

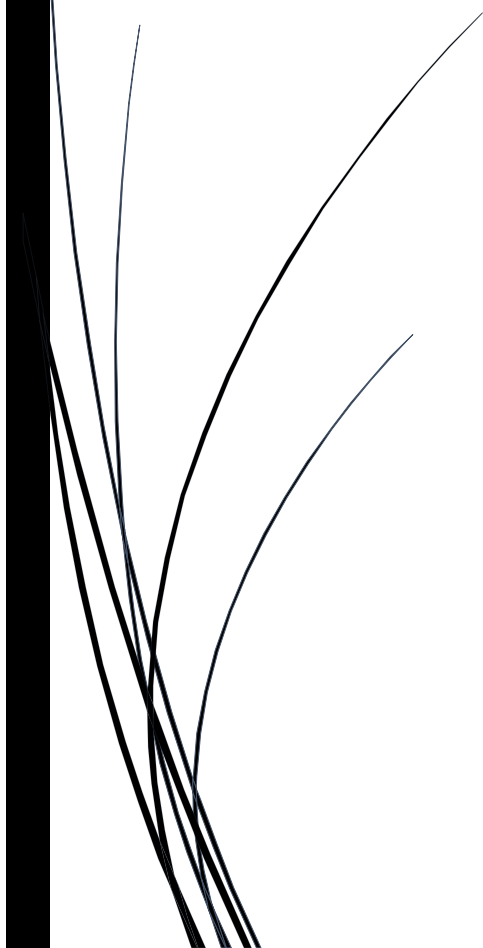
به نام خدا

(۱۱ انسانی)

جزوه ریاضی و آمار ۲

نهیبه و تنظیم: فاطمه بوربور

دبیر ریاضی شهرستان های استان تهران (وراین)



فصل اول

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

❖ درس اول: گزاره ها و ترکیب گزاره ها

❖ درس دوم: استدلال ریاضی

بارم فصل ۱:

شماره ادی	نوبت دوم	نوبت اول
۶/۵	۵	۱۳

فصل ۱ درس ۱: گزاره ها و ترکیب گزاره ها

اهداف درس ۱:

- آشنایی با مفهوم منطق ریاضی و کاربرد آن
- آشنایی با مفهوم گزاره ها و تعیین ارزش آنها
- مهارت چگونگی ساختن نقیض، عکس نقیض و عکس گزاره ها
- آشنایی با ترکیب گزاره ها و جدول ارزش ها
- مهارت در بررسی درستی گزاره های هم ارز با استفاده از جدول ارزش ها
- تشخیص استدلال های معتبر از استدلال های نامعتبر

مفهوم منطق ریاضی و کاربرد آن:

منطق در لغت به معنای « آنچه به گفته درآمده » و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال ها تعبیر می کنند. کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال هاست. تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است.

منطق ریاضی ، دستور زبان ریاضی است که روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را به ما یاد می دهد.

مفهوم گزاره ها و تعیین ارزش آنها:

در منطق ریاضی به هر جمله ی خبری که دقیقاً دارای یک ارزش درست (*True*) یا نادرست (*False*) است گزاره می گوئیم.

- ✓ نکته: جملات سوالی، امری، عاطفی و جملاتی که نتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم، گزاره نیستند. مثل:
- شما اهل کجایید؟
 - چه هوای خوبی
 - درس فلسفه از درس عربی آسان تر است

(فعالیت ۲ و ۳)

① کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

☑ حل:

الف) شما چند سال دارید؟ ← گزاره نیست (جمله پرسشی)

ب) عدد ۲ عددی اول است. ← گزاره با ارزش درست

پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. ← گزاره با ارزش نادرست

ت) افلاطون شاگرد ارسطو است. ← گزاره با ارزش نادرست

ث) $20 = 2 + 3 \times 4$ ← گزاره با ارزش نادرست

ج) عدد $(-1)^n$ عددی همواره مثبت است. $(n \in N)$ ← گزاره با ارزش نادرست

چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش مزه تر است. ← گزاره نیست (زیرا کلمه خوشمزه دارای مفهوم نسبی است).

ح) لطفاً تخته را پاک کن. ← گزاره نیست (جمله امری)

② دو گزاره درست و دو گزاره نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

☑ حل:

دو گزاره درست مانند:

(۱) $\sqrt{2}$ عددی مثبت است.

(۲) ۵ عددی فرد است

دو گزاره نادرست مانند:

(۱) ۴ عددی اول است

(۲) ۲۵ مربع کامل نیست.

دو جمله که گزاره نباشند مانند:

(۱) کتاب را بردار!

(۲) سارا دانش آموز خوبی است.

جبر گزاره ها:

در منطق ریاضی و در جبر گزاره ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا r یا ... نمایش می دهیم.

-تعداد حالت های ارزشی n گزاره را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} \text{(تعداد گزاره ها)} \quad 2^n \rightarrow \text{تعداد حالت های } n \text{ گزاره} \\ \downarrow \\ \text{(درست و نادرست)} \end{aligned}$$

-اگر ارزش درست یک گزاره را با «د» یا « T » و ارزش نادرست آن را با «ن» یا « F » نمایش دهیم، جدول ارزش گذاری گزاره ها به صورت زیر است:

(مثال ص ۳)

(۱) تعداد حالت های ارزشی یک گزاره $2^1 = 2$ است.

p
د
ن

(۲) تعداد حالت های ارزشی دو گزاره $2^2 = 4$ است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

(۳) تعداد حالت های ارزشی سه گزاره $2^3 = 8$ است.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

نقیض یک گزاره:

نقیض یک گزاره مانند p را با نماد $(\sim p)$ نمایش می دهیم برای ساختن نقیض یک گزاره بهتر است فعل جمله را نفی کنیم.

(گاردنر گلابی ص ۴)

در هر یک از حالت های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

p	$\sim p$
د	ن

(الف) عدد ۵ زوج است.

✓حل: عدد ۵ زوج نیست.

p	$\sim p$
د	ن

(ب) تساوی $(2 \times 2 = 4)$ برقرار است.✓حل: تساوی $(2 \times 2 = 4)$ برقرار نیست.

p	$\sim p$
د	ن

(پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک تر است.

✓حل: عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک تر نیست.

p	$\sim p$
د	ن

(ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.

✓حل: ارسطو شاگرد افلاطون نیست.

p	$\sim p$
د	ن

(ث) ایران در منطقه غرب آسیا قرار دارد.

✓حل: ایران در منطقه غرب آسیا قرار

ندارد.

(ج) $(3 \times 7) > (5 \times 4)$ ✓حل: $(3 \times 7) > (5 \times 4)$ یا $(5 \times 4) \leq (3 \times 7)$

p	$\sim p$
د	ن

گزاره های هم ارز:

اگر ارزش دو گزاره p, q یکسان باشد (هر دو درست یا هر دو نادرست) به آن گزاره های هم ارز می گوئیم و می نویسیم:
 $(p \equiv q)$ مثلا دو گزاره $(4 \in N)$ و 9 مربع کامل است (هم ارزند زیرا ارزش هر دو درست است).

✓ نکته: نقیض نقیض هر گزاره، هم ارز خود آن گزاره است:
 $\sim(\sim p) \equiv p$

اثبات $\sim(\sim p) \equiv p$ به صورت زیر است:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

ترکیب گزاره ها و جدول ارزش:

از ترکیب گزاره های ساده، گزاره های مرکب تولید می شود که ۴ نوع ترکیب داریم:

(۱) ترکیب عطفی (\wedge) (۲) ترکیب فصلی (\vee)

(۳) ترکیب شرطی (\Rightarrow) (۴) ترکیب دوشروطی (\Leftrightarrow)

ترکیب عطفی (\wedge):

اگر دو گزاره ساده p, q را با حرف (و) به هم ربط دهیم گزاره $(p \wedge q)$ ایجاد می شود که ترکیب عطفی نام دارد.

ارزش ترکیب عطفی وقتی درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشند. جدول ارزشی $(p \wedge q)$:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

(فعالیت ص ۵)

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد		
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همه سوره های آن با بسم الله شروع می شود.		
۳ و ۸ زوج است.	✓	
۴ کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و		✓
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		
۶ و $5 > 2$	✓	

ترکیب فصلی (\vee):

اگر دو گزاره ساده p, q را با حرف (یا) به هم ربط دهیم گزاره $(p \vee q)$ ایجاد می شود که ترکیب فصلی نام دارد.

ارزش ترکیب فصلی وقتی نادرست است که هر دو گزاره ارزش نادرست داشته باشند. جدول ارزشی $(p \vee q)$:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

$\odot \vee \odot \equiv \odot$

(فعالیت ص ۶)

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است		
۲	حضرت مهدی <small>علیه السلام</small> امام دوازدهم شیعیان است یا	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا	✓	
۴ یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.	✓	
۵ یا	✓	

ترکیب شرطی (\Rightarrow):

اگر با گزاره های p, q گزاره $(p \Rightarrow q)$ را بسازیم در واقع یک ترکیب شرطی ساخته ایم و به شکل های زیر می توان آن را بیان کرد:

- اگر p آنگاه q
- p نتیجه می دهد q را
- q از p نتیجه می شود

ارزش ترکیب شرطی وقتی نادرست است که p (مقدم) ارزش درست و q (تالی) ارزش نادرست داشته باشد.

✓ نکته: در ترکیب شرطی اگر نادرست باشد می گوئیم گزاره شرطی به انتفای مقدم درست است یعنی با اینکه مقدم نادرست است ولی ارزش کل گزاره شرطی درست است.

جدول ارزشی $(p \Rightarrow q)$:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

$\text{☺} \Rightarrow \text{☹} \equiv \text{☹}$

(مثال ص ۷)

ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید. حل:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر $۶ = ۳^۲$ آنگاه، ۵ اول است	✓	
۲	اگر ۸ فرد است آنگاه $۲ > ۴$	✓	
۳	اگر ۱۷ اول است آنگاه ۱۸ اول است		✓
۴	اگر $۴^۲ = ۲^۴$ آنگاه $۳^۲ > ۲^۳$	✓	

(فعالیت ص ۷)

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{۹}$ مربع کامل است.		
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.		
۴	اگر آنگاه		✓
۵	اگر آنگاه	✓	
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۷	اگر آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

(کاردرگلاسی ص ۷)

اگر p گزاره درست و q گزاره نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید.

۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r \equiv$ د ن

۲) $(p \vee q) \vee r \equiv$ د ن

۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r \equiv$

۴) $(r \Rightarrow p) \vee q \equiv$

۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv$

۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv$

۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv$

ترکیب دوشرطی (\Leftrightarrow):

از ترکیب عطفی دو گزاره ($p \Rightarrow q$) و ($q \Rightarrow p$) گزاره دو شرطی ($p \Leftrightarrow q$) ساخته می شود

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \equiv (p \Leftrightarrow q)$$

و به شکل های زیر می توان آن را بیان کرد:

- اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p
- p نتیجه می دهد q را و q نتیجه می دهد p را
- اگر p آنگاه q و برعکس
- p اگر و تنها اگر q
- p شرط لازم و کافی است برای q

ارزش ترکیب دوشرطی وقتی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

جدول ارزشی ($p \Leftrightarrow q$):

P	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د \rightarrow ☺ \Leftrightarrow ☺ \equiv ☺
د	ن	ن \rightarrow ☹ \Leftrightarrow ☹ \equiv ☺
ن	د	ن \rightarrow ☹ \Leftrightarrow ☹ \equiv ☺
ن	ن	د \rightarrow ☺ \Leftrightarrow ☺ \equiv ☺

(فعالیت ۸)

جدول زیر را کامل کنید.

(کاردر کلاسی ص ۹)

اگر p گزاره درست و q گزاره نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید.

ن د

$$۱) \underbrace{(p \Leftrightarrow q)}_n \wedge r \equiv n$$

ن د

$$۲) \underbrace{(\sim p \Leftrightarrow q)}_d \vee r \equiv d$$

$$۳) (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv$$

$$۴) (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv$$

$$۵) (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q) \equiv$$

$$۶) (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv$$

$$۷) (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \equiv$$

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.		
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		
۳ اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است.	✓	
۴	اگر آنگاه و برعکس	✓	
۵	یک چهار ضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهار ضلعی لوزی باشد.		
۶	اگر واریانس داده ها برابر صفر باشد؛ آنگاه داده ها با یکدیگر برابرند و برعکس		

تمرین ۱ و ۲ ص ۱۱ و ۱۰: Homework

① جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگترین معجزه پیامبر اسلام (ص) قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است		
۲	اگر آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است آنگاه	✓	
۴	$4 \times 2 = 2^3 \Rightarrow 8^2 = 4^3$		
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.		
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.		
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		
۸	امام خمینی در سال ۱۳۴۲ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.		
۹	حضرت علی (ع) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و	✓	
۱۰	اگر آنگاه و برعکس	✓	

② اگر p گزاره درست و q گزاره نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، ارزش هریک از گزاره های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید.

$$۱) (p \vee r) \Rightarrow p \equiv$$

$$۲) (q \wedge r) \Rightarrow r \equiv$$

$$۳) (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r) \equiv$$

$$۴) (\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \equiv$$

$$۵) (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv$$

$$۶) (q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv$$

$$۷) (\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q \equiv$$

$$۸) (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r \equiv$$

$$۹) (r \Rightarrow p) \wedge p \equiv$$

بررسی دستی گزاره های هم ارزش با استفاده از جدول ارزش:

(مثال ص ۹ و تمرین ص ۱۱)

با استفاده از جدول ارزش ها درستی هم ارزی های زیر را بررسی کنید

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

✓حل:

p	q	~p	p ⇒ q	~p ∨ q
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

✓حل: گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را عکس نقیض گزاره

$(p \Rightarrow q)$ می نامیم

p	q	~p	~q	p ⇒ q	~q ⇒ ~p
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د

ث) $(p \vee \sim p) \equiv T$, $(p \wedge \sim p) \equiv F$

✓حل: گزاره $(p \vee \sim p) \equiv T$ را گزاره همیشه درست و

$(p \wedge \sim p) \equiv F$ را گزاره همیشه نادرست می نامیم

p	~p	p ∨ ~p	p ∧ ~p
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

ت) $(p \Rightarrow p) \equiv T$

p	(p ⇒ p)

ج) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

✓حل:

p	q	~q	(p ∧ ~q)	(p ⇒ q)	(p ∧ ~q) ∨ (p ⇒ q)
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

ث) $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

✓حل:

p	q	~q	(p ∧ ~q)	(p ∨ q)	(p ∨ ~q) ∧ (p ∨ q)
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن

فصل ۱ درس ۲: استدلال ریاضی

اهداف درس ۲:

- تبدیل عبارات کلامی به عبارات ریاضی
- استفاده از منطق گزاره ها برای بررسی صحت استدلال های ریاضی

استدلال ریاضی:

منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است. اولین گام برای استدلال ریاضی این است که یک عبارت توصیفی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم.

(مثال ص ۱۲ و ۱۳)

عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

(۱) "ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می شویم"

☑ حل:

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100 \rightarrow$$

$$\overset{\times 4}{x} + \overset{\times 4}{x} + \overset{\times 4}{\frac{x}{2}} + \overset{\times 4}{\frac{x}{4}} + 1 = 100 \rightarrow \frac{11}{4}x + 1 = 100$$

(۲) عددی را در نصف خودش ضرب کردیم، آنگاه بر حاصل ضرب عدد ۱۲ را افزودیم. حاصل ۵ برابر عدد منظور شد

☑ حل:

$$x \left(\frac{1}{2}x \right) + 12 = 5x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 5x + 12 = 0$$

(۳) ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن

$$\frac{10}{100}x = x - y$$

☑ حل: سود برابر است با (خرید - فروش)

(کاردرگلاسی ص ۱۳)

عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

(الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

(ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

(پ) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳، بزرگ تر از خودش است.

تمرین ۱۸ ص ۱۸: Homework

① گزاره های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

(الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

(ب) مکعب یک عدد، بزرگ تر از هفت برابر آن عدد، به علاوه پنج است.

(پ) مجموع معکوس های دو عدد بزرگ تر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

(ت) مجموع مکعبات دو عدد بزرگ تر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

(ث) هر عدد ناصفری از معکوس خود بزرگ تر یا مساوی با آن است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

مغالطه:

گاهی از قیاس استثنایی به شکل نادرست استفاده می شود و منجر به نتیجه گیری نادرست می شود. به این گونه استدلالات، مغالطه می گویند. که به صورت زیر است:

$$\text{مقدمه ۱: } p \Rightarrow q$$

$$\text{مقدمه ۲: } q$$

$$\therefore p$$

(مثال ۱ ص ۱۴)

مقدمه ۱: اگر باران بیارد، زمین خیس می شود.

$$q \quad p$$

مقدمه ۲: زمین خیس شده است.

$$q$$

∴ باران باریده است.

$$q$$

نتیجه به دست آمده ممکن است درست یا نادرست باشد ولی این نوع استدلال در علم منطق، نادرست است. (مثلا در این مثال زمین می تواند به دلیل دیگری غیر از باریدن باران خیس شده باشد)

(گاوردرگلاسی ۲ ص ۱۵)

② در هر یک از استدلال های زیر، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

$$p: 3 > 0 \Rightarrow 4 > 1$$

$$p: 3 > 0$$

∴

خطوط L_1 و L_2 هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند: $q \Rightarrow$ خطوط L_1 و L_2 موازی باشند: p

∴ خطوط L_1 و L_2 هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند.

استدلال استثنایی (قیاس استثنایی):

این نوع قیاس در استدلال های ریاضی بسیار پر کاربرد است. که به شکل های زیر می توان بیان کرد: سه نقطه (∴) نماد نتیجه است.

(شکل ۱)

$$\text{مقدمه ۱: } p \Rightarrow q$$

$$\text{مقدمه ۲: } p$$

$$\therefore q$$

(شکل ۲)

مقدمه ۱: اگر الف آن گاه ب

مقدمه ۲: الف

$$\therefore b$$

(شکل ۳)

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

↓ مقدمه ۱
↓ مقدمه ۲
↓ نتیجه

(مثال ۱ ص ۱۴)

مقدمه ۱:

اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

$$q \quad p$$

مقدمه ۲: امشب، شب چهاردهم ماه است.

$$p$$

نتیجه: ماه کامل است.

$$q$$

(گاوردرگلاسی ۱ ص ۱۵)

① با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعده قیاس

استثنایی $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ را نشان دهید

☑ حل:

استدلال عکس نقیض:

گاهی اوقات اثبات درستی گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$ دشوار است بنابراین برای راحتی کار می توان هم ارز آن یعنی درستی عکس نقیض آن $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را اثبات کرد

(مثال ۳ ص ۱۶)

③ عکس نقیض (n^2) زوج باشد آن گاه n زوج است. را بنویسید.

☑ حل:

عکس نقیض

$$\begin{array}{ccc} \underline{n^2 \text{ زوج است}} \Rightarrow \underline{n \text{ زوج است}} & \longrightarrow & \\ p & & q \\ \underline{n^2 \text{ زوج نیست}} \Rightarrow \underline{n \text{ زوج نیست}} & & \\ \sim q & & \sim p \end{array}$$

یافتن استدلال نادرست و دلیل نادرستی استدلال:

گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار خطا می شویم. یافتن خطا در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد.

(مثال ۱ و ۲ ص ۱۶)

① دانش آموزی ادعا می کند معادله $x^2 - x = 0$ تنها یک ریشه دارد و آن $x = 1$ است. ایراد استدلال را بیابید و دلیل نادرستی آن را بیان کنید.

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \frac{x(x - 1)}{x} = \frac{0}{x}$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

☑ حل: ایراد در گام سوم است اجازه تقسیم بر x نداریم چون ممکن است x صفر باشد و عبارت بی معنا می شود.

② در اثبات زیر a, b, c اعداد حقیقی اند دلیل نادرستی آن را بیان کنید.

$$\begin{aligned} a < b &\Rightarrow a + c < b + c \Rightarrow c(a + c) < c(b + c) \\ &\Rightarrow ac + c^2 < bc + c^2 \Rightarrow ac < bc \end{aligned}$$

☑ حل: ایراد در گام سوم است چون علامت c ممکن است منفی باشد و جهت نامعادله تغییر کند

(گارد در گلابی ص ۱۷)

دلیل نادرستی استدلال های زیر را بیابید.

(الف)

$$\begin{aligned} ۱) \quad a &= \frac{a-d}{c-d} \\ ۲) \quad 0 &= \frac{-d}{c-d} \\ ۳) \quad d &= 0 \end{aligned}$$

☑ حل: ایراد در گام اول است چون اگر در صورت و مخرج یک کسر جمع و تفریق باشد نمی توانیم قسمتی از آن را ساده کنیم.

(ب)

$$\begin{aligned} ۱) \quad a &= \frac{a-d}{c-d} \\ ۲) \quad ac - ad &= a - d \\ ۳) \quad ac - a &= ad - d \\ ۴) \quad a(c-1) &= (a-1)d \\ ۵) \quad \frac{a(c-1)}{a-1} &= d \\ ۶) \quad -(c-1) &= d \end{aligned}$$

☑ حل: ایراد در گام پنجم است چون اگر در صورت و مخرج یک کسر جمع و تفریق باشد نمی توانیم قسمتی از آن را ساده کنیم.

Home work: (تمرین ۲ ص ۱۸)

② الف) اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم آنگاه مساحت آن نیز دو برابر می شود. دلیل نادرستی استدلال زیر را بیابید.

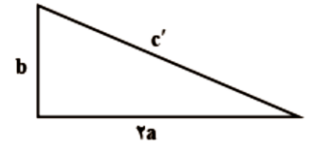
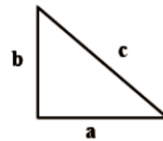
طول : x

عرض : y

مساحت $S = xy$

مساحت دو برابر شده است. $\rightarrow 2(xy) = 2xy = 2S$

ب) با توجه به شکل در یک مثلث قائم الزاویه اگر ضلع a را دو برابر کنیم آنگاه وتر مثلث جدید دو برابر وتر مثلث اولیه می شود با توجه به قضیه فیثاغورث دلیل نادرستی استدلال زیر در مثلث قائم الزاویه جدید را بیابید.



استدلال فیثاغورث در مثلث اولیه : $c^2 = a^2 + b^2$

استدلال فیثاغورث در مثلث جدید : $c'^2 = (2a)^2 + b^2$

$$= 4a^2 + b^2 = 4(a^2 + b^2) = 4c^2 \Rightarrow c'^2$$

$$= 4c^2 \Rightarrow c'^2 = 4c^2 \Rightarrow c' = 2c$$

پس وتر دو برابر شده است

پ) دلیل نادرستی استدلال زیر را بیابید.

$$\sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{6}} = \sqrt{\frac{12 \times 3 + 4 \times 16}{2 \times 3}} = \sqrt{\frac{12 + 3 \times 16}{3}} =$$

$$\sqrt{12 + 3 \times 16} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$$