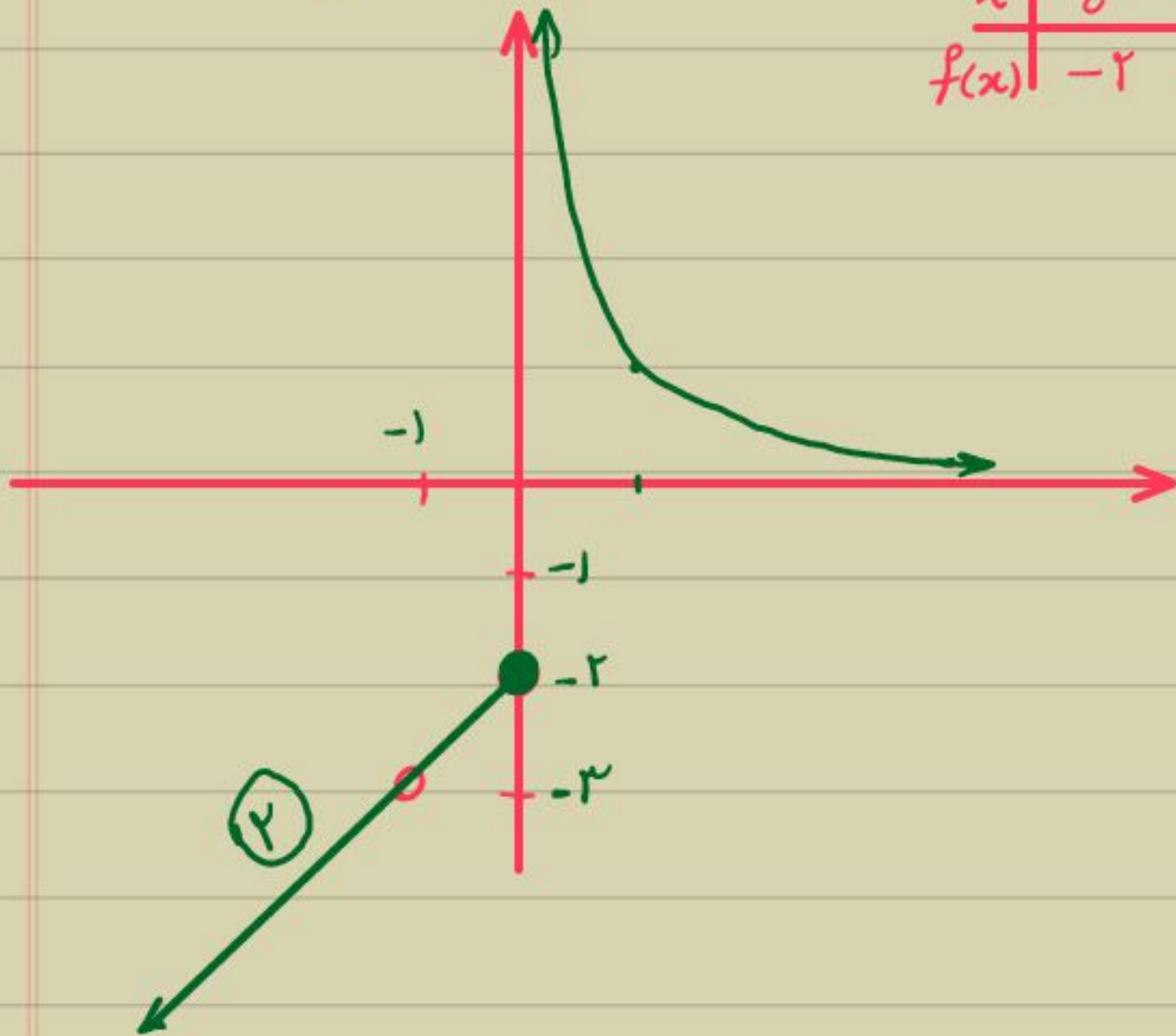


۲ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$$

الف) (۱) *حسوبرا نیک* $x > 0$
 (۲) *خطی* $x \leq 0$

x	0	-1
$f(x)$	-2	-3



دامنه

$$D_f = (0, +\infty) \cup (-\infty, 0] = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

اجتماع

$$R_f = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$$

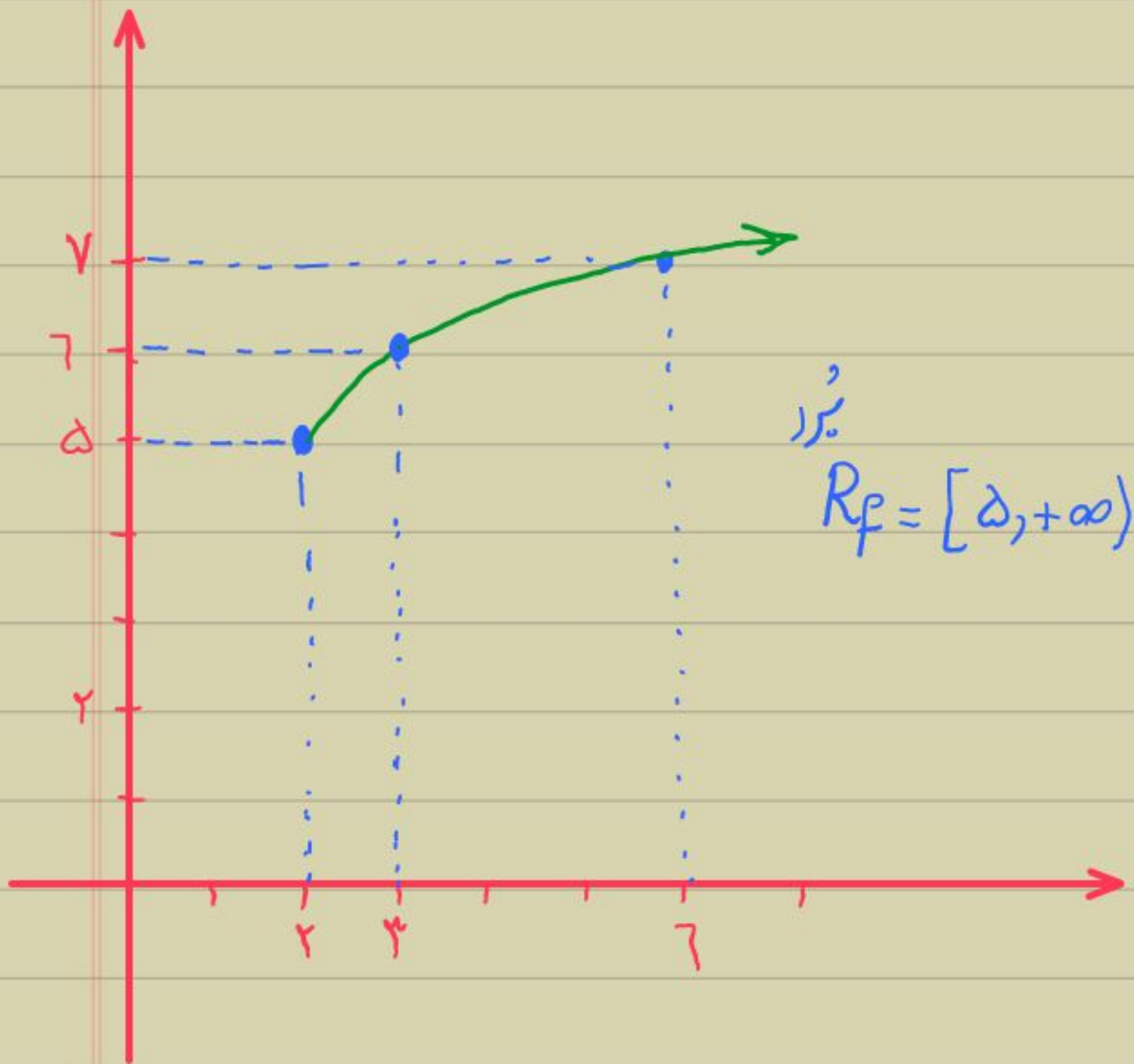
(۲) $\Rightarrow \mathbb{R} - (-2, 0]$

ب) $f(x) = \sqrt{x-2} + 5$

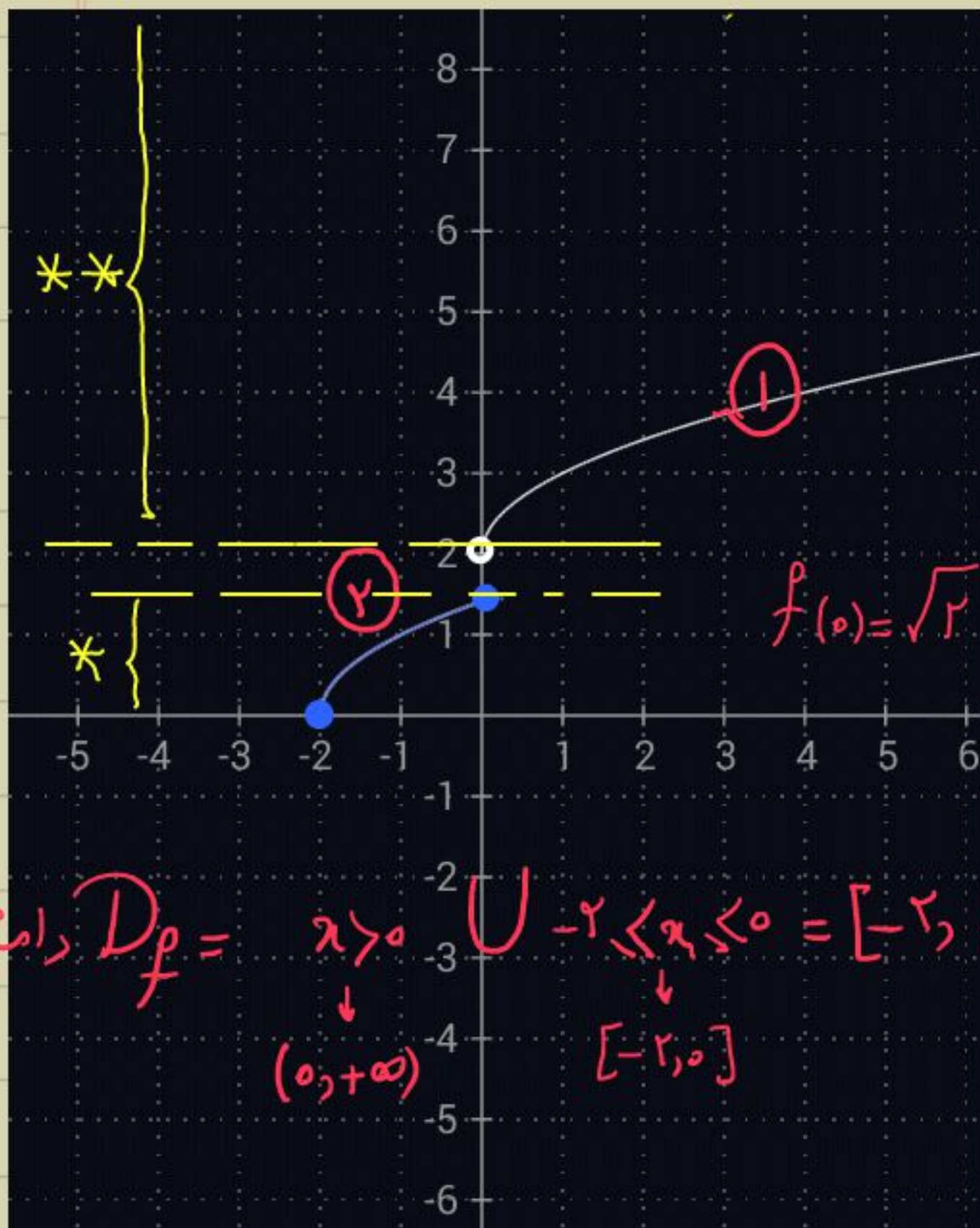
$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$ رأسته

x	2	3	4
$\sqrt{x-2}$	0	1	2
$f(x)$	5	6	7

نقاط کلیدی



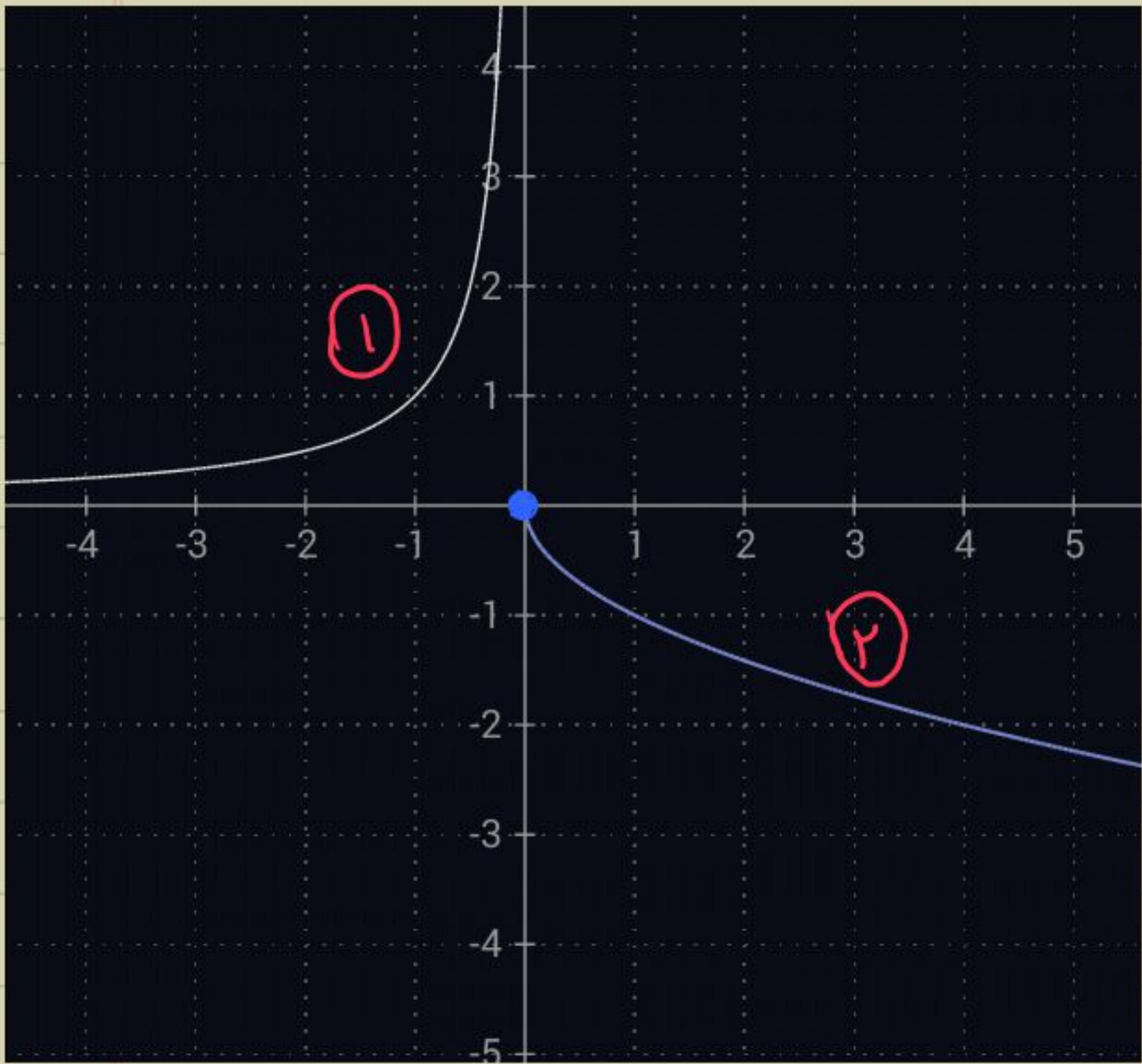
$$\underline{\text{ج}}) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & , x > 0 \quad \textcircled{1} \\ \sqrt{x+2} & , -2 \leq x \leq 0 \quad \textcircled{2} \end{cases}$$



$$\text{ج}^3) R_f = [0, \sqrt{2}] \cup (r, +\infty)$$

$$\textcircled{L} \Rightarrow R_f = [0, +\infty) - (\sqrt{2}, r]$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$



$$D_f = x < 0 \cup x \geq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}$$

۵ کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می کند؟

الف) $3x+2y=12$ ب) $x=1$ پ) $y=-2$ ت) $f(x)=\begin{cases} x+3 & x \leq 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$ ث) $y^2=x^2$ ج) $y=|x|$

معادله خط با شیب منفی $y = -\frac{3}{2}x + 12 \Rightarrow 2y = -3x + 12$ (الف)



تابع نیست

ت) $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0+3=3 \\ x-1 & x \geq 0 \Rightarrow f(0) = 0-1=-1 \end{cases}$

برای $x=0$ در مقدار بدست می آید $f(0) = 3, -1$

تابع نسبت $y^2 = x^2 \Rightarrow x = \pm y$ (ث)

مثال $x=2 \Rightarrow y = \pm 2$ $(2, 2)$
 $(2, -2)$

تابع است $y = |x|$ (ج)

تابع است



۶ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به وسیله تابع $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. الف) هزینه پاک‌سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟ ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

الف) $x = 50 \Rightarrow f(50) = \frac{255 \times 50}{100 - 50} = 255$
 میلیون تومان

ب) $D_f: 100 - x = 0 \Rightarrow x = 100 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{100\}$

اما چون x بنابر درصد آلودگی است در حالت واقعی $D_f = (0, 100)$ می‌باشد

الف) $f(x) = [x] + 1$, $-2 \leq x < 3$

ب) $f(x) = [\frac{1}{4}x]$, $-4 \leq x < 4$

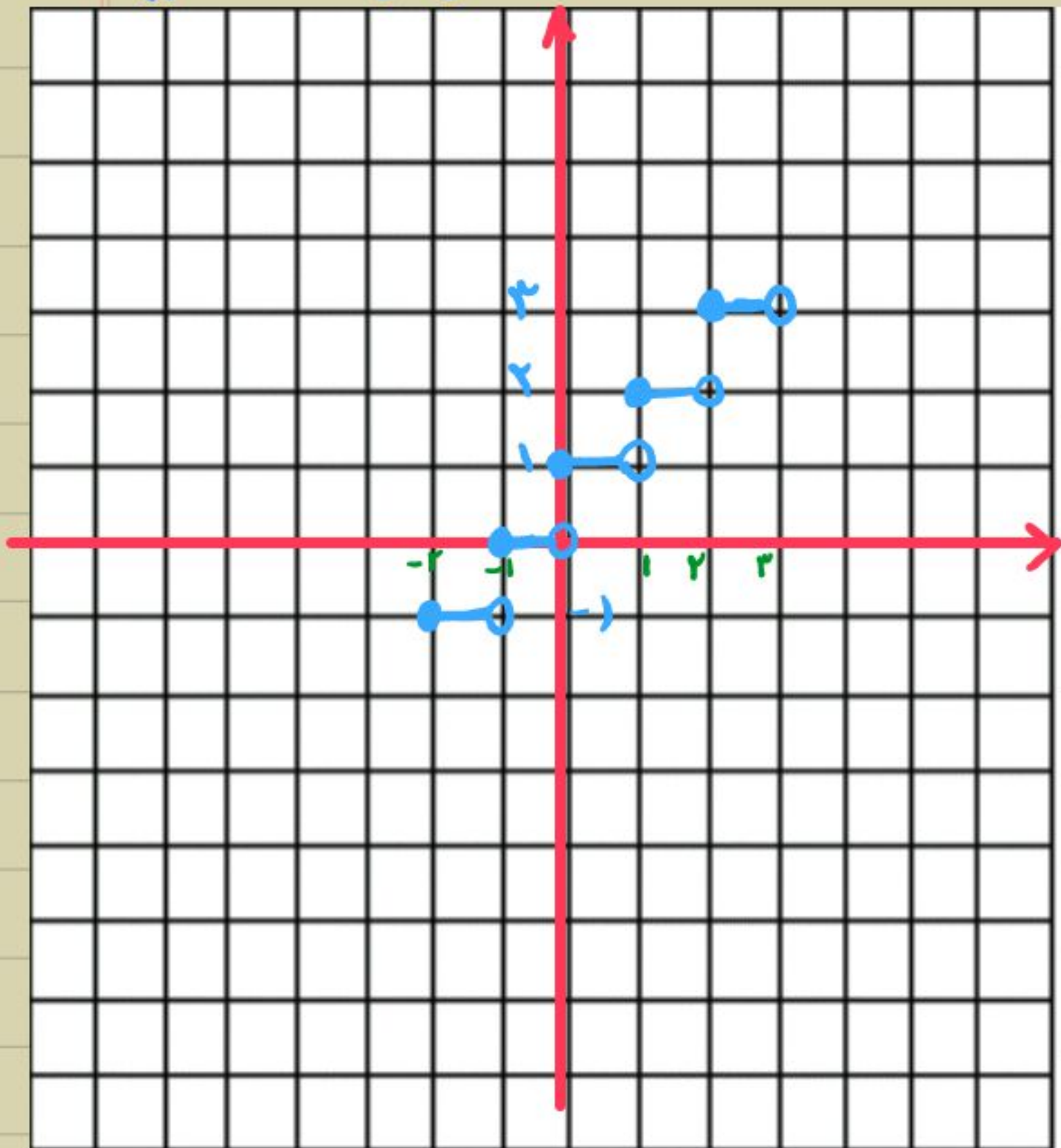
الف) $-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow f(x) = -2 + 1 = -1$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -1 + 1 = 0$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0 + 1 = 1$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + 1 = 2$

$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = 2 + 1 = 3$



$$\text{ب) } f(x) = \left[\frac{1}{2}x \right] \quad -\varepsilon \leq x < \varepsilon$$

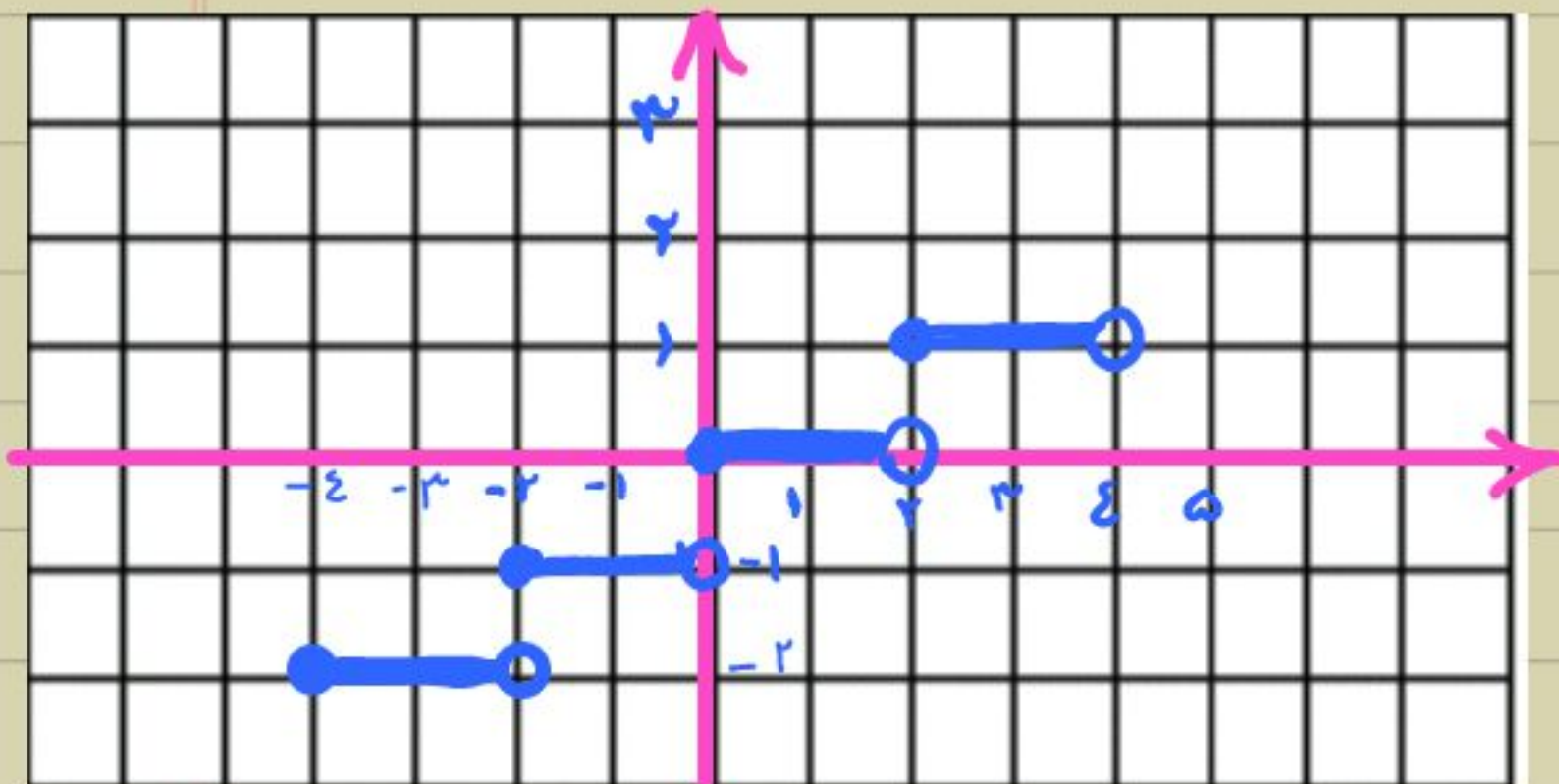
$$-\varepsilon \leq x < \varepsilon \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{2}x < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{توجد:}$$

$$-\varepsilon \leq x < -\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{2}x < -\frac{\varepsilon}{4} \rightarrow f(x) = -\frac{\varepsilon}{2}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq x < 0 \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{1}{2}x < 0 \rightarrow f(x) = -\frac{\varepsilon}{4}$$

$$0 \leq x < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}x < \frac{\varepsilon}{4} \rightarrow f(x) = 0$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq x < \varepsilon \Rightarrow \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{1}{2}x < \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow f(x) = \frac{\varepsilon}{4}$$



۱

۲

نمودار تابع را در بازه $[-2, 2]$ رسم می‌کنیم

①

$$y = [x] - 3$$

$$-2 \leq x < -1 \rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = -5$$

$$-1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -4$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = -3$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -2$$

*

**

②

$$y = [x-3]$$

$$y = -5 \Rightarrow -5 \leq x-3 < -4 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

$$y = -4 \Rightarrow -4 \leq x-3 < -3 \Rightarrow -1 \leq x < 0$$

$$y = -3 \Rightarrow -3 \leq x-3 < -2 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$y = -2 \Rightarrow -2 \leq x-3 < -1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

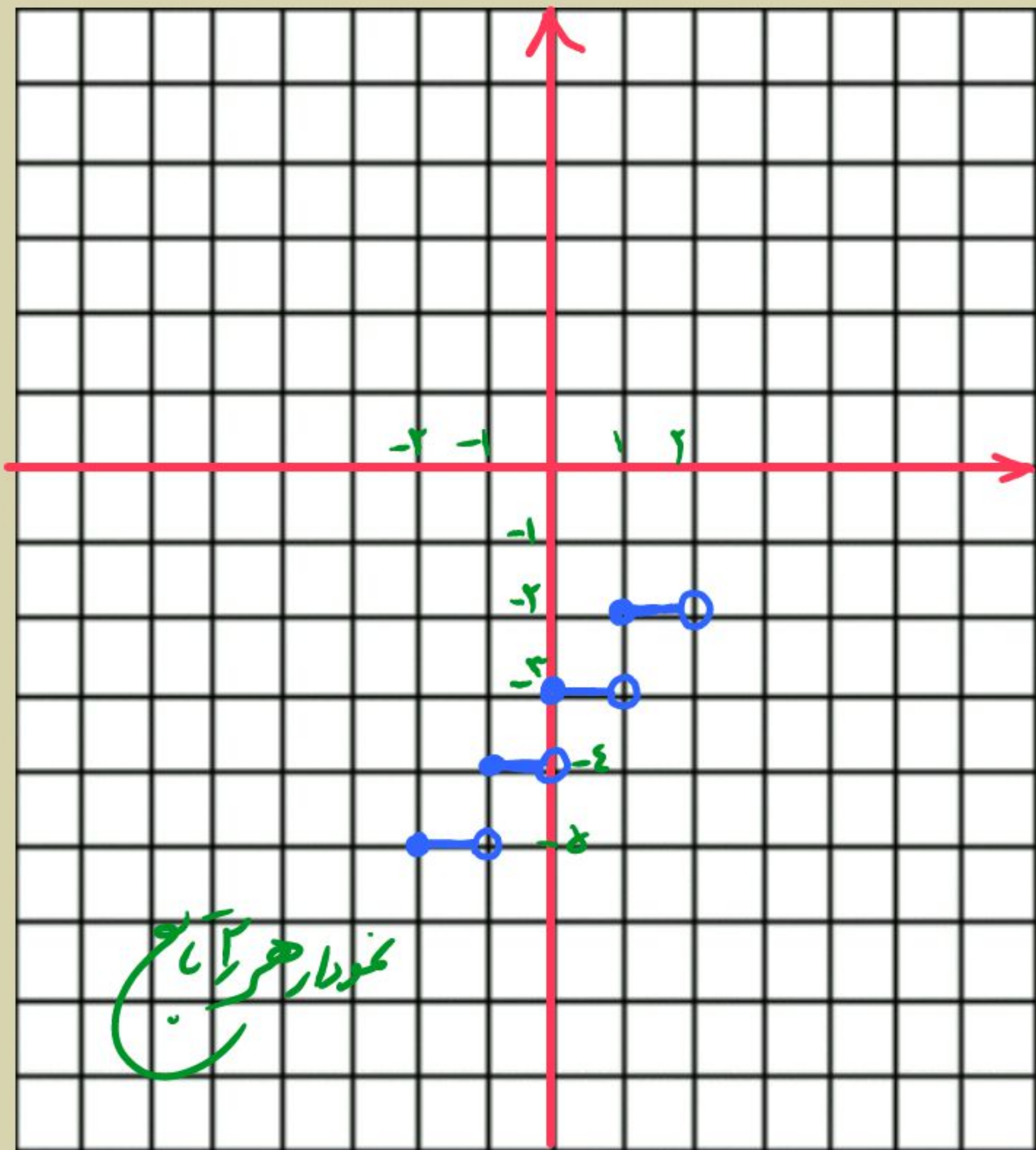
**

*

با توجه به * و ** متوالی لغت نمودار هر تابع

بنابراین:

یکسان است



هر آرایع مقدار یکسانی دارند یعنی

$$[x - 3] = [x] - 3$$

۹ اگر تعداد افرادی که طی یک مدت معین، به وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t) = \frac{9500t - 2000}{4+t}$ به دست آید که در آن $t > 0$ زمان بر حسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟
 ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

$t = 5$ الف)

$$n(5) = \frac{9500 \times 5 - 2000}{4 + 5} = \frac{47500 - 2000}{9}$$

$$= \frac{45500}{9} = 5055 \text{ نفر}$$

ب) $5500 = \frac{9500t - 2000}{4+t} \Rightarrow 22000 + 5500t = 9500t - 2000$

$$5500t = 24000 \Rightarrow t = 4.36 \rightarrow \text{بسیار کم}$$

موفق باشید

۹۹/۸/۲۴

محمد مهدی

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi

تهران

بیست و چهارم آبان ماه سال 1399