به نام خدا

# استدلال های ریاضی

تهیه و تنظیم :
محمود کامکار

KAMKAR

**اثبات مستقیم (استدلال استنتاجی):** روش نتیجه گیری بر مبنای حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته ایم.

**تذکر:** وقتی از اثبات مستقیم استفاده می کنیم مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است و از آنها می توان برای اثبات احکام دیگر استفاده کرد.

**مثال ۱(خرداد ۸۹) :** با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر مربع های دو عدد فرد را از هم کم کنیم حاصل عددی زوج خواهد بود.

**حل:** فرض کنید دو عدد مورد نظر $y,x$ باشند چون هر دو فردند پس $y = 2k' + 1, x = 2k + 1$ که $k, k' \in \mathbb{Z}$ پس:

$$x^2 - y^2 = (2k+1)^2 - (2k'+1)^2 = (4k^2 + 4k + 1) - \left(4k'^2 + 4k' + 1\right)$$

$$= 4k^2 + 4k - 4k'^2 - 4k' = 2\left(2k^2 + 2k - 2k'^2 - 2k'\right) = 2q \qquad q \in \mathbb{Z}$$

پس $x^2 - y^2$ زوج است.

KAMKAR

**مثال۲ (خرداد ۸۸) : نشان دهید مکعب هر عدد فرد منهای یک ، عددی زوج است.**

**حل:**

$$x = 2k + 1 \Rightarrow x^3 - 1 = (2k+1)^3 - 1$$
$$= (8k^3 + 12k^2 + 6k + 1) - 1$$
$$= 8k^3 + 12k^2 + 6k = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) = 2q \qquad q \in \mathbb{Z}$$

**پس $x^3 - 1$ زوج است.**

حل:
$x = 2k + 1 \Rightarrow x^3 - 1 = (2k+1)^3 - 1$
$= (8k^3 + 12k^2 + 6k + 1) - 1$
$= 8k^3 + 12k^2 + 6k = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) = 2q \qquad q \in \mathbb{Z}$
پس $x^3 - 1$ زوج است.

**مثال ۳(خرداد ۸۶ خارج از کشور) : با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر از ۲ برابر مربع یک عدد فرد ۲ واحد کم شود آن عدد مضرب ۸ می شود.**

**حل: فرض کنید عدد مورد نظر $x = 2k + 1$ باشد که $k \in \mathbb{Z}$ پس:**

$$2x^2 - 2 = 2(2k+1)^2 - 2 = 2(4k^2 + 4k + 1) - 2 = 8k^2 + 8k$$

$$= 8(k^2 + k) = 8q \qquad q \in \mathbb{Z}$$

**پس $2x^2 - 2$ مضرب ۸ است.**

KAMKAR

**تمرین ۱: نشان دهید مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است.**

حل :

$$x = 2k+1 \Longrightarrow x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 4\overbrace{k(k+1)}^{2q} + 1 = 4(2q) + 1 = 8q + 1 \qquad q \in \mathbb{Z}$$

KAMKAR

**تمرین ۲: با استفاده از اثبات مستقیم ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است. (دیماه ۹۵)**

**حل :**

$$\begin{cases} x = 2k-2 \\ y = 2k \\ z = 2k+2 \end{cases} \Longrightarrow xyz = (2k-2)(2k)(2k+2) = 2(k-1)(2k)[2(k+1)]$$

$$= 8\overbrace{(k-1)k(k+1)}^{q\in\mathbb{Z}} = 8q \qquad q\in\mathbb{Z}$$

KAMKAR

**تمرین۳: با استفاده از اثبات مستقیم ثابت کنید حاصل ضرب هر ۴ عدد صحیح متوالی به اضافه ۱ مربع کامل است.**

**حل :**

**فرض کنید** $x$ **و** $x+1$ **و** $x+2$ **و** $x+3$ **چهار عدد صحیح متوالی باشند پس داریم :**

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=[x(x+3)][(x+1)(x+2)]+1$$
$$=\Big(\overbrace{x^2+3x}^{t}\Big)\Big(\overbrace{x^2+3x}^{t}+2\Big)+1=t(t+2)+1=t^2+2t+1=(t+1)^2$$
$$=(x^2+3x+1)^2$$

KAMKAR

**تمرین ۸ : ثابت کنید مجموع (تفاضل ) دو عدد گویا ، عددی گویاست .**

**حل :**

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \\ y = \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q} \end{cases} \Longrightarrow x \pm y = \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} = \frac{e}{f} \in \mathbb{Q} \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z} \ , \qquad b, d \neq 0$$

KAMKAR

**تمرین ۹ : ثابت کنید حاصل ضرب هر ۳ عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است .**

KAMKAR

**مثال نقض:** به مثالی که نشان دهد نتیجه گیری کلی غلط است مثال نقض می گویند.

**تذکر:** احکام درست را باید در حالت کلی ثابت کنیم ولی اگر حکمی نادرست باشد برای اثبات نادرستی آن ارائه یک مثال نقض کافیست.

**مثال ۱:** آیا احکام زیر درست هستند؟در صورتی درستی آنها را اثبات کنید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه دهید.

الف)مجموع(تفاضل)هر دو عدد گنگ، گنگ است.
ب) حاصل ضرب و خارج قسمت هر دو عدد گنگ، گنگ است.

**حل: الف)** نادرست است زیرا $x=5+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ هر دو عدد $x,y$ گنگ هستند .

ولی $x+y=7$ گویاست. و این حکم در مورد تفاضل هم نادرست است مثلا $x=5+\sqrt{3}$, $y=2+\sqrt{3}$ هر دو عدد گنگ هستند ولی $x-y=3$ گویاست.

**ب)** هر دو حکم نادرست هستند مثلا اگر $x=\sqrt{8}$, $y=\sqrt{2}$ هر دو عدد گنگ هستند

ولی $xy=\sqrt{16}=4$ , $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=2$ هر دو گویا هستند.

KAMKAR

**تمرین۱: برای حکم $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ مثال نقض ارائه دهید؟ (خرداد ۸۵ خارج از کشور)**

**حل :**

**حکم نادرست است مثلا برای دو عدد ۴ و ۹ جواب نمی دهد**

$$\begin{cases} a=4 \\ b=9 \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{4+9} \neq \sqrt{4}+\sqrt{9} \Longrightarrow \sqrt{13} \neq 5$$

**تمرین ۲: برای رد حکم $2^n > 2$ مثال نقض بیاورید. (خرداد ۸۳)**

**حل :**

**حکم نادرست است مثلا :**

$$n=1 \Longrightarrow 2^1 \ngtr 2$$

KAMKAR

**تمرین ۳:** کدام یک از احکام زیر درست است و کدام نادرست است در صورت نادرستی مثال نقض ارائه دهید.

الف) مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچکتر است.

ب) هر مستطیل یک مربع است.

پ) مربع هیچ عدد حقیقی صفر نیست.

ت) مربع هر عدد حقیقی مثبت است.

ث) برای هر دو عدد حقیقی $x,y$، $[x-y]=[x]-[y]$

ج) هر عدد صحیح به فرم $8k+1$ مربع کامل است.

چ) به ازای هر عدد طبیعی n عدد $2^{2^n}+1$ عدد اول است.

KAMKAR

**تمرین ۴:** آیا هر  عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع مربع های دو عدد صحیح نمایش داد؟ به صورت مجموع مربعات سه عدد صحیح چطور؟

**تمرین ۵ :** آیا حکم زیر درست است ؟ در صورت درستی آن را ثابت کنید . در غیر این صورت مثال نقض ارائه دهید .

"هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع اعداد  طبیعی متوالی نوشت "

**تست :** اعداد کدام گزینه کلیت حکم " حاصل ضرب هر دو عدد گنگ عددی گنگ است" را نقض می کند. (کنکور انسانی ۷۶)

1) $\sqrt{216},\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{12},\sqrt{6}$ 3) $\sqrt{18},\sqrt{216}$ 4) $\sqrt{18},\sqrt{12}$

**پاسخ :** گزینه ۱

**زیرا:** $\sqrt{216}\times\sqrt{6}=\sqrt{36\times 6}\times\sqrt{6}=\sqrt{36\times 36}=6\times 6=36\in\mathbb{Q}$

**تست :** کلیت حکم "حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است " با چه عدد گویایی نقض می شود؟ (آزاد ۸۱)

۱) صفر ۲) اعشاری ۳) مثال نقض ندارد ۴) اعشاری متناوب مرکب

**پاسخ : گزینه ۱**

می دانیم عدد صفر گویاست و در هر عددی گنگ یا گویا ضرب شود حاصل صفر می شود و گویاست .

KAMKAR

**تست :** کدام عدد حکمیت هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت را نقض می کند؟

۱)۴۰ ۲) ۴۶ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴ (خارج از کشور ۸۸)

**پاسخ :** **گزینه ۴**

می دانیم هر عدد طبیعی به صورت $2^n$ را نمی توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت

. وچون $64 = 2^6$ پس ۶۴ را نمی توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت .

KAMKAR

**تست (کنکور ۹۲) :** کدام عدد کلیت حکم "هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت "را نقض می کند؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

**حل : گزینه ۲**

**نکته :** اعدادی که به صورت $2^n$ هستند را نمی توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت پس چون $64 = 2^6$ پس ۶۴ را نمی توان به صورت مجموع اعداد متوالی بنویسیم. ولی اعداد دیگر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$56 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

$$74 = 17 + 18 + 19 + 20$$

$$72 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$$

**تست :** کدام عبارت مثال نقض دارد؟ (کنکور انسانی ۸۰)

۱) حاصل ضرب هر دو عدد فرد متوالی فرد است.

۲) حاصل تفاضل هر دو عدد فرد عددی زوج است.

۳) حاصل جمع هر دو عدد فرد عددی زوج است.

۴) حاصل جمع هر عدد اول با یک عدد فرد، عددی فرد است.

**پاسخ :** گزینه ۴

نادرست است و مثال نقض دارد . مثلا ۳ اول است اگر با هر عدد فردی جمع شود حاصل عدد زوج است .

KAMKAR

## اثبات با در نظر گرفتن همه حالات

**یاد آوری :** اگر $p$ و $q$ و $\mathrm{r}$ سه گزاره باشند آنگاه داریم : $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

**اثبات (تمرین)**

**تذکر :** مطلب فوق را می توان برای $n$ گزاره نیز تعمیم داد .

در اثبات با در نظر گرفتن همه حالات از مطلب فوق استفاده کرده حکم را برای همه حالات ممکن مساله اثبات می کنیم .

KAMKAR

**تمرین ۱: اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی باشند و $xy = 0$ نشان دهید : $x = 0 \lor y = 0$**

## حل :

**برای $x$ دو حالت زیر را در نظر می گیریم :**

**حالت اول : اگر $x = 0$ باشد پس در این حالت حکم برقرار است زیرا $xy = 0 \times y = 0$**

**حالت دوم : اگر $x \neq 0$ پس $x^{-1} = \frac{1}{x} \neq 0$ پس داریم**

$$xy = 0 \Longrightarrow x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = x^{-1} \times 0 \Longrightarrow 1(y) = y = 0$$

**پس در هر دو حالت حکم برقرار است .**

KAMKAR

**تمرین۲ : برای هر عدد طبیعی $n$ ثابت کنید $n^2-5n+7$ عددی فرد است .**

**حل :**

**برای $n$ دو حالت زیر را در نظر می گیریم :**

**حالت اول : اگر $n$ عددی زوج باشد داریم :**

$$n=2k \Longrightarrow n^2-5n+7=(2k)^2-5(2k)+7=4k^2-10k+7=(4k^2-10k+6)+1$$

$$=2\overbrace{(2k^2-5k+3)}^{q_1\in\mathbb{Z}}+1=2q_1+1$$

**حالت دوم : اگر $n$ عددی فرد باشد داریم :**

$$n=2k+1 \Longrightarrow n^2-5n+7=(2k+1)^2-5(2k+1)+7=4k^2-6k+3$$

$$=(4k^2-6k+2)+1=2\overbrace{(2k^2-3k+1)}^{q_2\in\mathbb{Z}}+1=2q_2+1$$

**پس در هر دو حالت $n^2-5n+7$ عددی فرد است و حکم برقرار است .**

KAMKAR

**تمرین ۳:** برای هر عدد صحیح $n$ ثابت کنید اگر $n$ مضرب ۳ نباشد آنگاه $n^2$ مضرب ۳ نیست .
(با در نظر گرفتن تمام حالات )

## حل :

اگر n مضرب ۳ نباشد پس $n = 3k + 1$ یا $n = 3k + 2$

**حالت اول :** اگر $n = 3k + 1$ داریم :

$$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = (9k^2 + 6k) + 1 = 3\overbrace{(3k^2 + 2k)}^{q_1 \in \mathbb{Z}} + 1 = 3q_1 + 1$$

**حالت دوم :** اگر $n = 3k + 2$ داریم :

$$n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1 = 3\overbrace{(3k^2 + 4k + 1)}^{q_2 \in \mathbb{Z}} + 1$$
$$= 3q_2 + 1$$

پس در هر دو حالت $n^2$ مضرب ۳ نیست و حکم برقرار است .

KAMKAR

## اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

**در این روش فرض می کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از منطق گزاره ها و دنباله ای از استدلال های درست مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیر ممکن و یا متضاد با فرض می رسیم . از آنجا معلوم می شود که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می شود .**

**مثال۱:اگر برای عدد صحیح $n$ ، اگر $n^2$ زوج باشد نشان دهید $n$ زوج است. (شهریور ۹۴)**

**حل (بخ): فرض کنید $n$زوج نباشد پس فرد است پس $n=2k+1$ لذا داریم:**

$$n^2=(2\mathrm{k}+1)^2=4\mathrm{k}^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2q+1 \qquad q\in\mathbb{Z}$$

**پس $n^2$ فرد است و این با فرض مساله تناقض دارد پس فرض خلف باطل است لذا حکم درست است.**

KAMKAR

**مثال۲:** نشان دهید $\sqrt{2}$ گنگ است.

**حل (بخ) :** فرض کنید $\sqrt{2}$ گنگ نباشد پس $\sqrt{2}$ گویاست پس $\sqrt{2}$ را می توان به صورت کسر ساده نشدنی نوشت یعنی:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q} \quad ,(p,q)=1 \qquad (\mathrm{p},\mathrm{q}\in\mathbb{Z}) \quad \Longrightarrow p=\sqrt{2}q \Rightarrow p^2=2q^2 \quad (1)$$

پس $p^2$ زوج است لذا طبق مساله قبل $p$ زوج است یعنی $(2) \quad p=2k$ از ۱ و ۲ می توان نوشت

$$p^2=2q^2 \xrightarrow{p=2k} 4k^2=2q^2 \Rightarrow 2k^2=q^2$$

پس $q^2$ زوج است لذا $q$ زوج است پس $p$ و $q$ هر دو زوج اند پس هر دو بر ۲ بخش پذیرند و این با فرض $(p,q)=1$ در تناقض است پس فرض خلف باطل است لذا $\sqrt{2}$ گنگ است.

KAMKAR

**مثال۵ (خرداد ۸۵) : اگر $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ دو عدد گنگ باشند نشان دهید $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ نیز عددی گنگ است.**

**حل (بخ) : فرض کنید $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ گنگ نباشد پس گویاست لذا :** $\sqrt{3}-\sqrt{2}=a\in\mathbb{Q}$

**در نتیجه :**

$$\sqrt{3}=a+\sqrt{2}\Rightarrow 3=a^2+2a\sqrt{2}+2$$

$$\Rightarrow 1-a^2=2a\sqrt{2}\Rightarrow \frac{1-a^2}{2a}=\sqrt{2}$$

**تساوی فوق امکان ندارد زیرا طرف اول گویا و طرف دوم گنگ است پس فرض خلف باطل است لذا حکم درست است.**

KAMKAR

**مثال۶:** اگر $n$ عدد طبیعی و $n^2$ مضرب ۵ باشد نشان دهید $n$ مضرب ۵ است.

**حل (بخ) :** فرض کنید $n$ مضرب ۵ نباشد پس : $r = 1,2,3,4$ و $n = 5q + r$

لذا می توان نوشت:

$$n^2 = 25q^2 + 10qr + r^2 = 5(5q^2 + 2qr) + r^2 = 5q' + r^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 5q' + r^2 \qquad r^2 = 1,4,9,16$$

$5q'$ مضرب ۵ است ولی $r^2$ مضرب ۵ نیست پس $n^2 = 5q' + r^2$ مضرب ۵ نیست و این امکان ندارد زیرا با فرض مساله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل است لذا حکم درست است.

KAMKAR

**تمرین۱:** b عددی گویا و $\sqrt{5}$ عددی گنگ است به برهان خلف نشان دهید $\sqrt{5}-b$ هم عددی گنگ است. (خرداد ۸۹)

**حل :**

**فرض کنید $\sqrt{5}-b$ گنگ نباشد پس گویاست پس داریم :**

$$\sqrt{5}-b=a\in\mathbb{Q}\Longrightarrow\sqrt{5}=a+b=c\in\mathbb{Q}$$

**می دانیم مجموع دو عدد گویا یک عدد گویاست پس $c$ گویاست پس تساوی فوق امکان ندارد زیرا یک طرف گنگ و طرف دیگر گویاست پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است .**

KAMKAR

**تمرین۳: به برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5}$ عددی گنگ است. (شهریور ۸۰ و خرداد ۹۶)**

**حل (بخ) : فرض کنید $\sqrt{5}$ گنگ نباشد پس $\sqrt{5}$ گویاست پس $\sqrt{5}$ را می توان به صورت کسر ساده نشدنی نوشت یعنی:**

$$\sqrt{5}=\frac{p}{q} \quad ,(p,q)=1 \qquad (\mathrm{p,q}\in\mathbb{Z}) \quad \Longrightarrow p=\sqrt{5}q \Rightarrow p^2=5q^2 \quad (1)$$

**پس $p^2$ مضرب ۵ است لذا $p$ مضرب ۵ است یعنی $(2)\quad p=5k$ از ۱ و ۲ می توان نوشت**

$$p^2=5q^2 \xrightarrow{p=5k} 25k^2=5q^2 \Rightarrow 5k^2=q^2$$

**پس $q^2$مضرب ۵ است لذا $q$ مضرب ۵ است پس $p$و $q$ هر دو مضرب ۵ هستند پس هر دو بر ۵ بخش پذیرند و**

**این با فرض $(p,q)=1$ در تناقض است پس فرض خلف باطل است لذا $\sqrt{5}$ گنگ است.**

KAMKAR

**تمرین۷:** می دانیم $\sqrt{6}$ گنگ است به برهان خلف ثابت کنید $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ گنگ است.

**حل :**

فرض کنید $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ گنگ نباشد پس گویاست پس داریم :

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = a \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{5+2\sqrt{6}}{3-2} = (5+2\sqrt{6}) = a \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{6} = \frac{a-5}{2}$$

می دانیم $a$ گویاست پس $\frac{a-5}{2}$ گویاست و $\sqrt{6}$ گنگ است پس تساوی فوق امکان ندارد زیرا یک طرف گنگ و طرف دیگر گویاست پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است .

KAMKAR

**تمرین۸:** اگر $a_1$ و $a_2$ و $a_3$ اعداد صحیح باشند و $b_1$ و $b_2$ و $b_3$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند .ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است .

**حل :**

فرض کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد پس فرد است پس هر سه عدد $a_1-b_1$ و $a_2-b_2$ و $a_3-b_3$ فرد هستند پس مجموع این ۳ عدد نیز فرد است . اما داریم :

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)=(a_1+a_2+a_3)-(b_1+b_2+b_3)=0$$

و می دانیم عدد صفر یک عدد زوج است و این با فرد بودن مجموع فوق تناقض دارد پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است .

KAMKAR

**تمرین ۹ :** به برهان خلف ثابت کنید :

**الف :** اگر $x$ گویا و $y$ گنگ باشد آنگاه $x+y$ گنگ است . (خرداد ۹۴)

**ب :** حاصل ضرب یک عدد گنگ و یک عدد گویای مخالف صفر همواره گنگ است .

**حل الف :**

فرض کنید $x+y$ گنگ نباشد پس گویاست پس داریم : $x+y=a\in\mathbb{Q}\Longrightarrow y=a-x=c\in\mathbb{Q}$

می دانیم تفاضل دو عدد گویا یک عدد گویاست پس $c$ گویاست پس تساوی فوق امکان ندارد زیرا یک طرف گنگ و طرف دیگر گویاست پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است .

**حل ب :**

فرض کنید $x$ یک عدد گویای مخالف صفر و $y$ یک عدد گنگ باشد ثابت می کنیم $xy$ گنگ است .

فرض کنید $xy$ گنگ نباشد پس گویاست پس داریم : $xy=a\in\mathbb{Q}\Longrightarrow y=\frac{a}{x}=c\in\mathbb{Q}$

می دانیم خارج قسمت این دو عدد گویا یک عدد گویاست پس $c$ گویاست پس تساوی فوق امکان ندارد زیرا یک طرف گنگ و طرف دیگر گویاست پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است .

KAMKAR

**تمرین ۱۰:** اگر $x$ یک عدد گنگ باشد به برهان خلف ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است .

**حل :**

فرض کنید $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد پس گویاست پس داریم :

$$\frac{1}{x} = a \in \mathbb{Q} \Longrightarrow x = \frac{1}{a} = c \in \mathbb{Q}$$

می دانیم عکس یک عدد گویای مخالف صفر یک عدد گویاست پس $c$ گویاست پس تساوی فوق امکان ندارد زیرا یک طرف گنگ و طرف دیگر گویاست پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است .

KAMKAR

**تمرین ۱۱ :** اگر تابع $f$ در $x=a$ پیوسته باشد ولی تابع $g$ در $x=a$ ناپیوسته باشد .
به برهان خلف ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است .

**حل :**

چون f در $x=a$ پیوسته است پس: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

حالافرض کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته نباشد پس در این نقطه پیوسته است پس:

$$\lim_{x\to a}(f+g)_{(x)}=(f+g)_{(a)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)\xRightarrow{\lim_{x\to a} f(x)=f(a)} f(a)+\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

تساوی فوق نشان می دهد که تابع $g$ در $x=a$ پیوسته است و این با فرض مساله تناقض دارد پس فرض خلف باطل است و حکم برقرار است .

KAMKAR

**تست : اثبات کدام قضیه زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟ (کنکور ۸۶)**

1) **عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.**

۲) **از یک نقطه فقط یک خط موازی مفروض می توان رسم کرد.**

۳) **در یک صفحه از نقطه مفروض فقط یک خط می توان بر خط مفروض عمود کرد.**

۴) **مربع هر عدد طبیعی فرد از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.**

**پاسخ : گزینه ۴**

**زیرا :**

$$x = 2k + 1 \Longrightarrow x^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Longrightarrow x^2 = 4k(k+1) + 1 = 8q + 1$$

## اثبات بازگشتی / گزاره های هم ارز:

اگر p و q دو گزاره باشند می دانیم $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ بنابراین اگر $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ هر دو درست باشند آنگاه $p \Leftrightarrow q$ نیز درست است در واقع p و q هم ارز هستند از این نوع استدلال می توان بسیاری از احکام را ثابت کرد . به عبارت ساده تر در این نوع اثبات فرض می کنیم حکم درست باشد سپس با یک سری اعمال درست حکم را آنقدر تغییر داده تا به یک رابطه بدیهی و همیشه درست برسیم چنانچه تمام روابط برگشت پذیر باشند گوئیم حکم همواره درست است.

KAMKAR

**مثال ۱ :** ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست .

**اثبات ( اثبات بازگشتی) :** فرض کنید $x$ و $y$ دو عدد نامنفی باشند با اثبات باز گشتی نشان می دهیم :

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

فرض کنید حکم درست باشد پس $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ لذا داریم:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} (x+y) \geq 2\sqrt{xy} \overset{\text{توان}\,2}{\Longleftrightarrow} (x+y)^2 \geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

رابطه $(x-y)^2 \geq 0$ همواره بدیهی است و تمام روابط هم برگشت پذیرند پس حکم درست است.

KAMKAR

**مثال۲ (شهریور ۸۱) :** برای هر سه عدد حقیقی و مثبت $z,y,x$ ثابت کنید :

$$x^2+y^2+z^2+1\geq 2(xy+z)$$

**حل (اثبات بازگشتی) :** فرض کنید حکم درست باشد پس می توان نوشت:

$$x^2+y^2+z^2+1\geq 2(xy+z)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+1\geq 2xy+2z$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+1-2xy-2z\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(z^2-2z+1)\geq 0\Leftrightarrow (x-y)^2+(z-1)^2\geq 0$$

رابطه حاصل همواره بدیهی است و تمام روابط برگشت پذیرند پس حکم درست است.

KAMKAR

**مثال ۳:** برای هر دو عدد حقیقی و مثبت $x,y$ ثابت کنید: $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$

**حل (اثبات بازگشتی) :** فرض کنید حکم درست باشد پس:

$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x^2+2y^2+2 \geq 2xy+2x+2y \Leftrightarrow$$

$$2x^2+2y^2+2-2xy-2x-2y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 \geq 0$$

رابطه حاصل بدیهی است و تمام روابط برگشت پذیرند پس حکم درست است.

KAMKAR

**تمرین ۱:** اگر $a > 0$ ثابت کنید : $a + \frac{1}{a} \geq 2$ .

**حل (اثبات بازگشتی) : فرض کنید حکم درست باشد پس می توان نوشت:**

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

**رابطه حاصل همواره بدیهی است و تمام روابط برگشت پذیرند پس حکم درست است.**

**تمرین ۲:** اگر $a < 0$ ثابت کنید : $a + \frac{1}{a} \leq -2$ .

**حل (اثبات بازگشتی) : فرض کنید حکم درست باشد پس می توان نوشت:**

$$a + \frac{1}{a} \leq -2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq -2a \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 \geq 0$$

**رابطه حاصل همواره بدیهی است و تمام روابط برگشت پذیرند پس حکم درست است.**

KAMKAR

**تمرین ۵:** اگر $a,b$ دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a+b>0$ نشان دهید : $\frac{a^3+b^3}{a+b} \geq ab$ . (خرداد ۹۰)

**حل :**

فرض کنید حکم درست باشد پس داریم :

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} \geq ab \Leftrightarrow \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a+b} \geq ab \overset{a+b>0}{\Longleftrightarrow} a^2-ab+b^2 \geq ab$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

رابطه حاصل بدیهی و تمام روابط برگشت پذیرند پس حکم درست است

KAMKAR

**تمرین ۶:** برای هر دو عدد حقیقی $b,a$ ثابت کنید : $a^2+1\geq b(2-b)$ . (خرداد۹۴)

**حل (اثبات بازگشتی) : فرض کنید حکم درست باشد پس می توان نوشت:**

$$a^2+1\geq b(2-b)\Leftrightarrow a^2+1\geq 2b-b^2\Leftrightarrow a^2+1-2b+b^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+(b^2-2b+1)\geq 0\Leftrightarrow a^2+(b-1)^2\geq 0$$

**رابطه حاصل همواره بدیهی است و تمام روابط برگشت پذیرند پس حکم درست است.**

KAMKAR

**تمرین ۷:** برای هر دو عدد حقیقی $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ ثابت کنید : $a^2+ab+b^2\geq 0$

**حل :**

**فرض کنید حکم درست باشد پس داریم :**

$$a^2+b^2+ab\geq 0 \Leftrightarrow \left(a^2+ab+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{3b^2}{4}\geq 0 \Leftrightarrow (a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}\geq 0$$

**رابطه حاصل بدیهی و تمام روابط برگشت پذیرند پس حکم درست است**

KAMKAR

**تمرین ۸:** برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ و z ثابت کنید :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

**حل (اثبات بازگشتی) : فرض کنید حکم درست باشد پس:**

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$$

**رابطه حاصل بدیهی است و تمام روابط برگشت پذیرند پس حکم درست است.**

KAMKAR

**تمرین ۱۰: ثابت کنید :**

**الف)** $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{2}+\sqrt{5}$

**ب)** $\sqrt{29}+\sqrt{31} < 2\sqrt{30}$

KAMKAR

**تست :** در استدلال یک قضیه فرض کرده ایم که حکم برقرار باشد و پس از یک دسته اعمال به یک رابطه بدیهی و یا فرض قضیه رسیده ایم برای تکمیل اثبات لازم است کدام مورد برقرار باشد؟ (کنکور ۷۹)

1) اثبات قضیه کامل است و نیاز به فرض دیگری نیست.

۲) مراحل انجام شده بازگشت پذیر باشد.

۳) یک مثال که در شرایط قضیه صدق و از آن حکم قضیه نتیجه شود مورد نیاز است.

۴) یک مثال نقض ارئه شود.

**پاسخ : گزینه ۲**

**زیرا لازم است مراحل انجام شده بازگشت پذیر باشد . (اثبات بازگشتی )**

**تست :** در اثبات رابطه ((برای هر دو عدد حقیقی $x,y$ ثابت کنید: $x^2 + y^2 + xy \geq 0$)) به روش باز گشتی از درستی کدام گزاره حکم را نتیجه می گیریم ؟

**۱)** $(x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$ **۲)** $(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$

**۳)** $(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{y^2}{4} \geq 0$ **۴)** $(x + \frac{y}{2})^2 - \frac{y^2}{4} \geq 0$

**پاسخ :** **گزینه ۲**

**طبق اثبات بازگشتی داریم :**

$$x^2 + y^2 + xy \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + xy + \frac{y^2}{4}\right) + \frac{3y^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$$

KAMKAR

# پایان

KAMKAR