درسنامه درس حسابان ۲ (فصل ۴)

سال دوازدهم - رشته ریاضی فیزیک

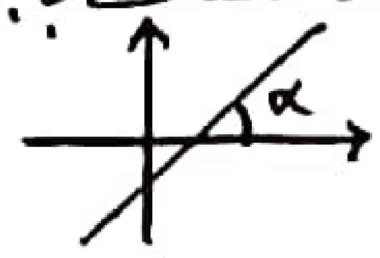
شامل درسنامه کاربردی و حل مثال

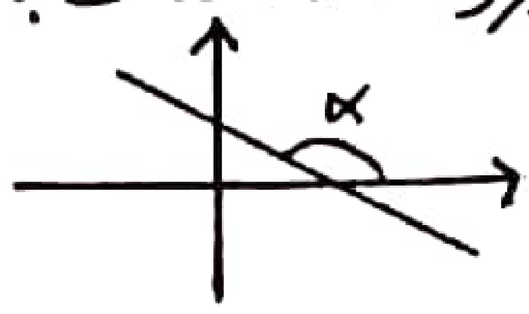
ابراهیم موسی پور

★ آشنایی با مفهوم مشتق ★

مقدمه‌ی ۱: ایده اولیه مفهوم مشتق، با دیدگاه هندسی، به شیب یک خط مربوط می‌شود. لذا مطالب زیر در مورد شیب خط یادآوری می‌گردد:

۱- هرگاه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه از یک خط در دستگاه مختصات باشند، آنگاه شیب آن خط برابر است با: $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ ، مثلاً شیب خطی که از نقاط $A(-2,1)$ و $B(1,4)$ می‌گذرد برابر است با: $m_{AB}=\frac{4-1}{1-(-2)}=\frac{3}{3}=1$

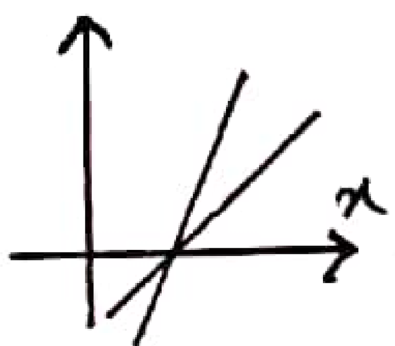
۲- هرگاه شیب خطی مثبت باشد، آن‌گاه زاویه آن خط در دستگاه مختصات با جهت مثبت محور x ها، زاویه‌ای حاده می‌باشد و بالعکس. یعنی نمودار آن خط در دستگاه مختصات به صورت:  $(0<\alpha<90^\circ)$

۳- هرگاه شیب خطی منفی باشد، آن‌گاه زاویه آن خط در دستگاه مختصات با جهت مثبت محور x ها، زاویه‌ای منفرجه می‌باشد و بالعکس. یعنی نمودار آن خط در دستگاه مختصات به صورت  می‌باشد. $(90^\circ<\alpha<180^\circ)$

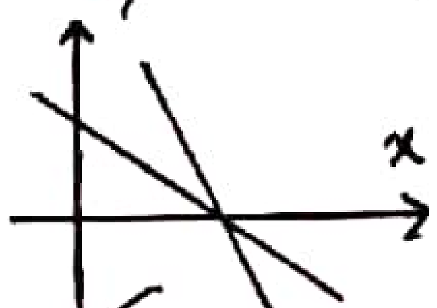
۴- معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(x_A, y_A)$ با شیب m می‌گذرد، عبارت است از: $y-y_A=m(x-x_A)$.

۵- هرگاه شیب خطی صفر باشد آن گاه آن خط در دستگاه مختصات افقی است و بالعکس.
لذا معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(x_A, y_A)$ با شیب صفر می‌گذرد، عبارت است از: $y=y_A$.

۶- هرگاه شیب خطی نامعین (∞) باشد، آن‌گاه آن خط در دستگاه مختصات قائم است و بالعکس.
لذا معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(x_A, y_A)$ با شیب نامعین می‌گذرد عبارت است از: $x=x_A$.



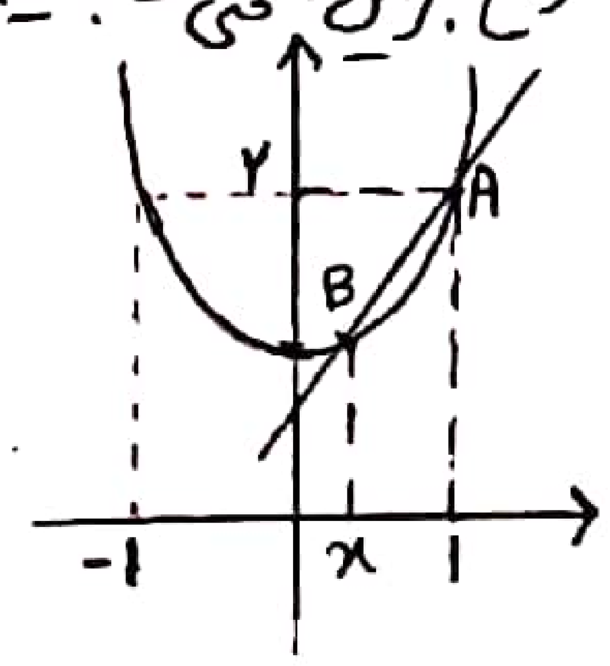
۷- از دو خط با شیب‌های مثبت، خطی که نسبت به جهت مثبت محور x ها خوابیده‌تر است، شیب کمتری دارد.



۸- از دو خط با شیب‌های منفی، خطی که نسبت به جهت منفی محور x ها خوابیده‌تر است، شیب بیشتری دارد.

مقدمه‌ی ۲:

می‌خواهیم شیب خط مماس بر نمودار منحنی تابع $f(x)=x^2+1$ را در نقطه‌ی $A(1, \overset{=2}{f(1)})$ واقع بر این منحنی حساب کنیم.



بدین منظور، نقطه‌ی B را روی منحنی تابع در سمت چپ یا سمت راست نقطه‌ی A و نزدیک آن در نظر بگیریم، چون B نقطه‌ی دلخواهی روی منحنی تابع می‌باشد، با توجه به ضابطه‌ی تابع، مختصات آن عبارت است از: $B(x, f(x))=B(x, x^2+1)$

لذا شیب قاطع AB برابر است با: $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{(x^2+1)-2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}$

به طور شهودی می‌توان گفت: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ی A، حد شیب قاطع‌های گذرنده از نقاط A و B است به شرطی که نقطه‌های متغیر B به قدر کافی (رفته رفته) به A نزدیک شوند. لذا خواهیم داشت:

شیب خط مماس بر منحنی f در A: $m_A=\lim_{B\to A}(m_{AB})=\lim_{B\to A}\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

مفهوم هندسی مشتق: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ی $A(a, f(a))$ به صورت مقابل تعریف می‌شود: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
در صورتی که این حد مقداری برایش موجود باشد، آن را مشتق تابع f در نقطه‌ی a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند. لذا تعریف مشتق تابع f در نقطه‌ی a عبارت است از: $f'(a)=\lim\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و تعبیر هندسی آن، شیب خط مماس بر منحنی f در a می‌باشد. ★ لازم به تذکر است هرگاه در این تعریف از تغییر متغیر $x-a=h$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$x-a=h \Rightarrow x=a+h \ , \ \{x\to a \Rightarrow h\to 0\} \Rightarrow f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال: اگر $f(x)=-x^2+10x$، $f'(2)$ را به دو روش حساب کنید.

روش اول:
$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-x^2+10x-(-4+20)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-x^2+10x-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x^2-10x+16)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}(x-8)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}-(x-8)=-(-6)=\boxed{6}$$

روش دوم:
$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(2+h)^2+10(2+h)-(-4+20)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-4-4h-h^2+20+10h+4-20}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h-h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(6-h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(6-h)=\boxed{6}$$

مثال: اگر $f(x)=3x^2-2x+1$، $f'(2)$ را به دست آورده و معادله‌ی خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

جواب:
$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x+1-(12-4+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{x-2}$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^2-2x-8 & x-2 \\ \hline -3x^2+6x & 3x+4 \\ \quad 4x-8 & \\ \quad -4x+8 & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(3x+4)=\boxed{10}$$

$f(2)=12-4+1=9 \Rightarrow A(2,9)\ ,\ m_A=f'(2)=10 \Rightarrow$ معادله‌ی مماس: $\boxed{y-9=10(x-2)}$

مثال: اگر $f(x)=x^2+2x-1$، $f'(-1)$ را بدست آورده و معادله‌ی خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ی A به طول (-1) واقع بر آن بنویسید.

جواب:
$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x-1-(1-2-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+1}}=0$$

$f(-1)=1-2-1=-2 \Rightarrow A(-1,-2)\ ,\ m_A=f'(-1)=0 \Rightarrow$ معادله‌ی مماس: $\boxed{y=-2}$

مثال: مشتق تابع f با هر یک از ضابطه‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده، با استفاده از تعریف حساب کنید.

الف) $f(x)=x^3\ ;\ a=-2 \Rightarrow f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{x+2}}=\boxed{12}$

ب) $f(x)=\frac{1}{x}\ ;\ a=2 \Rightarrow f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x(x-2)}$

$$\Rightarrow f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{2x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}=\boxed{-\frac{1}{4}}$$

پ) $f(x)=\sqrt{4x+5}\ ;\ a=1 \Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-3}{x-1}\times\frac{\sqrt{4x+5}+3}{\sqrt{4x+5}+3}$

$$\Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{4x+5-9}{(x-1)(\sqrt{4x+5}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{4x+5}+3)}=\frac{4}{3+3}=\frac{4}{6}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

تمرینات صفحات ۸۱ و ۸۲ را حل کنید.

ت) $f(x)=\cos x\ ;\ a=0 \Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\times\frac{\cos x+1}{\cos x+1}$

$$\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos^2 x)}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}(-\sin x)\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x+1}$$
$$=0\times 1\times\frac{1}{2}=\boxed{0}$$

★ مشتق‌پذیری و پیوستگی ★

تعریف مشتق‌های راست و چپ: مشتق‌های راست و چپ تابع f را در $x=a$ با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهند و تعریف آن‌ها عبارتست از:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \quad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad , \quad f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تعریف مشتق‌پذیری: تابع f را در $x=a$ مشتق‌پذیر گویند، هرگاه مشتق راست و چپ f در این نقطه موجود (یعنی عددی از اعداد حقیقی) و باهم برابر باشند، به عبارتی: $f'_+(a)=f'_-(a)=f'(a)\in\mathbb{R}$

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & ; x\geq 1\\ 2x & ; x<1\end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.

جواب: $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2+1)-(1+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$

$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-(1+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2 \Rightarrow f'_+(1)=f'_-(1)=f'(1)=2$

پس f در $x=2$ مشتق‌پذیر است.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; x<1\\ x+1 & ; x\geq 1\end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.

جواب: $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)-(1^2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1^2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2 \Rightarrow$ f در $x=1$، مشتق‌ناپذیر است.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x|$ را در $x=0$ بررسی کنید.

جواب: $f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$ و $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$

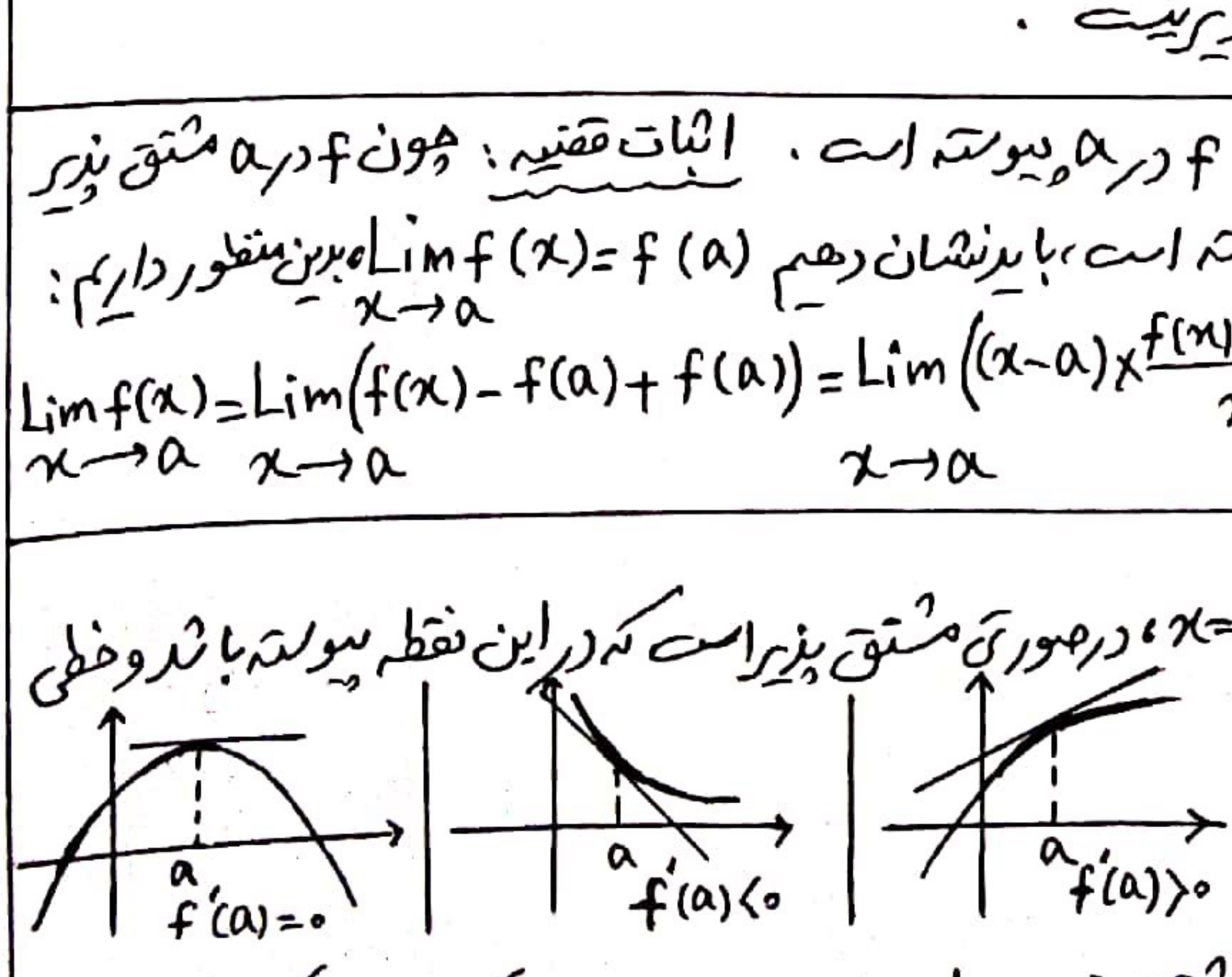
چون $f'_+(0)\neq f'_-(0)$، پس f در $x=0$، مشتق‌پذیر نیست.

★ قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a پیوسته است. اثبات قضیه: چون f در a مشتق‌پذیر است پس $f'(a)\in\mathbb{R}$. برای اینکه نشان دهیم f در a پیوسته است، باید نشان دهیم $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$، به این منظور داریم:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)+f(a)\right)=\lim_{x\to a}\left((x-a)\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\right)=0\times f'(a)+f(a)=0+f(a)=f(a)$$

★ چند نکته پیرامون مشتق‌پذیری:

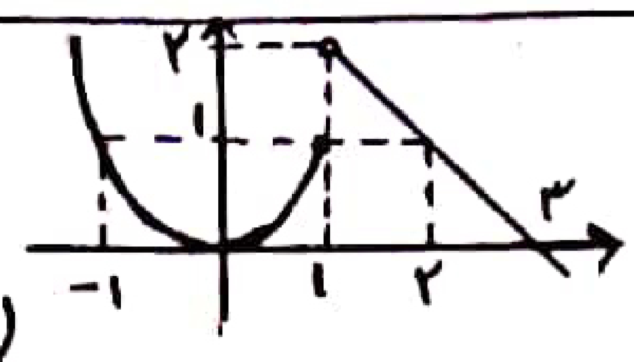
۱- به زبان ساده تابع f در $x=a$، در صورتی مشتق‌پذیر است که در این نقطه پیوسته باشد و خطی با شیب مثبت، منفی یا صفر بتوان بر نمودار f مماس کرد.



۲- هرگاه تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آنگاه f در $x=a$، مشتق‌پذیر هم نیست، همچنین تابعی ممکن است در یک نقطه پیوسته

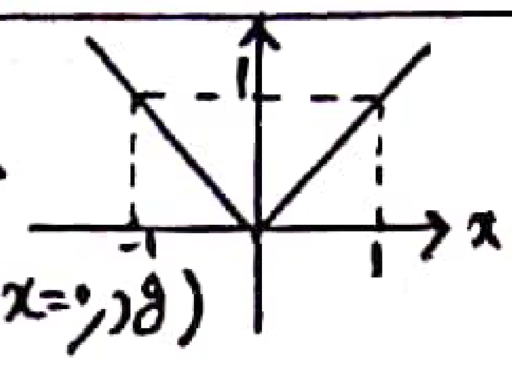
- باشد ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشد.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 ; & x\leq 1 \\ -x+3 ; & x>1 \end{cases} \Rightarrow$$



(f در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست.)

$g(x)=|x| \Rightarrow$



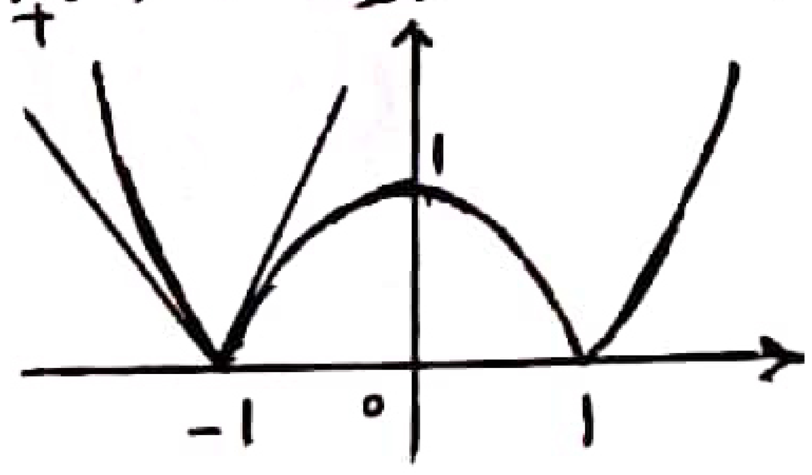
(g در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.)

۳- هرگاه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه نیم‌خط‌های مماس راست و چپ را بر نمودار f در $A(a, f(a))$ به اختصار نیم‌مماس‌های راست و نیم‌مماس چپ می‌نامند. لذا $f'_+(a)$ شیب نیم‌مماس راست و $f'_-(a)$ شیب نیم‌مماس چپ می‌باشد. لازم به تذکر است اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و نابرابر باشند، آن‌گاه f در a مشتق‌پذیر نیست و نقطه‌ی $A(a, f(a))$ را نقطه‌ی گوشه‌ای یا زاویه‌دار بر نمودار f می‌نامند. مثال: اولاً: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در $x=-1$ بررسی کنید. ثانیاً: معادلات نیم‌مماس‌های راست و چپ را در این نقطه بنویسید.

جواب: $f'_+(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{|x^2-1|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{|x+1||x-1|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{(x+1)(-x+1)}{x+1}=2$

$f'_-(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{|x+1||x-1|}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{-(x+1)(-x+1)}{x+1}=-2 \Rightarrow f'_-(-1)\neq f'_+(-1) \Rightarrow$ f در $x=-1$ مشتق‌ناپذیر است

معادلات نیم‌مماس‌ها:
$$\begin{cases} A(-1,0),\ m_1=f'_+(-1)=2 \Rightarrow y=2(x+1) & \text{نیم‌مماس راست} \\ A(-1,0),\ m_2=f'_-(-1)=-2 \Rightarrow y=-2(x+1) & \text{نیم‌مماس چپ} \end{cases}$$

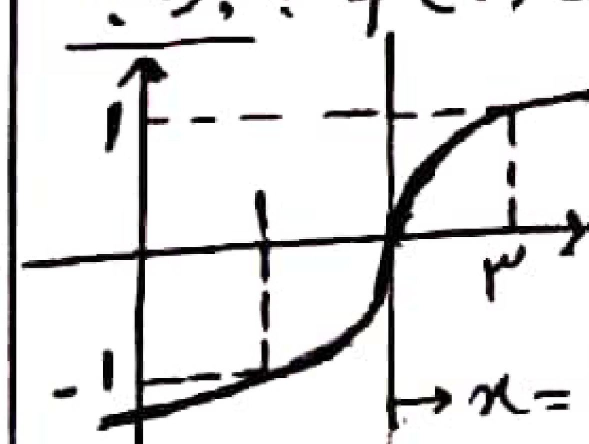


۴- توابع قدرمطلقی نظیر توابع: $f(x)=|x^2-1|$ و $g(x)=|x-1|+|x+1|$ در $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند و معمولاً در ریشه‌های داخل قدرمطلق مشتق‌ناپذیرند. ولی مثلاً تابع $h(x)=(x-1)|x^2-1|$، فقط در $x=-1$ مشتق‌ناپذیر است. $(f'(1)=0)$

۵- هرگاه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ در این نقطه نامتناهی و برابر باشند (هر دو $+\infty$ و یا هر دو $-\infty$) آنگاه f در a مشتق‌پذیر نیست و نقطه‌ی $A(a, f(a))$ را نقطه‌ی عطف نمودار f می‌نامند. لازم به تذکر است در این حالت خط $x=a$، مماس قائم بر منحنی f می‌باشد.

مثال: اولاً مشتق‌پذیری $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ را در $x=2$ بررسی کنید. ثانیاً معادله‌ی خط مماس بر منحنی f را در این نقطه بنویسید.

جواب: $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-2}}{x-2}\times\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\sqrt[3]{(x-2)^2}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}=+\infty$



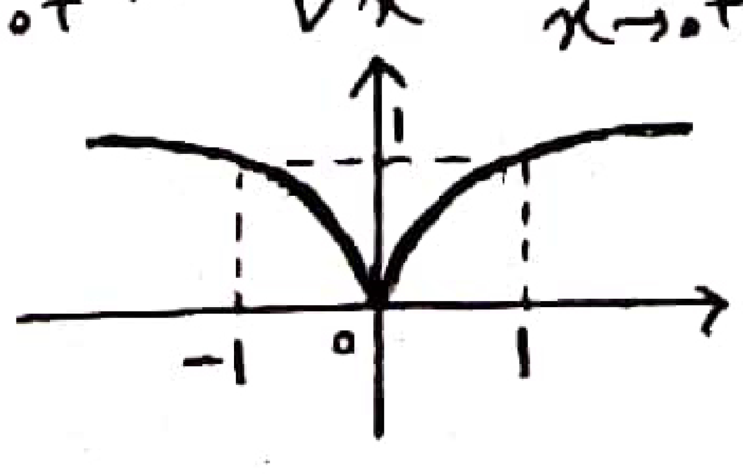
چون $f'_+(2)=f'_-(2)=+\infty$ پس f در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست و خط $x=2$، مماس قائم بر نمودار f است.

۶- هرگاه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ در این نقطه نامتناهی و نابرابر باشند (یعنی یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$)، آنگاه f در a مشتق‌پذیر نیست و نقطه‌ی $A(a, f(a))$ را نقطه‌ی بازگشتی نمودار f می‌نامند.
لازم به تذکر است در این حالت، نیم‌مماس‌های راست و چپ در a بر هم منطبق‌اند و معادله‌ی هر دوی آنها $x=a$ می‌باشد.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

جواب: $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\times\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$ و $f'_-(0)=-\infty \Rightarrow$ f در صفر مشتق‌ناپذیر است.

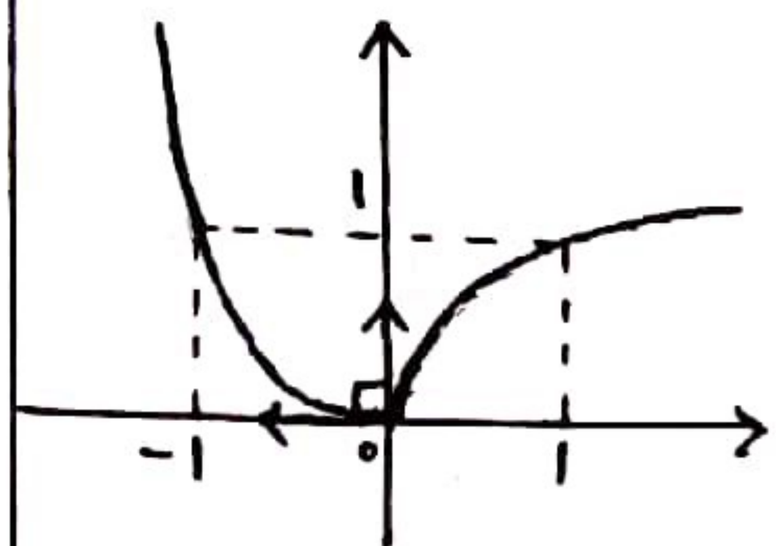
$f(x)=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow$



$\Rightarrow$ محور yها (به معادله‌ی $x=0$) از مبدأ به سمت بالا، نیم‌مماس چپ و راست بر نمودار تابع می‌باشد.

۷- در تابع $g(x)=\sqrt[3]{f(x)}$، هرگاه f تابعی پیوسته باشد g نیز تابعی پیوسته است و g در ریشه‌های f اگر از مرتبه‌ی ۱ یا ۲ باشند، مشتق پذیر نمی‌باشد. مثلاً تابع $y=\sqrt[3]{x^2(x+1)}$ در $x=0$ و $x=-1$ مشتق پذیر نمی‌باشد ولی تابع $y=\sqrt[3]{x^2+1}$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر می‌باشد.

۸- هرگاه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر نیست و $A(a, f(a))$ را نقطه‌ی گوشه‌ای نمودار f می‌نامند.



مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 ; & x<0 \\ \sqrt{x} ; & x\geq 0 \end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-\sqrt{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}x=0 \Rightarrow$$ پس f در صفر مشتق ناپذیر است.

۹- توابع چندجمله‌ای مانند $f(x)=2x^4-4x+1$ و توابع مثلثاتی مانند $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیرند.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=x[x]$ را در $x=0$ بررسی کنید.

جواب: $f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x[x]}{x}=\lim_{x\to 0^+}[x]=0$ و $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}[x]=-1$

چون $f'_+(0)\neq f'_-(0)$، پس f در صفر، مشتق پذیر نیست.

مثال (کنکور ۹۸ - ریاضی - داخل) - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} |x^2-2x| ; & x<2 \\ \frac{1}{2}x^2+ax+b ; & x\geq 2 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=2$، مشتق پذیر است، $a+b$ کدام است؟ ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پیوستگی f در $x=2$: $\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)=\frac{1}{2}\times 4+2a+b=2+2a+b$ ، $\lim_{x\to 2^-}f(x)=|4-4|=0 \Rightarrow \underline{2+2a+b=0}$ *

(به خاطر پیوستگی $f(2)=0$)

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-2x|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2||x|}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-\cancel{(x-2)}x}{\cancel{x-2}}=-2 \quad ①$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{2}x^2+ax+b}{x-2}\overset{*}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{2}x^2+ax-2a-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(\frac{1}{2}x^2-2)+(ax-2a)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{2}(x^2-4)+a(x-2)}{x-2}$$

$$\Rightarrow f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(\frac{1}{2}(x+2)+a)}{\cancel{x-2}}=2+a \xrightarrow{①} 2+a=-2 \Rightarrow a=-4 \xrightarrow{*} b=6 \Rightarrow a+b=2$$ (گزینه ۱)

مثال (کنکور ۹۸ - ریاضی - خارج کشور) - تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{|x^3-2x|}{x}$، در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب: $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ و $x^3-2x=0 \Rightarrow x(x^2-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \notin D_f \\ x=\pm\sqrt{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$

f در دو نقطه به طول‌های $\pm\sqrt{2}$ مشتق ناپذیر است. (گزینه‌ی دوم)

★تابع مشتق★

تعریف تابع مشتق: اگر x عضوی دلخواه از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f را با $f'(x)$ یا f' نمایش می‌دهند و به صورت مقابل تعریف می‌شود.

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

مثال: تابع مشتق هر یک از توابع زیر را با استفاده از تعریف بیابید.

۱) $f(x)=c$ (c: مقدار ثابت شده) $\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$ (صفر مطلق بر روی صفر حدی)

۲) $f(x)=ax$ (a: ثابت) $\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)-ax}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}+ah-\cancel{ax}}{h}=a$

۳) $f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=2x$

۴) $f(x)=x^3\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x^3}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+3xh+h^2)}{\cancel{h}}=3x^2$$

۵) $f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{h(x+h)x}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h)x}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}=\frac{-1}{x^2}$$

۶) $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۷) $f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\times\frac{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

★یادآوری

① $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ و ② $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(1-\cos h)}{h}\times\frac{1+\cos h}{1+\cos h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(1+\cos h)}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times\frac{-\sin h}{1+\cos h}=1\times\frac{0}{2}=0$

۸) $f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sin x\times\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\times\frac{\sin h}{h}\right)=\sin x\times(0)+\cos x\times(1)=\cos x$$

۹) $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\cos x\times\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\times\frac{\sin h}{h}\right)=\cos x\times(0)-\sin x\times(1)=-\sin x$$

★ پس به کمک تعریف تابع مشتق، ضروری است روابط زیر را که اثبات شده حفظ کنیم.

۱) $y=c \Rightarrow y'=0$ ۲) $y=ax \Rightarrow y'=a$ ۳) $y=x^2 \Rightarrow y'=2x$ ۴) $y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2$ ۵) $y=\frac{1}{x} \Rightarrow y'=\frac{-1}{x^2}$

۶) $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ۷) $y=\sqrt[3]{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ۸) $y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x$ ۹) $y=\cos x \Rightarrow y'=-\sin x$

قضیه بدون اثبات: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق پذیر باشند، آن‌گاه توابع $Kf\ (K\in\mathbb{R})$، $f\pm g$، $f\cdot g$، $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{f}$ نیز در $x=a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(Kf)'(a)=Kf'(a)$ ب) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$ پ) $(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+g'(a)\cdot f(a)$

ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-g'(a)\cdot f(a)}{g^2(a)}$ ث) $\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=\frac{-f'(a)}{f^2(a)}$

مثال: هرگاه $f(2)=3$ و $f'(2)=5$ و $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$، مقدار هریک از عبارت‌های زیر را حساب کنید.

۱) $(2f-g)'(2)=(2f)'(2)-g'(2)=2f'(2)-g'(2)=2(5)-(-6)=16$

۲) $(f\cdot g)'(2)=f'(2)\cdot g(2)+g'(2)\cdot f(2)=(5)(8)+(-6)(3)=40-18=22$

۳) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{f'(2)\cdot g(2)-g'(2)\cdot f(2)}{g^2(2)}=\frac{(5)(8)-(-6)(3)}{(8)^2}=\frac{40+18}{64}=\frac{58}{64}=\frac{29}{32}$

۴) $\left(\frac{1}{f}\right)'(2)=\frac{-f'(2)}{f^2(2)}=\frac{-5}{(3)^2}=-\frac{5}{9}$

★ نکته: هرگاه توابع f و g در نقطه‌ی دلخواه x مشتق پذیر باشند، بنابر قضیه قبل خواهیم داشت:

الف) $(Kf)'(x)=\left((Kf)(x)\right)'=\left(Kf(x)\right)'=Kf'(x) \xrightarrow{\text{مثال}} (4\sqrt{x})'=4(\sqrt{x})'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}$

ب) $(f\pm g)'(x)=\left((f\pm g)(x)\right)'=\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x) \xrightarrow{\text{مثال}} \left(x^3+x^2-\frac{1}{x}\right)'=(x^3)'+(x^2)'-\left(\frac{1}{x}\right)'$
$=3x^2+2x+\frac{1}{x^2}$

پ) $(f\cdot g)'(x)=\left((f\cdot g)(x)\right)'=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x) \xrightarrow{\text{مثال}} (x^2\sin x)'=(x^2)'\sin x+(\sin x)'x^2$
$=2x\sin x+x^2\cos x$

ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right)'=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\,g(x)-g'(x)\,f(x)}{g^2(x)}$

$\xrightarrow{\text{مثال}} (\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x.\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

ث) $\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\left(\left(\frac{1}{f}\right)(x)\right)'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{-f'(x)}{f^2(x)} \xrightarrow{\text{مثال}} \left(\frac{1}{x^3}\right)'=\frac{-(x^3)'}{(x^3)^2}=-\frac{3x^2}{x^6}=-\frac{3}{x^4}$

★ قواعد مشتق گیری: (بعضی از این قواعد در نکته‌ی بالا آمده است، لذا به زبان دیگری تکرار می‌گردد.)

۱) $y=f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x) \Rightarrow y'=f_1'(x)+f_2'(x)+\dots+f_n'(x)$ ۲) $y=a \Rightarrow y'=0$

۳) $y=ax \Rightarrow y'=a$ ۴) (مهم) $y=ax^n \Rightarrow y'=a.n.x^{n-1} \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{cases} y=5x-2 \Rightarrow y'=(5x)'-(2)'=5-0=5 \\ y=2x^3-5x^2+x-1 \Rightarrow y'=6x^2-10x+1 \end{cases}$

(ادامه‌ی قواعد مشتق‌گیری)

۵) $y = u^n \Rightarrow y' = n\cdot u'\cdot u^{n-1} \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{cases} y = (x^2+3x+1)^7 \\ y' = 7(x^2+3x+1)'(x^2+3x+1)^{7-1} \Rightarrow y' = 7(2x+3)(x^2+3x+1)^6 \end{cases}$

۶) $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'\cdot v + v'\cdot u \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{cases} y = (x^2+1)^3(5x-1) \Rightarrow y' = \left((x^2+1)^3\right)'(5x-1) + (5x-1)'(x^2+1)^3 \\ \Rightarrow y' = 3(2x)(x^2+1)^2(5x-1) + 5(x^2+1)^3 \end{cases}$

۷) $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'\cdot v - v'\cdot u}{v^2} \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{cases} y = \frac{x}{2x^2+x-1} \Rightarrow y' = \frac{(x)'(2x^2+x-1)-(2x^2+x-1)'x}{(2x^2+x-1)^2} \\ \Rightarrow y' = \frac{1(2x^2+x-1)-(4x+1)x}{(2x^2+x-1)^2} = \frac{2x^2+x-1-4x^2-x}{(2x^2+x-1)^2} = \frac{-2x^2-1}{(2x^2+x-1)^2} \end{cases}$

مثال: $y = \frac{1}{4-3x} \Rightarrow y' = \frac{(1)'(4-3x)-(4-3x)'(1)}{(4-3x)^2} = \frac{0(4-3x)-(-3)(1)}{(4-3x)^2} = \frac{3}{(4-3x)^2}$

۸) $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \xrightarrow{\text{مثال}} y = \sqrt{2x-1} \Rightarrow y' = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

۹) $y = \sqrt[3]{u^n} \Rightarrow y' = \frac{n\cdot u'}{3\sqrt[3]{u^{3-n}}} \xrightarrow{\text{مثال}} y = \sqrt[3]{x^2-x} \Rightarrow y' = \frac{1(x^2-x)'}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^{3-1}}} = \frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$

مثال: $y = \sqrt[3]{(4x+2)^2} \Rightarrow y' = \frac{2(4x+2)'}{3\sqrt[3]{(4x+2)^{3-2}}} = \frac{2(4)}{4\sqrt[3]{3x+2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3x+2}}$

مثال: $y = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' = \frac{2(x)'}{3\sqrt[3]{x^{3-2}}} = \frac{2\times 1}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

این ۳ تا رو حفظ کنید: $\begin{cases} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ (\sqrt[3]{x^2})' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \end{cases}$ این ۳ تا رو حفظ کنید

۱۰) الف) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \xrightarrow{\text{مثال}} y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2(\sin x)'\sin x = 2\cos x\sin x$

ب) $y = \sin u \Rightarrow y' = u'\cos u \xrightarrow{\text{مثال}} y = \sin(3x^2+5) \Rightarrow y' = (3x^2+5)'\cos(3x^2+5) = 6x\cos(3x^2+5)$

۱۱) الف) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x \xrightarrow{\text{مثال}} y = \frac{5\cos x}{1-\sin x} \Rightarrow y' = \frac{5(-\sin x)(1-\sin x)-(-\cos x)(5\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

ب) $y = \cos u \Rightarrow y' = -u'\sin u \xrightarrow{\text{مثال}} y = \cos(\frac{\pi}{3}-2x) \Rightarrow y' = -(\frac{\pi}{3}-2x)'\sin(\frac{\pi}{3}-2x) = +2\sin(\frac{\pi}{3}-2x)$

۱۲) الف) $y = \tan x \Rightarrow y' = 1+\tan^2 x \xrightarrow{\text{مثال}} y = \sin x\cdot\tan x \Rightarrow y' = \cos x\cdot\tan x + (1+\tan^2 x)\sin x$

ب) $y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1+\tan^2 u) \xrightarrow{\text{مثال}} y = \tan^3(2x) \Rightarrow y' = 3(\tan 2x)'\tan^2(2x)$

$\Rightarrow y = 6(1+\tan^2(2x))\tan^2(2x)$

★ مشتق تابع مرکب (ترکیب دو تابع - قاعده‌ی زنجیری):

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم: $(fog)'(x) = \left(f(g(x))\right)' = g'(x)\cdot f'(g(x))$

مثال: هرگاه $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2$، درستی تساوی فوق را نشان دهید. جواب: $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = (x^2)^3 = x^6$

$\Rightarrow (fog)'(x) = (x^6)' = 6x^5$ / $\begin{cases} g'(x) = (x^2)' = 2x \\ f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow g'(x)\cdot f'(g(x)) = (2x)\times 3(x^2)^2 = (2x)(3x^4) = 6x^5$

مثال (کنکور ۹۸ - ریاضی - داخل) اگر $g(x) = x+\sqrt{x}$ و $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(fog)'(1)$ کدام است؟

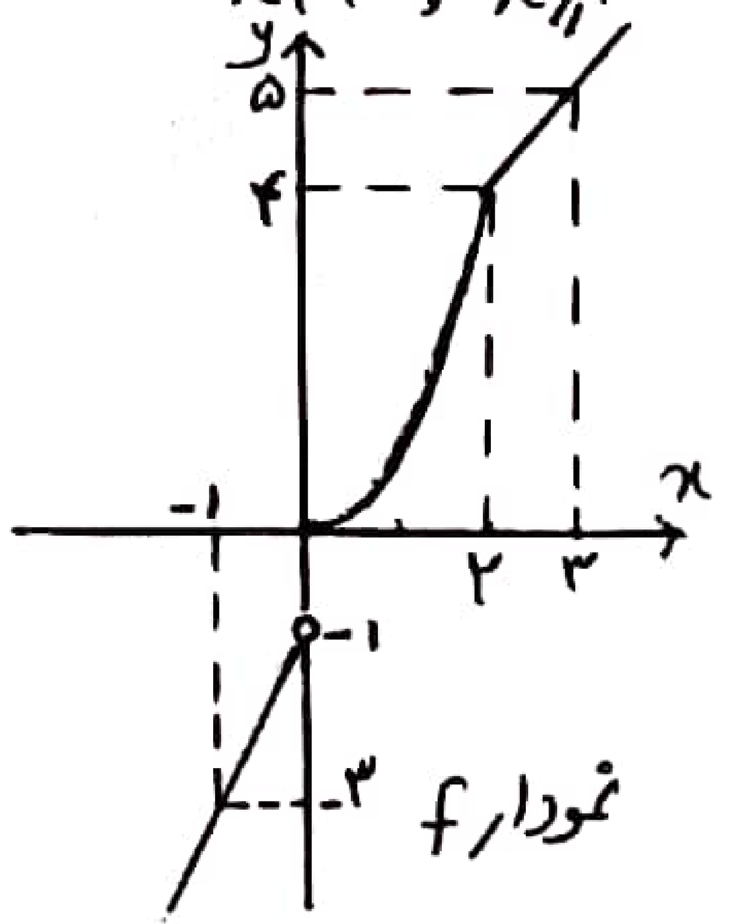
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) 2 ۴) 3

جواب: $\begin{cases} g'(x) = 1+\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(2) = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow (fog)'(1) = g'(1)\cdot f'(g(1)) = (1+\frac{1}{2})\cdot f'(2) = \frac{3}{2}\times\frac{4}{3} = 2$ (گزینه‌ی سوم)

★ مشتق پذیری روی یک بازه: تابع f روی بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه‌ی این بازه مشتق پذیر باشد. همچنین تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a,b) مشتق پذیر بوده و در a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

لازم به تذکر است اگر $D_f=\mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد، آنگاه می گویند f روی بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ مشتق پذیر است.

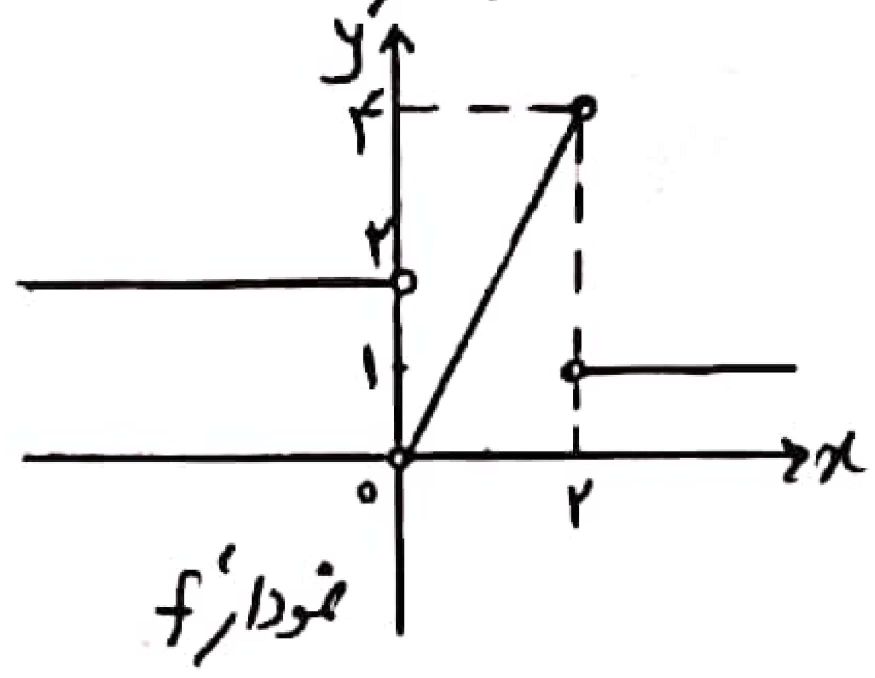
$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & ; x<0\\ x^2 & ; 0\leq x<2\\ x+2 & ; x\geq 2\end{cases}$$



مثال (شبیه تمرین $\boxed{3}$ صـ ۹۹ کتاب درسی) مشتق پذیری تابع چندضابطه‌ای f که در مقابل آمده است را در دامنه‌ی تعریفش ($\mathbb{R}$)، بکمک رسم نمودار f بررسی کرده و سپس ضابطه‌ی f' را نوشته و نمودار f' را نیز رسم کنید.

جواب: با توجه به نمودار f، در $x=0$ و $x=2$ مشتق پذیر نیست، لذا: $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,2\}$

$$f'(x)=\begin{cases}2 & ; x<0\\ 2x & ; 0<x<2\\ 1 & ; x>2\end{cases}\Rightarrow$$



مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & ; x\geq 2\\ -x^2+ax+b & ; x<2\end{cases}$ روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟ (کنکور ۹۸ تجربی - داخل)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

جواب: چون f در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است، پس در $x=2$ نیز مشتق پذیر است، لذا در $x=2$ باید پیوسته باشد و $f'_+(2)=f'_-(2)$، لذا:

پیوستگی:
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2-1}=1 \ , \ f(2)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^2+ax+b)=-4+2a+b\end{cases}\Rightarrow -4+2a+b=1\Rightarrow \boxed{2a+b=5}\ (*)$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-1}{(x-1)^2} & ; x\geq 2\\ -2x+a & ; x<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(2)=\frac{-1}{(2-1)^2}=-1\\ f'_-(2)=-4+a\end{cases}\Rightarrow -4+a=-1\Rightarrow a=3\xrightarrow{(*)}\boxed{b=-1}$$ (گزینه‌ی دوم)

★ مشتق مرتبه‌ی دوم: اگر تابع مشتق f، یعنی $f'(x)$، خود تابعی مشتق پذیر باشد، مشتق آنرا با $f''(x)$ نمایش داده و به آن مشتق مرتبه‌ی دوم f می گویند.

مثال: هرگاه $f(x)=x^4-2x^3+2x-1$، مطلوب محاسبه‌ی: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(2+h)-f'(2)}{h}$.

جواب: $\begin{cases}f'(x)=4x^3-6x^2+2\\ f''(x)=12x^2-12x\end{cases}$ ، $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(2+h)-f'(2)}{h}=f''(2)=12(2)^2-12(2)=48-24=24$

مثال: (تمرین $\boxed{16}$، صفحه‌ی ۱۰۱ کتاب درسی): اگر $f(x)=\sin^2x-\cos 2x$، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $f''(\frac{\pi}{4})$ ب) $f''(\frac{\pi}{2})-f'(\frac{\pi}{2})$

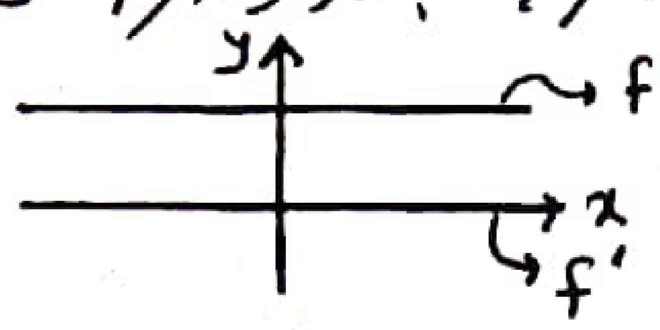
جواب: $f'(x)=2\cos x\cdot\sin x+2\sin 2x=\sin 2x+2\sin 2x=3\sin 2x\Rightarrow f''(x)=6\cos 2x$

$$\Rightarrow f''(\tfrac{\pi}{4})=6\cos 2(\tfrac{\pi}{4})=6\cos\tfrac{\pi}{2}=6(\tfrac{1}{2})=3 \ ✓$$

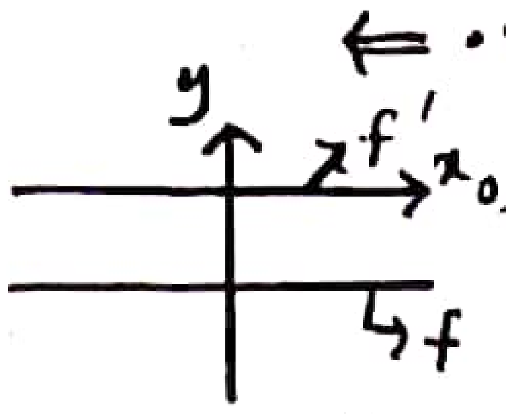
$$\Rightarrow f''(\tfrac{\pi}{2})-f'(\tfrac{\pi}{2})=6\cos 2(\tfrac{\pi}{2})-3\sin 2(\tfrac{\pi}{2})=6\cos\pi-3\sin\pi=6(-1)-3(0)=-6 \ ✓$$

←

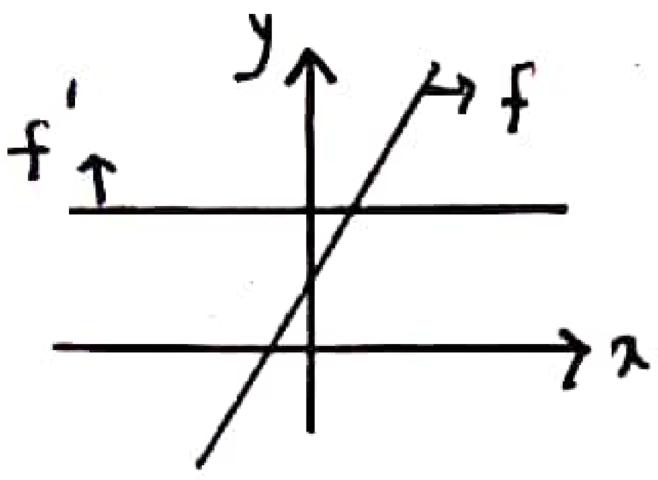
نکته: ۱- چون مشتق تابع ثابت $f(x)=a$ برابر است با: $f'(x)=0$، لذا در دستگاه مختصات اگر $a>0$ باشد نمودار f خطی موازی محور xها و در بالای مبدأ مختصات بوده و نمودار f' نیز محور xها است. ⇐



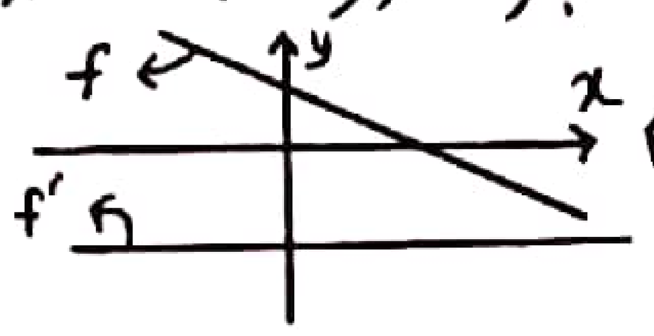
همچنین اگر $a<0$ باشد نمودار f خطی موازی محور xها و در پایین مبدأ مختصات بوده و نمودار f'، محور xها خواهد بود. ⇐



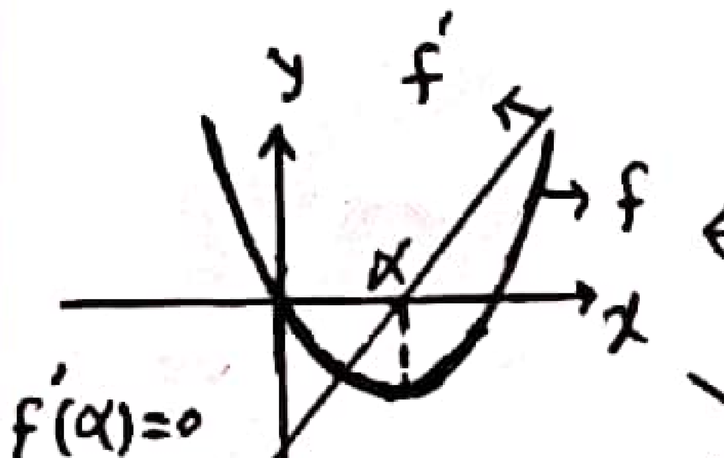
۲- چون مشتق تابع خطی $f(x)=ax+b$ برابر است با $f'(x)=a$، لذا اگر $a>0$ باشد، آنگاه نمودارهای f و f' در یک دستگاه مختصات عبارت است از: ⇐



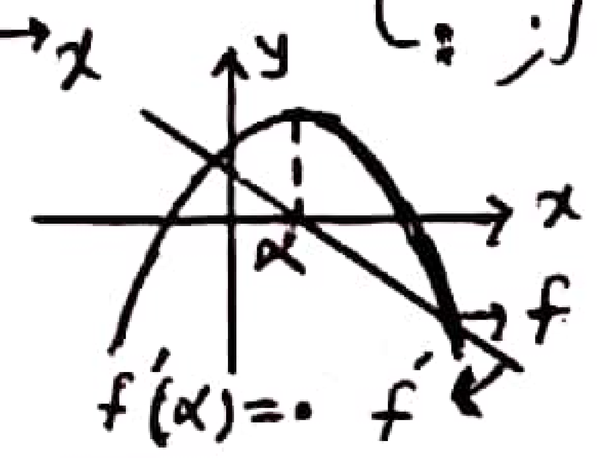
و همچنین اگر $a<0$ باشد، نمودارهای f و f' در یک دستگاه مختصات عبارت است از: ⇐



۳- چون مشتق تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، برابر است با تابع خطی $f'(x)=ax+b$ لذا اگر $a>0$ باشد، آنگاه نمودارهای f و f' در یک دستگاه مختصات عبارت است از:



و همچنین اگر $a<0$ باشد، نمودارهای f و f' در یک دستگاه مختصات عبارت است از: ⇐



★ تمرینات صفحات ۹۹، ۱۰۰ و ۱۰۱ را حل کنید.

فصل ۴ ـ حسابان (۲) ـ درس $\boxed{۳}$ ـ آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

الف) آهنگ متوسط: هرگاه f تابعی از متغیر x باشد ($y=f(x)$)، آنگاه آهنگ متوسط تغییر تابع f (یعنی y) نسبت به تغییر x، وقتیکه x روی بازه‌ی $[a,a+h]$ و یا روی بازه‌ی $[a,b]$ تغییر می‌کند، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{یا} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (\text{شیب خط قاطع})$$

★ مفهوم آهنگ متوسط یعنی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ این است که به ازای هر یک واحد تغییر x در بازه‌ی $[a,a+h]$ یا $[a,b]$، مقدار تابع f یعنی $f(x)$ نیز به طور متوسط به اندازه‌ی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تغییر می‌کند.

مثال (کار در کلاس ـ صـ ۱۰۵ کتاب درسی) می‌دانیم تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$، قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد بر حسب ماه است. آهنگ متوسط رشد، در بازه‌ی زمانی $[0,25]$ چقدر است؟ آن را تفسیر کنید. جواب:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(25)-f(0)}{25-0}=\frac{80-50}{25}=1/2$$

یعنی کودک در طی ۲۵ ماه، از بدو تولد، رشد متوسط قدش ۱/۲ سانتی‌متر در هر ماه می‌باشد.

ب) آهنگ لحظه‌ای: هرگاه f تابعی از متغیر x باشد ($y=f(x)$)، آنگاه آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f (یعنی y) نسبت به تغییر x در نقطه‌ی $x=a$ به صورت: (شیب خط مماس) $\frac{dy}{dx}=f'(a)$ تعریف می‌شود، و مفهوم آن این است که هرگاه در نقطه‌ی $x=a$، متغیر x یک واحد افزایش یابد، آنگاه y یا $f(x)$ تقریباً به اندازه‌ی $f'(a)$ تغییر می‌کند.

مثال (کار در کلاس ـ صـ ۱۰۵ کتاب درسی) می‌دانیم تابع رشد کودک تا ۶۰ ماهگی $f(x)=7\sqrt{x}+50$ می‌باشد. آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی حساب کرده و مفهوم آن را بیان کنید. جواب:

$$f'(x)=\frac{7}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25)=0/7$$

مفهوم: یعنی در ماه بیست و ششم پس از تولد، کودک تقریباً به اندازه‌ی ۰/۷ سانتی‌متر رشد می‌کند.

★ نکته: هرگاه معادله‌ی حرکت متحرکی داده شده باشد، آنگاه آهنگ متوسط تغییر، همان سرعت متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر، نیز همان سرعت لحظه‌ای می‌باشد.

مثال: متحرکی در امتداد خط راست طبق معادله‌ی $d(t)=-5t^2+20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0\le t\le 5$ بر حسب ثانیه است.

←

(ادامه‌ی مثال از صفحه‌ی قبل) الف) سرعت متوسط را در بازه‌ی [۱و۲] بدست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای متحرک را در لحظه‌های $t=1$ ، $t=2$ و $t=3$ حساب نموده و آن را توجیه کنید. $d(t)=-5t^2+20t$: جواب

الف) $\frac{\Delta d}{\Delta t}=\frac{d(2)-d(1)}{2-1}=\frac{(-20+40)-(-5+20)}{2-1}=\frac{20-15}{1}=5\ \frac{m}{s}$

ب) $d'(t)=-10t+20 \Rightarrow d'(1)=10\ \frac{m}{s}$ ، $d'(2)=0$ ، $d'(3)=-10\ \frac{m}{s}$

یعنی در لحظه‌ی $t=1$ ، متحرک در حال دور شدن از مکان اولیه است ، در لحظه‌ی $t=2$ ، متحرک توقف لحظه‌ای دارد و در $t=3$ متحرک در حال بازگشت به مکان اولیه است.

مثال: یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=2t+\sqrt{t}$ گرم است. در چه لحظه‌ای از فاصله‌ی زمانی [۱و۹] آهنگ لحظه‌ای رشد توده باکتری‌ها با آهنگ متوسط رشد در این فاصله برابر است؟

جواب:
$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{m(9)-m(1)}{9-1}=\frac{21-3}{8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}\ ,\ m'(t)=2+\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{4}\Rightarrow 2\sqrt{t}=4\Rightarrow\boxed{t=4}$$

مثال (کنکور ۹۸ - ریاضی - داخل) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x+2)\sqrt{4x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه‌ی [۰و۲] از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\frac{3}{4}$ ، چقدر بیشتر است؟ ۱) ۰/۱۰ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲۰ ۴) ۰/۲۵

جواب: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{12-2}{2}=\boxed{5}$ و $f'(x)=(x+2)'\sqrt{4x+1}+(\sqrt{4x+1})'(x+2)$ (گزینه‌ی چهارم)

$$\Rightarrow f'(x)=\sqrt{4x+1}+\frac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x+2)\Rightarrow f'(\tfrac{3}{4})=2+\frac{4}{4}\times(\tfrac{3}{4}+2)=2+\frac{11}{4}=\frac{19}{4}\Rightarrow 5-\frac{19}{4}=\frac{1}{4}=0/25$$

★ تمرینات صفحات ۱۰۸، ۱۰۹ و ۱۱۰ را حل کنید.

★ نکته (خارج از کتاب درسی) قاعده‌ی هوپیتال: هرگاه f و g توابعی مشتق‌پذیر بوده و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

مثال (کنکور ۹۸ - تجربی - خارج): حد عبارت $\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}$ ، وقتی $x\to 2$ ، کدام است؟ ۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

جواب:
$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}\overset{HoP}{\underset{0/0}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{-\frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}{10x-18}=\frac{-\frac{1}{4}}{2}=-\frac{1}{8}$$
(گزینه‌ی چهارم)

مثال: حد عبارت $\frac{\sin 2x-\tan x}{\sin x-\cos x}$ ، وقتی $x\to\frac{\pi}{4}$ ، کدام است؟ ۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۲-

جواب:
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-\tan x}{\sin x-\cos x}\overset{HoP}{\underset{0/0}{=}}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos 2x-(1+\tan^2 x)}{\cos x+\sin x}=\frac{0-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$
(گزینه‌ی دوم)

★ نکته‌ی کنکوری: هرگاه چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)^2$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه: $f(a)=f'(a)=0$

مثال (کنکور ۹۴ - ریاضی - خارج) اگر عبارت x^4+ax^2-bx+4 بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد، b کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

جواب:
$$\begin{cases}f(x)=x^4+ax^2-bx+4\\ f'(x)=4x^3+2ax-b\end{cases}\ \text{و}\ \begin{cases}f(1)=0\\ f'(1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+a-b+4=0\\ 4+2a-b=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=-5 \quad \times(-2)\\ 2a-b=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{-2a}+2b=10\\ \cancel{2a}-b=-4\end{cases}\Rightarrow\boxed{b=6}$$
(گزینه‌ی چهارم)