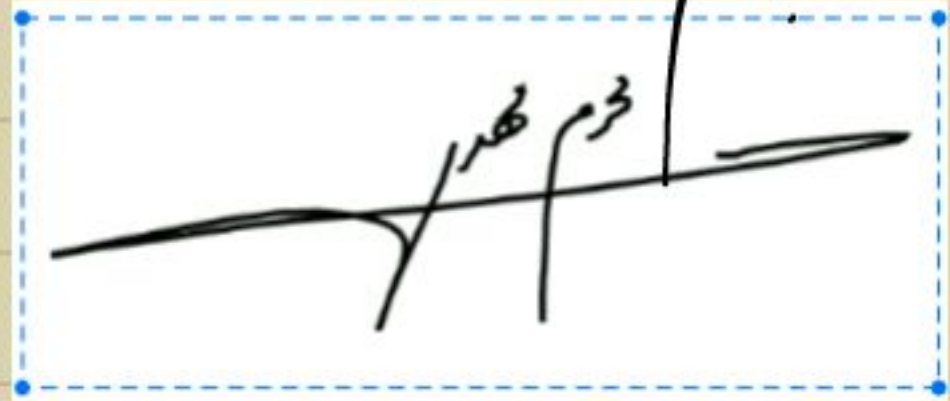


۹۹,۷,۲۲

به نام خدا

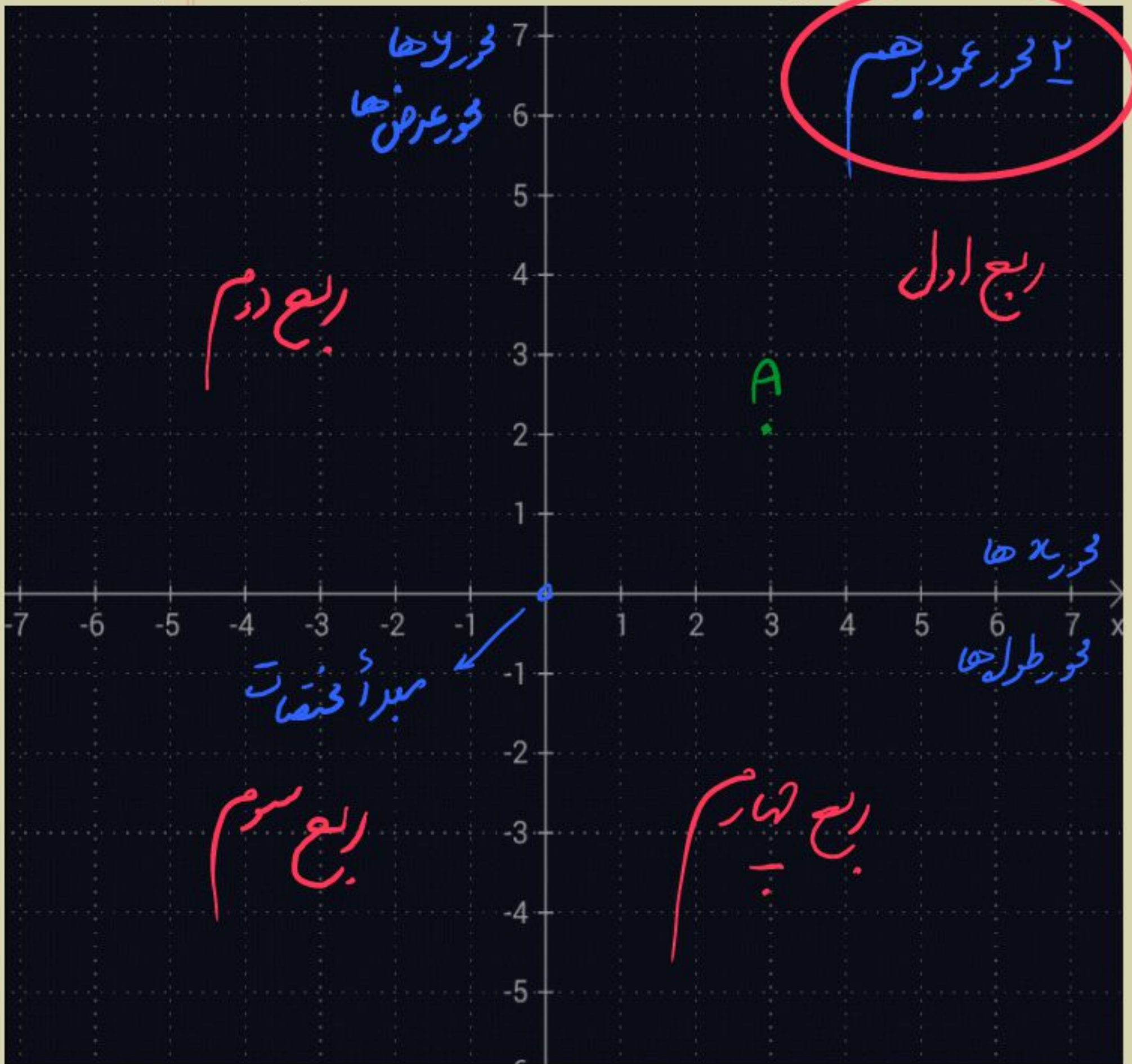
درس پنجم از فصل اول حسابان ۱

آشنایی با هندسه تحلیلی



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi

معرفی دستگاه مختصات (دکارتی)

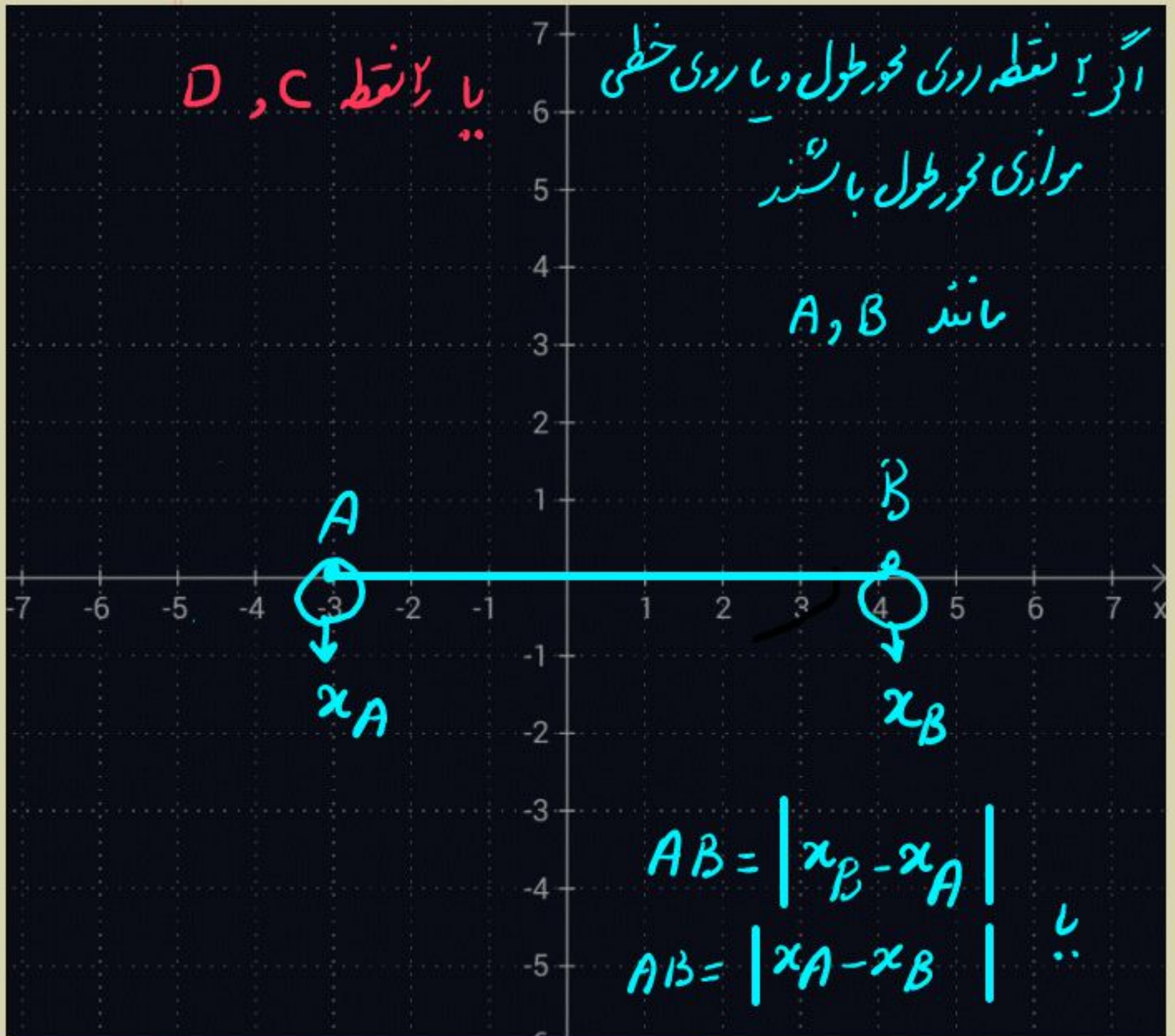


و سدا کردن فاصله دو نقطه در دستگاه مختصات دکارتی

اگر نقطه روی محور طول و یا روی خطی موازی محور طول باشند

مانند A, B

یا نقطه C, D



$$AB = |x_B - x_A|$$

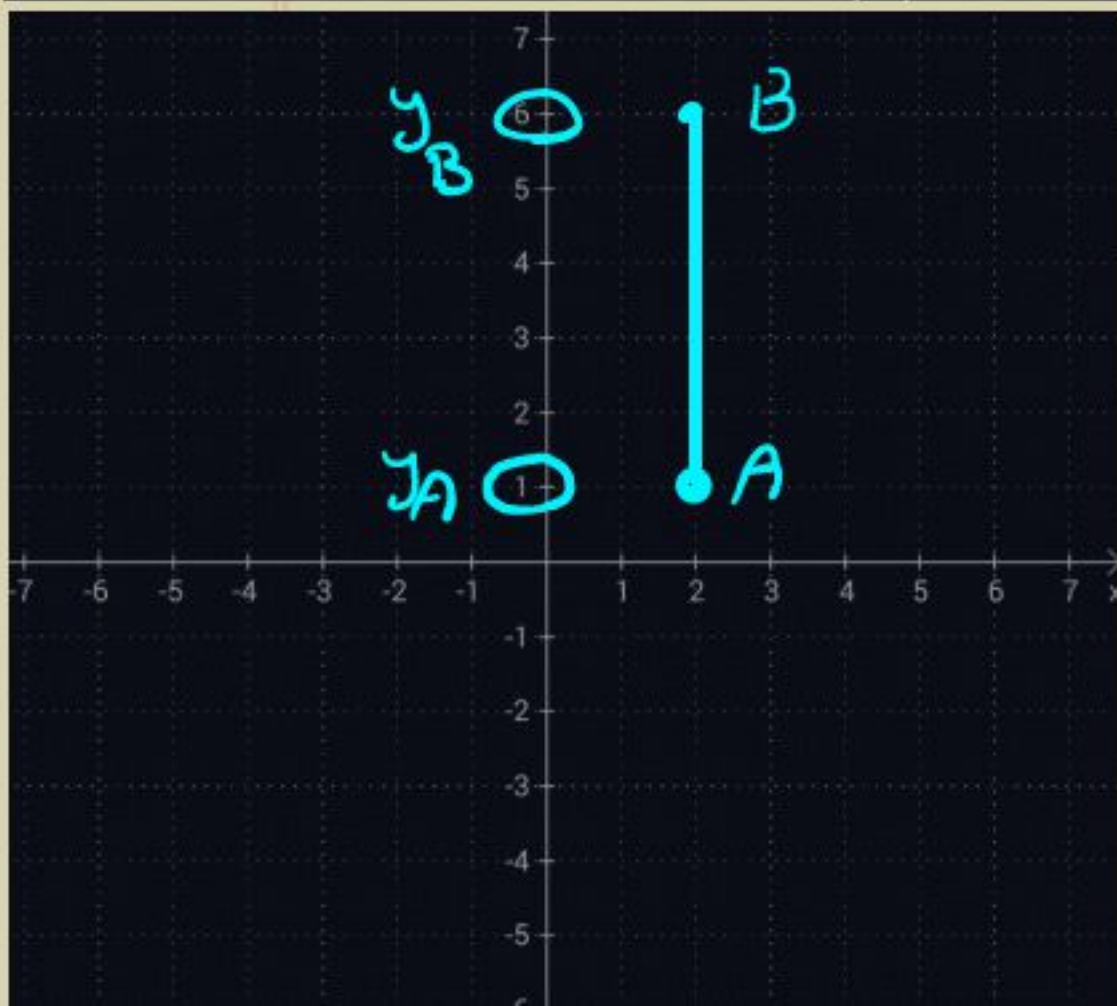
$$AB = |x_A - x_B|$$

اگر نقطه روی محور عرض و یا روی

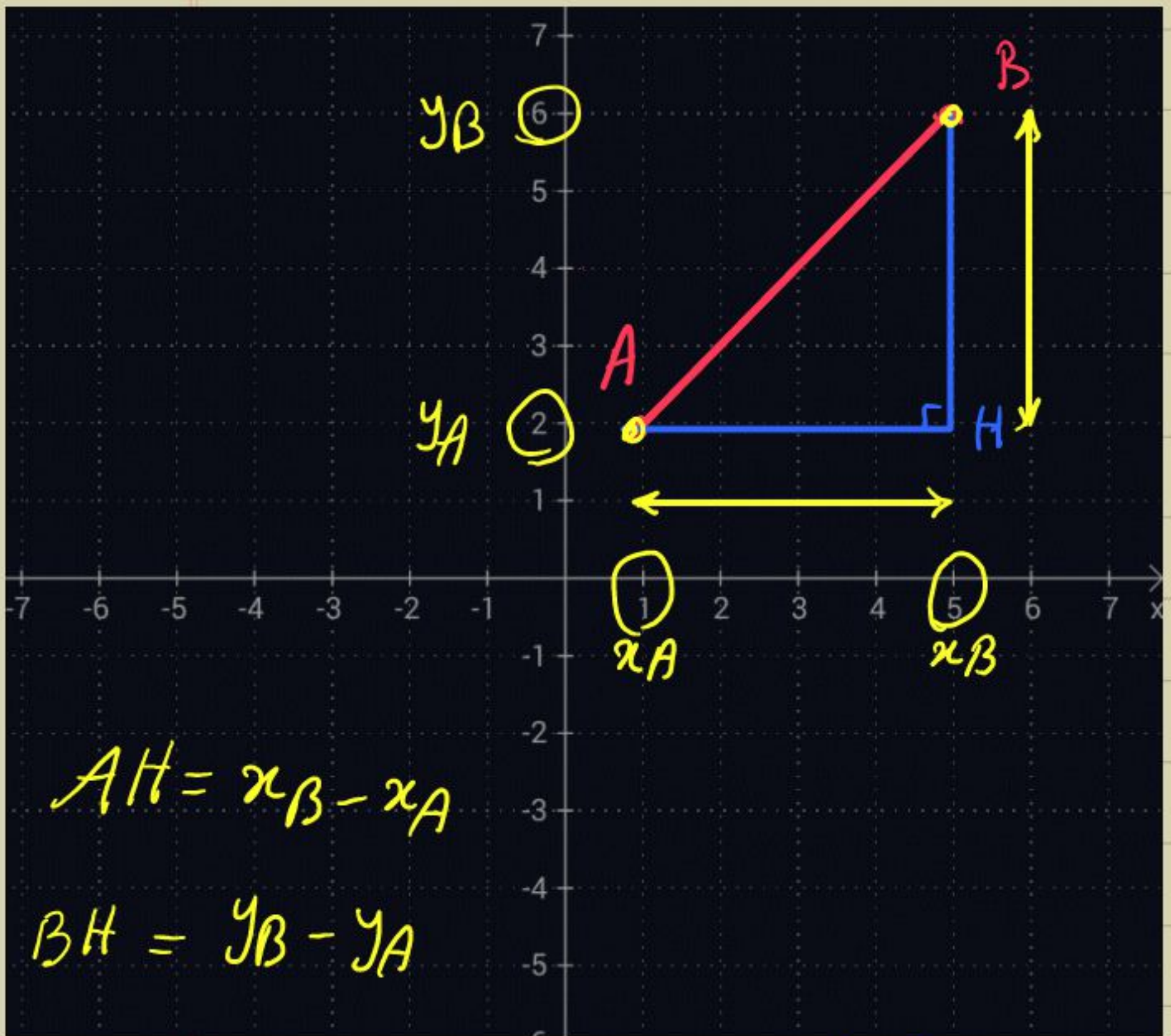
خطی موازی محور عرض باشند

$$AB = |y_A - y_B|$$

$$AB = |y_B - y_A|$$



اگر A و B دو نقطه در صفحه باشند AB موازی محورها نباشد

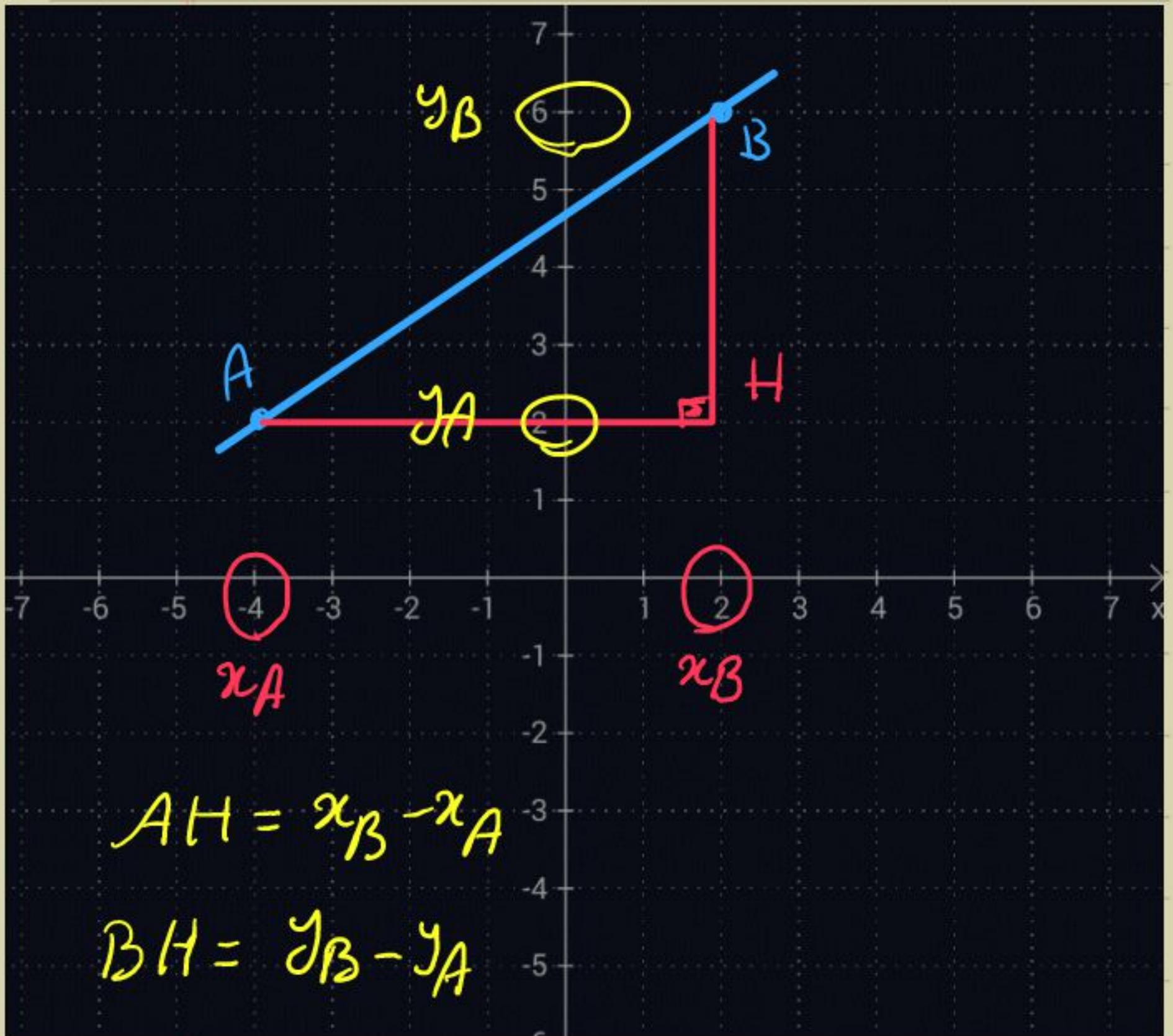


در مثل قائم الزاویه ABH : $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$AB = \sqrt{\text{مربع افقی عرضها} + \text{مربع عمودی طرها}}$

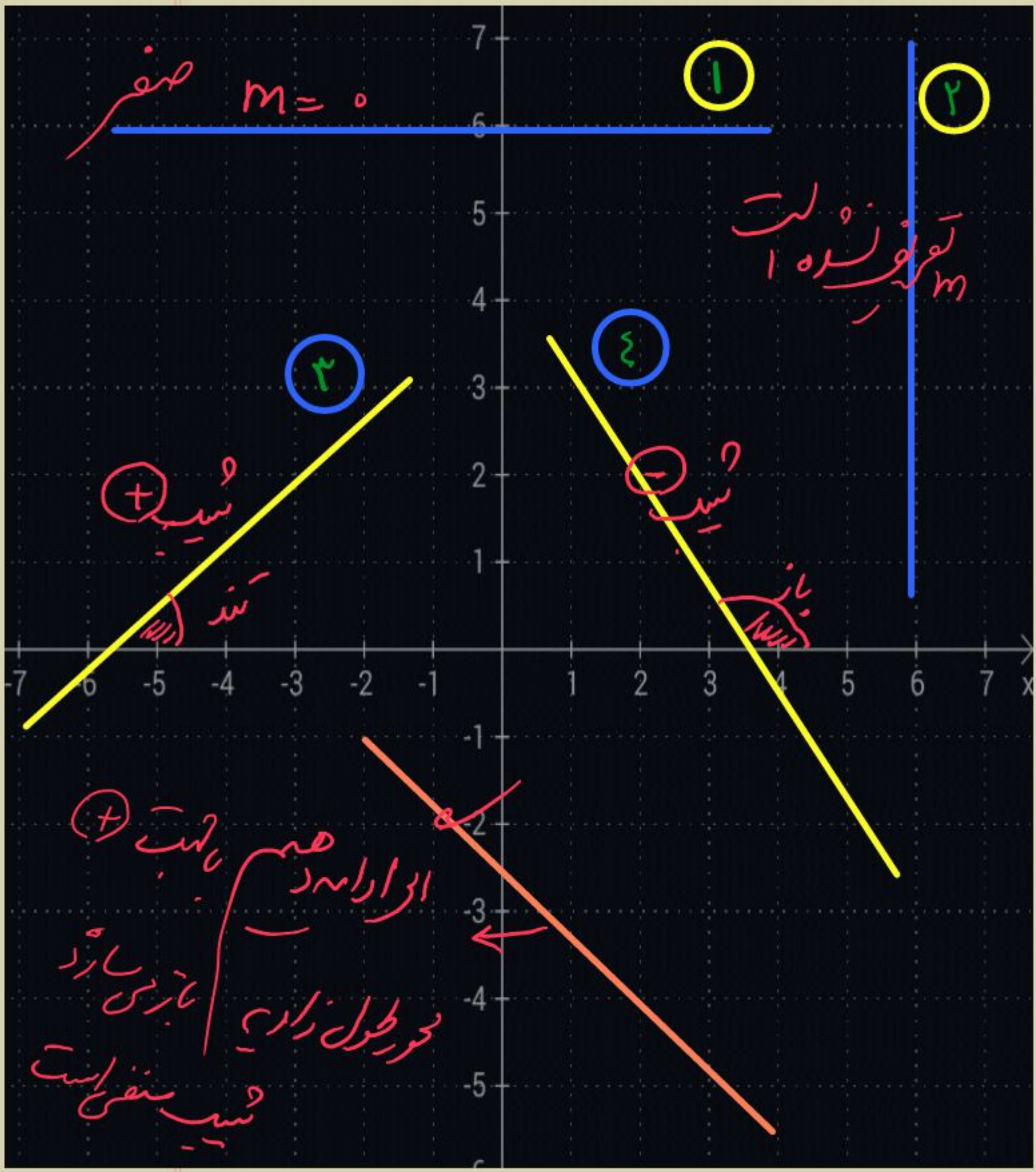
یادآوری فرمول شیب خط



$$m_{AB} = \frac{BH}{AH} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

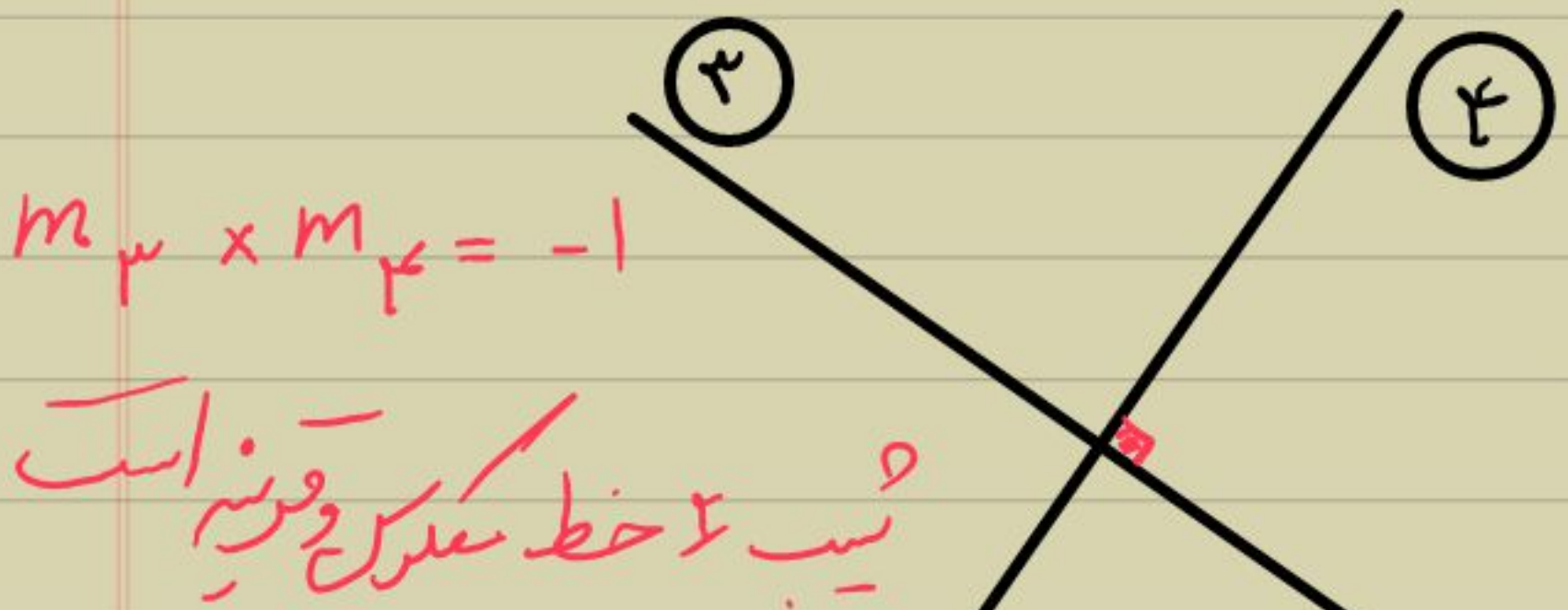
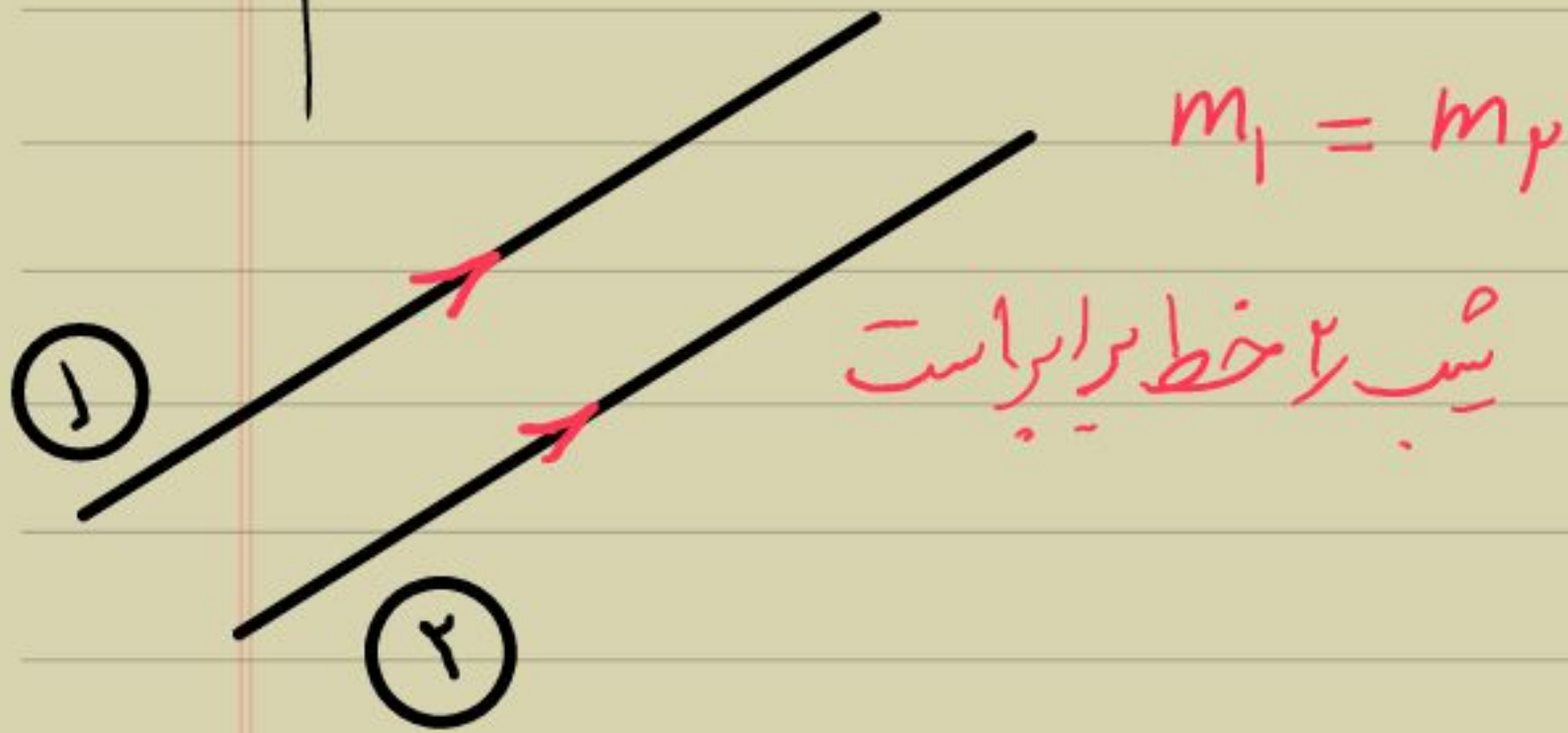
شیب خط = $\frac{\text{ارتفاع بین این نقطه}}{\text{عرض طرف همان نقطه}}$

علامت شیب خط



اگر زاویه $(+)$ است
 محور طول زاری
 شیب منفی است
 اگر زاویه $(-)$ است
 محور عرض زاری
 شیب مثبت است

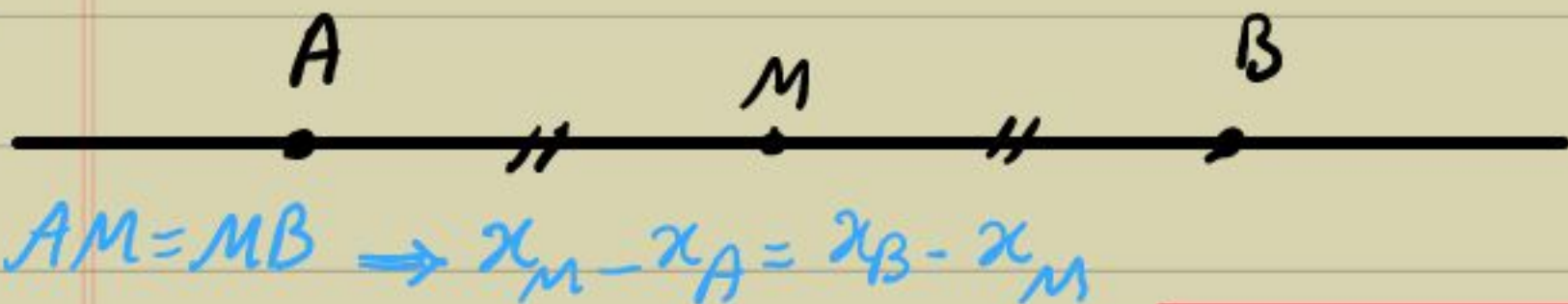
رابطه بین شیب از خط موازی و شیب از خط عمود بر هم



نکته: برای بررسی قائم الزامه بودن هر مثلث هم متوازی طول اضلاع را پیدا کرد و بررسی رابطه فیثاغورس را بررسی کرد و هم مسوا ان شیب اضلاع مثلث را پیدا کرد و عمود بودن اضلاع برید بر بررسی کرد.

مختصات نقطه وسط یک پاره خط

اگر A و B دو نقطه روی محور طول، نقطه M وسط پاره خط AB باشد



$$AM = MB \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$x_M + x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$
$$2x_M = x_A + x_B$$

اگر A و B دو نقطه روی محور عرض، نقطه M وسط پاره خط AB باشد



$$AM = MB \Rightarrow y_M - y_A = y_B - y_M$$

$$y_M + y_M = y_A + y_B$$

$$2y_M = y_A + y_B \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

بنابراین:

اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

حل یک مثال

کاربرد اول صفحه ۳۱ کتاب ریاضی

نشان دهید نقطه $P(-12, 11)$ روی عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه $A(0, -3)$ و $B(6, 15)$ قرار دارد.

راه اول:

$$PA = \sqrt{12^2 + 14^2} = \sqrt{144 + 196} = \sqrt{340}$$

$$PB = \sqrt{18^2 + 4^2} = \sqrt{324 + 16} = \sqrt{340} \Rightarrow PA = PB$$

چون فاصله P از دو سر پاره خط AB یکسان است پس P روی عمود منصف AB قرار دارد.

راه دوم:

$$m_{AB} = \frac{15 - (-3)}{6 - 0} = \frac{18}{6} = 3 \rightarrow \text{عمود منصف } m = -\frac{1}{3}$$

M وسط پاره خط AB

$$x_M = \frac{0 + 6}{2} = 3 \quad y_M = \frac{-3 + 15}{2} = 6 \quad M = (3, 6)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 3)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 7 \quad \text{معادله عمود منصف}$$

$$x = -12$$

$$y = -\frac{1}{3}(-12) + 7 = 4 + 7 = 11$$

راه سوم:

$$M = (3, 2) \text{ وسط } AB$$

شیب AB

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{15 - (-3)}{6 - 0} = \frac{18}{6} = 3$$

شیب PM

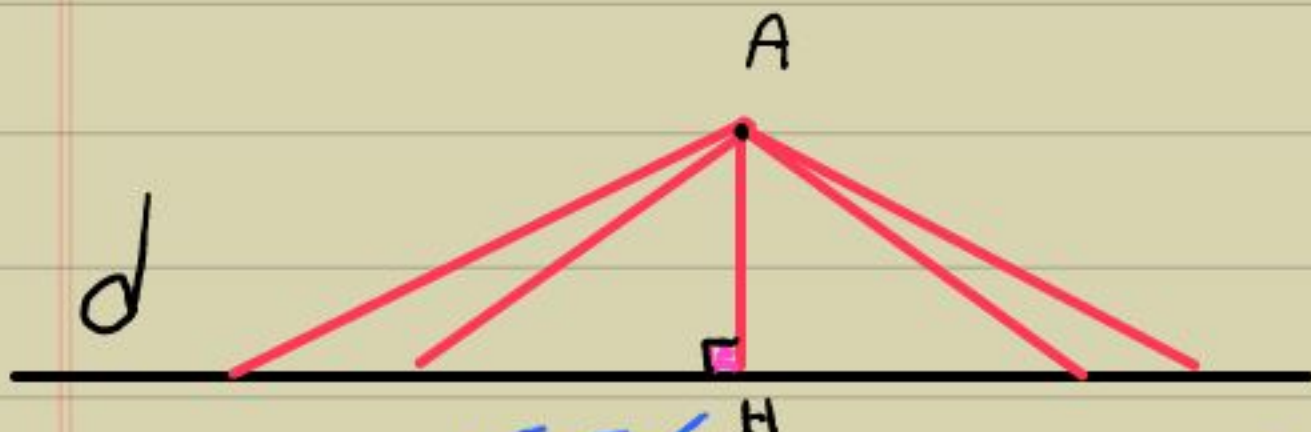
$$m_{PM} = \frac{y_M - y_P}{x_M - x_P} = \frac{2 - 11}{3 - (-12)} = \frac{-9}{15} = -\frac{3}{5}$$

$$m_{AB} \times m_{PM} = 3 \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{9}{5} \neq -1$$

برهم عمودند

فاصله یک نقطه از یک خط

از خط d و نقطه A در خارج خط را در نظر بگیریم، فاصله نقطه A تا خط d را کوتاه‌ترین فاصله A از d تعریف می‌کنیم، این فاصله را عمود AH در نظر



می‌گیریم

طول عمود از طول مایل کوتاه‌تر است

بطور کلی اگر خواهم فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ را از خط $ax + by + c = 0$ بدست آورم (طول AH) از رابطه زیر استفاده می‌کنم

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

از اثبات این فرمول صرف نظر می‌کنیم

مسئله ۱: فاصله نقطه $A(-2, 3)$ از خط $y = \frac{2}{3}x + 4$ را

بدست آورید
 x_0 y_0

$$2y = 2x + 12$$

$$d: 2x - 2y + 12 = 0$$

a b c

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(-2) + (-2)(3) + 12|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

مسئله ۲: فاصله نقطه $A(1, -4)$ از خط $11x + 4y = k$ برابر $\frac{1}{2}$ است، مقدار k چقدر است؟

$$11x + 4y - k = 0$$

a b c

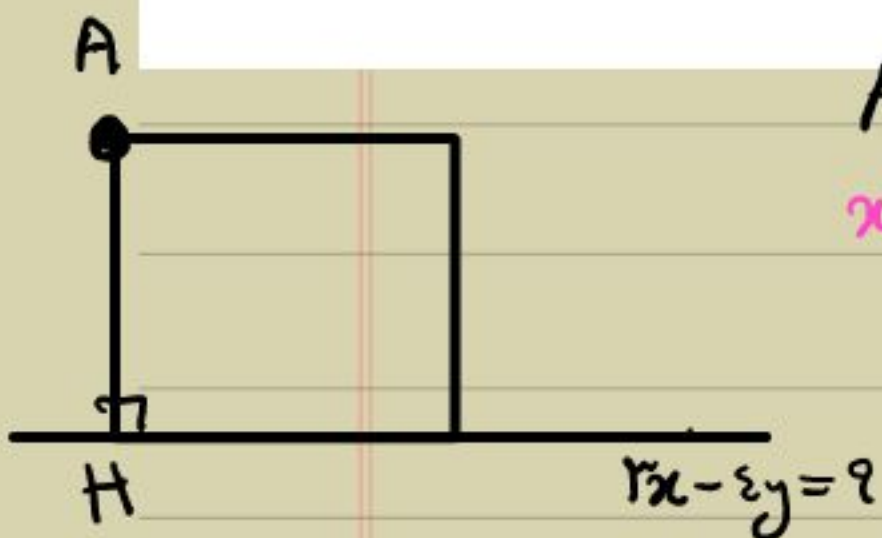
$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|11(1) + 4(-4) - k|}{\sqrt{11^2 + 4^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{|-17 - k|}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow |-17 - k| = 5$$

$$-17 - k = 5 \Rightarrow k = -17 - 5 = -22$$

$$-17 - k = -5 \Rightarrow k = -17 + 5 = -12$$

۱ اگر نقطه $A(2,3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x-4y=9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟



$$A(2,3)$$

x_0 y_0

$$AH = \frac{|3(2) + (-4)(3) - 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \Rightarrow$$

$$3x - 4y - 9 = 0$$

a b c

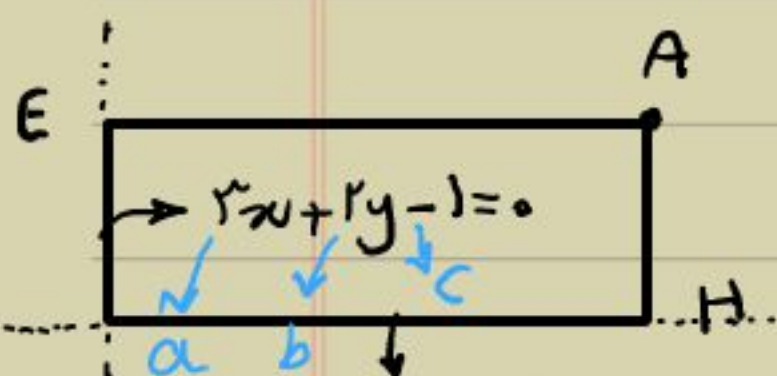
$$AH = \frac{15}{5} = 3$$

بنابراین:

$$\text{مساحت مربع} = 3^2 = 9$$

۲ دو خط $2x+3y=1$ و $2x-3y=2$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه $A(2,5)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

$$x_0$$
 y_0



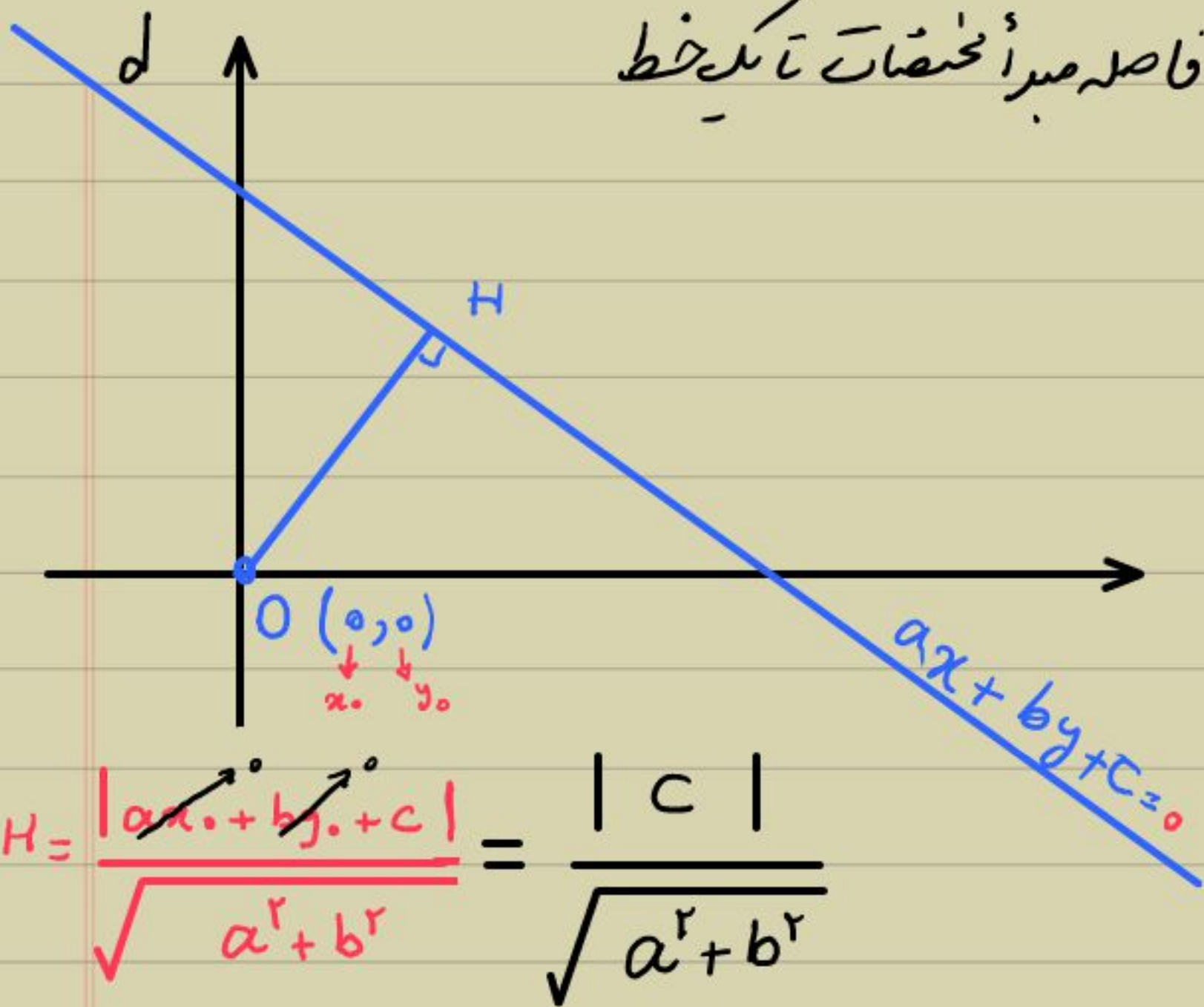
$$AH = \frac{|2(2) + (-3)(5) - 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

$$AE = \frac{|2(2) + (3)(5) - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{13}}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = AE \times AH = \frac{13}{\sqrt{13}} \times \frac{15}{\sqrt{13}} = 15$$

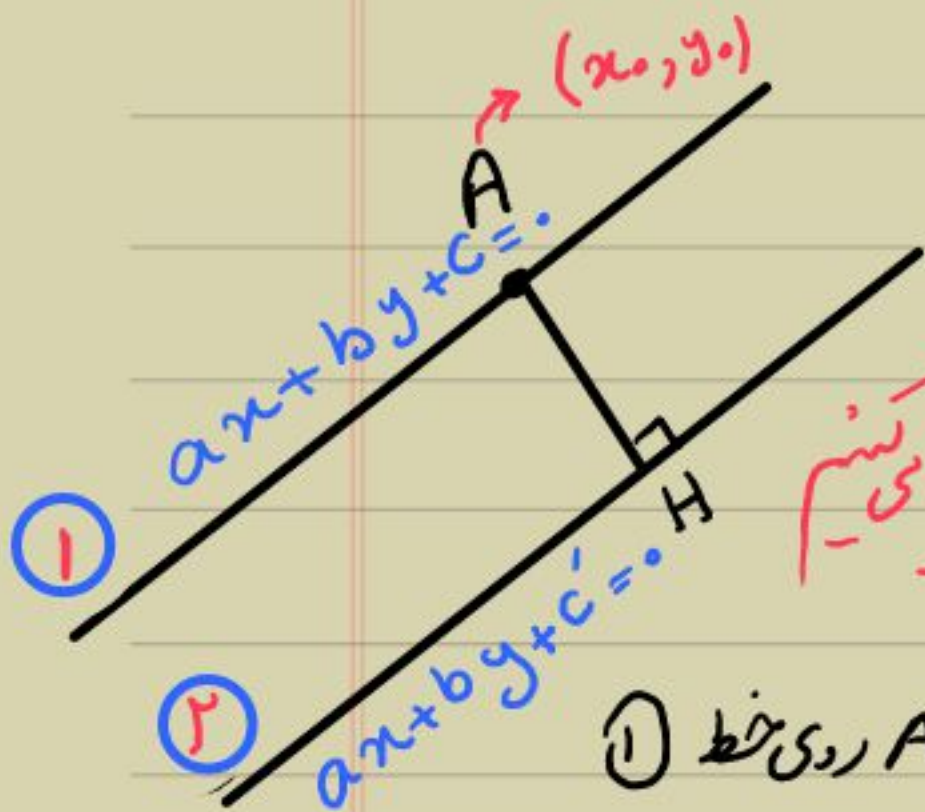
\downarrow عرض \downarrow طول

فاصله مبدأ مختصات تا یک خط



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

رسیدن کردن فاصله دو خط موازی



نقطه دکواه $A(x_0, y_0)$ را روی خط ۱ قرار می‌دهیم و فاصله آنرا از خط ۲ می‌اندازیم

① روی خط $A \Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0$

$$ax_0 + by_0 = -c$$

② فاصله A تا خط ۲ $= AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$AH = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

روش دیگر: نقطه ای به طول صفر روی خط! در نظریه کریم

در این صورت:

$$a(0) + by + c = 0 \rightarrow by = -c \rightarrow y = -\frac{c}{b}$$

مختصات نقطه $A(0, -\frac{c}{b})$

$$AH = \frac{|a(0) + b(-\frac{c}{b}) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$= \frac{|c - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

والله اعلم

سرور کلبند

99, 7, 22

محمد محمد