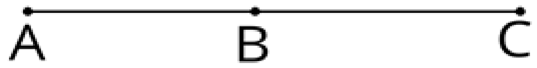
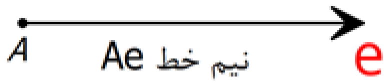
درس اول : روابط بین پاره خط ها

در ریاضیات برای نامگذاری شکل ها از حروف انگلیسی استفاده می‌کنیم.

نقطه ها را با حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری می کنیم مثلاً در پاره خط زیر سه نقطه A و B و C قرار دارند .

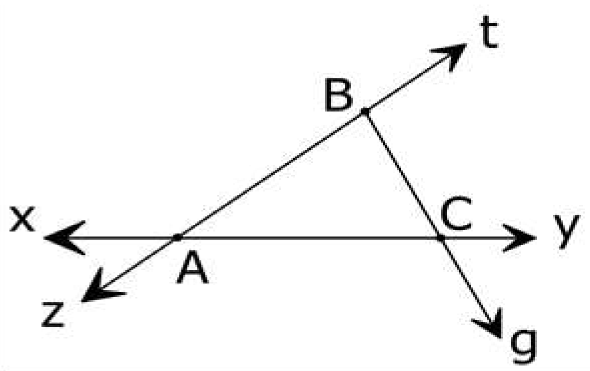


برای نامگذاری امتداد خط ها که در شکل با پیکانه نشان می‌دهیم از حروف کوچک استفاده می کنیم (حرف کوچک انگلیسی سمت پیکانه نوشته می شود)



نکته: برای نامگذاری خط ها می‌توان از یک حرف کوچک انگلیسی نیز استفاده کرد.

مثال: در شکل زیر نام خط ها نیم خط ها و پاره خط ها را بنویسید.



پاسخ:

خط ها: xy و zt

پاره خط ها: AC و BC و AB

(موقع نامگذاری پاره خط ها فرقی ندارد کدام نقطه را اول بنویسیم مثلاً AB با BA تفاوتی ندارد)

نیم خط ها:

برای مشخص کردن نیم خط ها از راهبرد الگوسازی استفاده می کنیم بدین صورت که یک نقطه روی یک خط را ثابت در نظر میگیریم و نیم خط های محدود به آن را می یابیم.

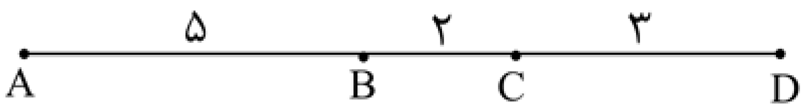
A نیم خط های محدود به : Ax و Ay و AZ و At

B نیم خط های محدود به : Bt و Bz و Bg

C نیم خط های محدود به : Cx و Cy و Cg

قرارداد: طول یک پاره خط را با قرار دادن یک پاره خط کوچک در بالای نام آن نشان می دهیم برای مثال $\overline{BC}$ یعنی طول پاره خط BC

مثال: در شکل زیر فاصله بین دو نقطه متوالی (پشت سر هم) برحسب متر داده شده است طول پاره خط های AC و BD را به دست آورید.



پاسخ:

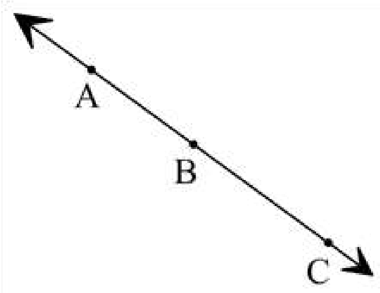
$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = ۵+۲=۷$$

طول پاره خط BC + طول پاره خط AB = طول پاره خط AC

به همین ترتیب برای پاره خط BD داریم:

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = ۲ + ۳ = ۵$$

مثال: در شکل مقابل نقاط A و B و C روی یک خط قرار دارند رابطه های زیر را کامل کنید.



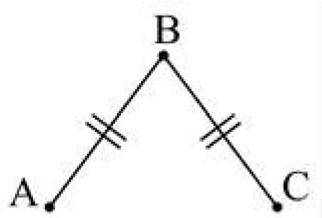
$$\overline{AB} + \overline{BC} = ...\overline{AC}...$$

$$\overline{AC} - \overline{AB} = ...\overline{BC}...$$

$$\overline{AC} - .... = \overline{AB}$$

$$\overline{CB} + \overline{BA} = ...$$

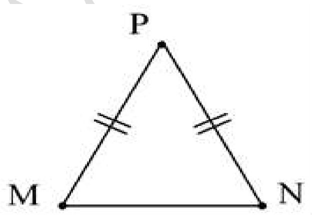
پاره خط های مساوی را در شکل به صورت زیر مشخص می کنیم :



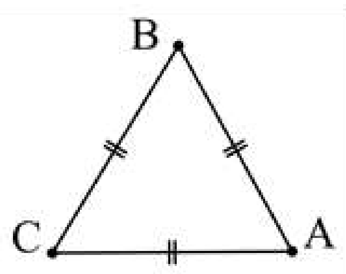
علامت ها نشان می دهند که :

$$\overline{BA} = \overline{BC}$$

مثلاً در مثلث متساوی الساقین زیر دو ساق PM و PN با هم برابرند.

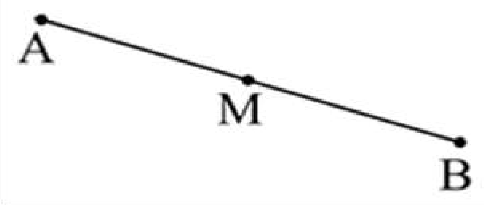


یا در مثلث متساوی الاضلاع اندازه سه ضلع با هم برابراند.



$$\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC}$$

مثال: در شکل مقابل M وسط پاره خط AB است:



الف) اندازه کدام دو پاره خط با هم مساوی اند ؟

.... = ...

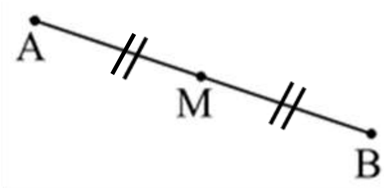
تساوی این دو پاره خط را با علامت گذاری یکسان روی شکل نشان دهید.

ب) تساوی های زیر را با نوشتن عدد مناسب کامل کنید :

$\overline{AB} = ...\ \overline{AM}$ $\qquad$ $\overline{MB} = ...\ \overline{AB}$

پاسخ:

الف)



$$\overline{AM} = \overline{MB}$$

ب)

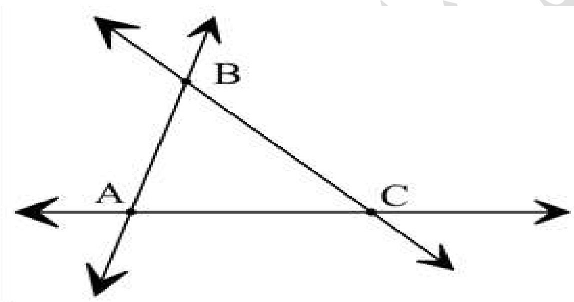
$$\overline{MB} = \frac{۱}{۲}\overline{AB}$$

طول پاره خط MB نصف طول پاره خط AB است.

$$\overline{AB} = ۲\overline{AM}$$

طول پاره خط AB دو برابر طول پاره خط AM است.

مثال: در شکل زیر نقاط A و B و C روی یک خط قرار ندارند بنابراین نقاط A و B و C تشکیل یک مثلث می دهند این مثلث ABC نام دارد و آن را با نماد $\triangle ABC$ یا $\overset{\triangle}{ABC}$ نشان می دهیم.



با اندازه گیری طول پاره خط ها می توان رابطه های زیر را نوشت:

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$
$$\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$$
$$\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}$$

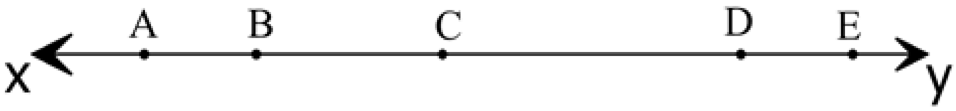
نابرابری های بالا برای هر مثلث دلخواه دیگری نیز برقرار است که به نامساوی مثلث مشهور است.

نامساوی مثلث: در هر مثلث مجموع اندازه های دو ضلع، از اندازه ضلع سوم بیشتر است.

مثال: در شکل مقابل نقاط A و B و C و D و E روی یک خط قرار دارند:

الف) چند پاره خط در شکل وجود دارد؟

ب) چند نیم خط در شکل وجود دارد؟



پاسخ:

الف)

پاره خط های محدود به A : AB و AC و AD و AE

پاره خط های محدود به B : BC و BD و BE

پاره خط های محدود به C : CD و CE

پاره خط های محدود به D : DE

تعداد کل پاره خط ها : $۴+۳+۲+۱=۱۰$

(توجه کنید که پاره خط BC و CB تفاوتی ندارند به همین دلیل پاره خط CB را ننوشتیم)

نکته: اگر n نقطه روی یک خط باشد آنگاه تعداد پاره خط ها برابراند با : $\frac{n(n-۱)}{۲}$

(در قسمت الف n = ۵ بود)

ب)

نیم خط های محدود به A : Ax و Ay

نیم خط های محدود به B : Bx و By

نیم خط های محدود به C : Cx و Cy

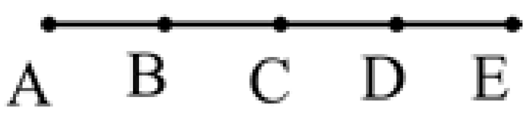
نیم خط های محدود به D : Dx و Dy

نیم خط های محدود به E : Ex و Ey

توجه کنیم که به ازای هر نقطه دو نیم خط وجود دارد پس تعداد کل نیم خط ها برابر با $۱۰ = ۵ \times ۲$ است.

نکته : اگر روی یک خط n نقطه وجود داشته باشد تعداد نیم خط ها برابر با $n \times ۲$ است. (در قسمت ب n = ۵ بود)

مثال : اگر پاره خط های AB و BC و CD و DE با هم برابر باشند، تساوی ها را با نوشتن عدد مناسب کامل کنید.



$\overline{AC} = ...۲... \overline{AB}$

$\overline{CE} = ...\frac{۱}{۲}... \overline{AE}$

$\overline{AE} = ...۱\frac{۱}{۳}... \overline{BE}$

$\overline{BC} = ...۱... \overline{BC}$

مثال : در شکل زیر نقاط A و B و C و D روی یک خط قرار گرفته اند.

می دانیم : $\overline{AB} = \overline{CD}$ (یعنی طول پاره خط AB برابر با طول پاره خط AC است) .

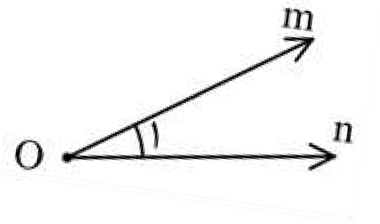
کدام پاره خط هم اندازه AC است؟ چرا؟

پاسخ : پاره خط BD . زیرا :

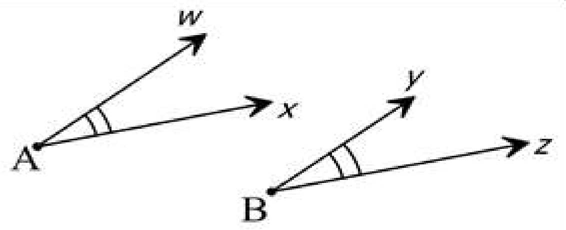
$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \xrightarrow{\overline{AB} = \overline{CD}} \overline{AC} = \overline{CD} + \overline{BC} = \overline{BD} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{BD}$$

درس دوم : روابط بین زاویه ها

برای نام گذاری زاویه ها طبق قراردادهایی که در درس قبل داشتیم می توان رأس (یک نقطه) را با حروف بزرگ انگلیسی و دو ضلع زاویه (دو نیم خط) را با حروف کوچک انگلیسی نمایش دهیم .



شکل نمایش یک زاویه منحصر به فرد نیست . به طور مثال زاویه داده شده را می توان به صورت های $m\hat{O}n$ یا $\hat{O}$ یا $\hat{O}_۱$ یا $\hat{۱}$ نشان دهیم . علامت « ^ » که در بالای اسامی زاویه ها نوشته شده است نماد زاویه می باشد.

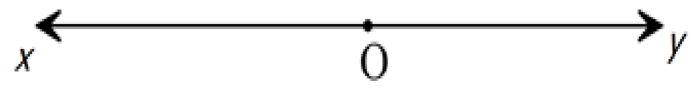


دو زاویه مساوی را در شکل به صورت زیر مشخص می کنیم :

علامت ها نشان می دهند که :

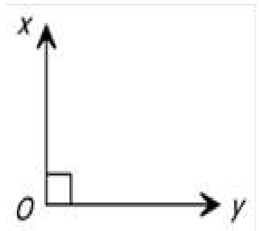
$$w\hat{A}x = y\hat{B}z$$

انواع زاویه و نامگذاری آن ها :



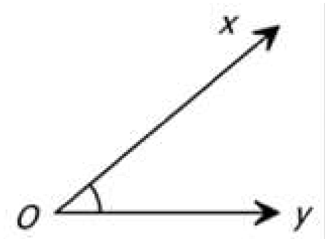
۱) زاویه نیم صفحه

$$x\hat{O}y = ۱۸۰°$$



۲) زاویه راست

$$x\hat{O}y = ۹۰°$$

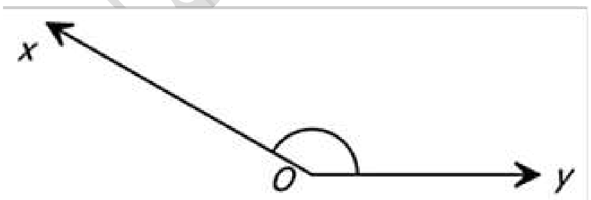


۳) زاویه تند

$$x\hat{O}y < ۹۰°$$

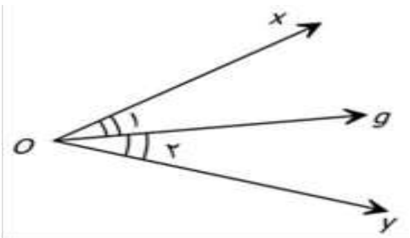
اندازه زاویه کوچکتر از ۹۰ درجه است .

۴) زاویه باز



$$۹۰° < x\hat{O}y < ۱۸۰°$$

اندازه زاویه بزرگتر از ۹۰ درجه و کوچکتر از ۱۸۰ درجه است .



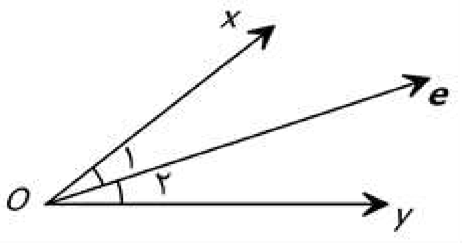
نیمساز : خطی است که شروع آن از رأس زاویه است و زاویه را به دو زاویه برابر تقسیم می کند (زاویه را نصف می کند)

به طور مثال در شکل مقابل Og نیمساز زاویه $x\hat{O}y$ است پس :

$$x\hat{O}g = y\hat{O}g$$

همانطور که مشاهده می کنید تساوی دو زاویه را با علامت گذاری یکسان روی شکل نشان داده ایم.

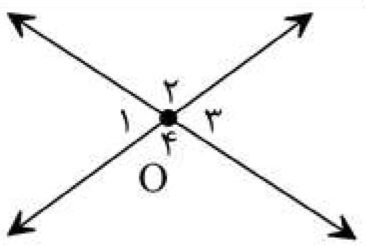
مثال: در شکل مقابل $x\hat{O}y = ۴۵°$ است اگر Oe نیمساز زاویه $x\hat{O}y$ باشد اندازه $\widehat{O_۱}$ را بیابید .



پاسخ : چون Oe نیمساز زاویه $x\hat{O}y$ است پس آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند. پس :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{O_۱}+\widehat{O_۲}=۴۵°\\ \widehat{O_۱}=\widehat{O_۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{O_۱}=۲۲/۵$$

مثال: در شکل مقابل دو خط یکدیگر را در نقطه O قطع کرده‌اند چرا $\widehat{O_۱}=\widehat{O_۳}$ و $\widehat{O_۲}=\widehat{O_۴}$ ؟



پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{O_۱}+\widehat{O_۲}=۱۸۰°\\ \widehat{O_۳}+\widehat{O_۲}=۱۸۰°\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{O_۱}+\cancel{\widehat{O_۲}}=\widehat{O_۳}+\cancel{\widehat{O_۲}} \Rightarrow \widehat{O_۱}=\widehat{O_۳}$$

به همین ترتیب می توان تساوی $\widehat{O_۲}$ و $\widehat{O_۴}$ را نشان داد :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{O_۱}+\widehat{O_۲}=۱۸۰°\\ \widehat{O_۱}+\widehat{O_۴}=۱۸۰°\end{array}\right\} \Rightarrow ......+......=......+...... \Rightarrow \widehat{O_۲}=\widehat{O_۴}$$

مثال: در شکل بالا، می‌دانیم که $\widehat{O_۱}=۷۰°$ است اندازه زاویه های دیگر را با نوشتن یک تساوی کامل کنید .

پاسخ:

$$\widehat{O_۳}=\widehat{O_۱}=۷۰°$$

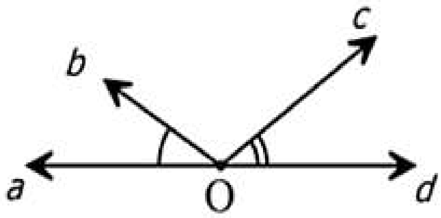
$$\widehat{O_۲}=\widehat{O_۴}=۱۸۰°-۷۰°=۱۱۰$$

با توجه به آنچه که از سال های قبل آموخته اید می دانید زاویه های $\widehat{O_۱}$ و $\widehat{O_۳}$ **متقابل به رأس** هستند و نیز زاویه های $\widehat{O_۲}$ و $\widehat{O_۴}$ **متقابل به رأس** می باشند.

نکته : **زاویه های متقابل به رأس با هم مساوی هستند.**

توجه : برای اینکه دو زاویه متقابل به رأس باشند باید **رأس های دو زاویه در یک نقطه قرار داشته باشند** و **نیز اضلاع دو زاویه در امتداد (در ادامه) یکدیگر باشند.**

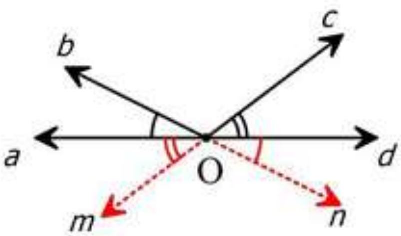
مثال :



الف) در شکل مقابل دو زاویهء $\widehat{aOb}$ و $\widehat{cOd}$ **متقابل به رأس نیستند.**

زیرا با اینکه رأس هر دو زاویه در یک نقطه قرار دارند و ضلع Od از زاویه $\widehat{cOd}$

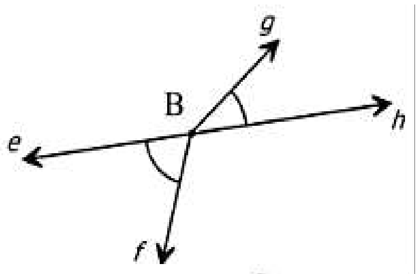
در امتداد ضلع Oa از زاویهء $\widehat{aOb}$ است، اما دو ضلع Oc و Ob در امتداد هم نیستند.



در شکل زیر زاویه های متقابل به رأس این دو زاویه را رسم کرده ایم.

با توجه به شکل؛ زاویهء $\widehat{aOb}$ متقابل به رأس با زاویهء $\widehat{nOd}$ است، پس : $\widehat{aOb} = \widehat{nOd}$

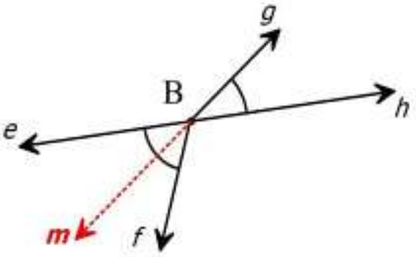
و نیز زاویهء $\widehat{cOd}$ متقابل به رأس با زاویهء $\widehat{mOa}$ می باشد، پس : $\widehat{cOd} = a\,\widehat{O}m$.



ب) در شکل مقابل دو زاویهء $\widehat{gBh}$ و $\widehat{eBf}$ **متقابل به رأس نیستند .**

زیرا با اینکه دو زاویه رأس های مشترکی دارند اما ضلع Bg از زاویهء $\widehat{gBh}$

هم راستا (در امتداد) ضلع Bf از زاویهء $\widehat{eBf}$ نیست.

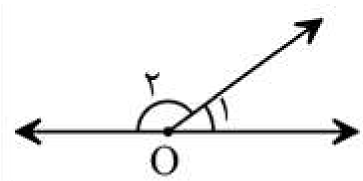


در شکل زیر زاویهء متقابل به رأس زاویهء $\widehat{gBh}$ رسم شده است.

با توجه به شکل زاویهء $\widehat{eBm}$ با زاویهء $\widehat{gBh}$ متقابل به رأس هستند،

پس : $\widehat{gBh} = \widehat{eBm}$.

سوال: زاویهء متقابل به رأس $\widehat{eBf}$ را سم کنید.

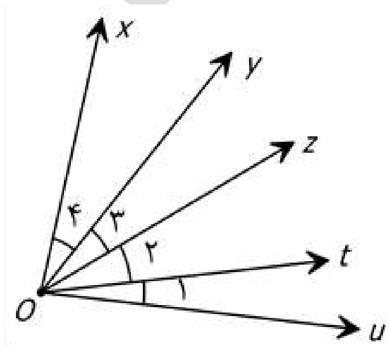


ج) در شکل رو به رو آیا دو زاویهء $\widehat{O_{۱}}$ و $\widehat{O_{۲}}$ متقابل رأس هستند؟

اگر متقابل به رأس نیستند زاویه های متقابل به رأس آن ها را رسم کنید

و تساوی بین زاویه ها را بنویسید.

مثال: زاویه های $\widehat{O_{۴}}$ و $\widehat{O_{۳}}$ و $\widehat{O_{۲}}$ و $\widehat{O_{۱}}$ همه باهم برابر اند جاهای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.



$x\hat{O}u = ...۴...\ \widehat{O_{۱}}$

$y\hat{O}t = ...۲...\ \widehat{O_{۲}}$

$x\hat{O}t = ...۱...\ t\hat{O}x$

$\widehat{O_{۳}} = ...\frac{۱}{۳}...\ y\hat{O}u$

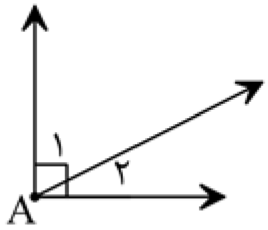
دو زاویه متمم : اگر مجموع اندازه های دو زاویه برابر ۹۰ درجه باشد دو زاویه متمم یکدیگر نامیده می شوند بنابراین اگر دو زاویه A و B متمم یکدیگر باشند آنگاه :

$$\hat{A}+\hat{B}=۹۰^\circ$$

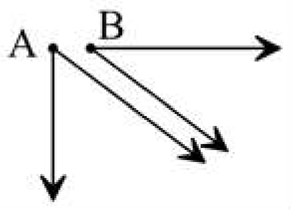
دو زاویه مکمل : اگر مجموعه اندازه های دو زاویه برابر ۱۸۰ درجه باشد دو زاویه مکمل یکدیگر نامیده می شوند بنابراین اگر زاویه‌های A و B مکمل یکدیگر باشند آنگاه :

$$\hat{A}+\hat{B}=۱۸۰^\circ$$

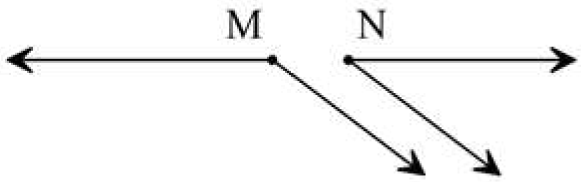
مثال : با توجه به نمونه ها برای زاویه های متمم و مکمل تساوی بنویسید .



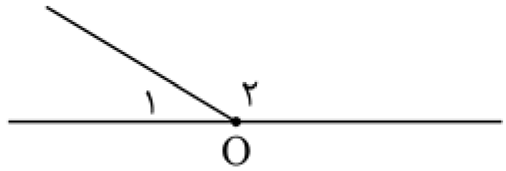
$$\widehat{A_۱}+\widehat{A_۲}=۹۰^\circ$$



$$\hat{A}+\hat{B}=......$$



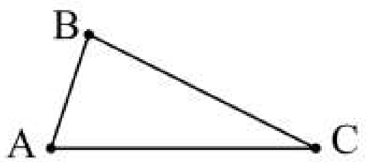
$$\widehat{M}+\widehat{N}=۱۸۰^\circ$$



.... + ... = ...

نکته : در هر مثلث، مجموع زاویه های آن برابر با ۱۸۰° است .

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$



مثال : تفاضل دو زاویهء متمم؛ ۱۰° است. اندازه هر یک از زاویه ها را بدست آورید .

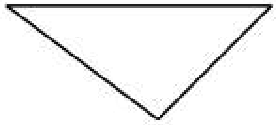
پاسخ : فرض کنیم A و B دو زاویهء متمم باشند پس $\hat{A}+\hat{B}=۹۰^\circ$. از طرفی با توجه به اطلاعات مسئله داریم : $\hat{A}-\hat{B}=۱۰^\circ$ که نتیجه می دهید : $\hat{A}=\hat{B}+۱۰^\circ$. با توجه به این دو مطلب می توان نوشت :

$$\left(\hat{\boldsymbol{B}}+۱۰^\circ\right)+\hat{\boldsymbol{B}}=۹۰^\circ \Longrightarrow ۲\hat{\boldsymbol{B}}=۹۰^\circ-۱۰^\circ=۸۰^\circ \Longrightarrow \hat{\boldsymbol{B}}=۴۰^\circ$$

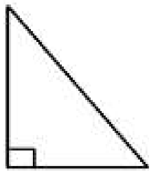
$$\hat{\boldsymbol{A}}=\hat{\boldsymbol{B}}+۱۰^\circ=۴۰^\circ+۱۰^\circ=۵۰^\circ$$

دسته بندی مثلث ها :

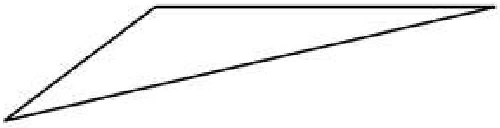
مثلث ها را با توجه به اندازه زاویه هایشان به سه دسته تقسیم می کنیم :



۱) مثلث هایی که هر سه زاویه آنها تند است .



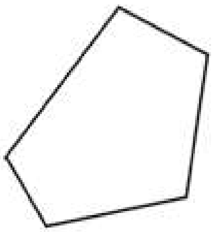
۲) مثلث هایی که یک زاویه راست دارند .



۳) مثلث هایی که یک زاویه باز دارند .

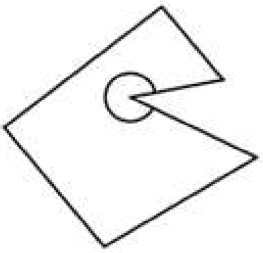
سوال : چرا مثلث نمیتواند دو زاویه راست داشته باشد؟

پاسخ : زیرا در این صورت مثلث دارای دو زاویه ۹۰ درجه می شود که مجموع آن دو زاویه برابر با ۱۸۰ درجه است، در صورتی که می دانیم مجموع سه زاویه مثلث ۱۸۰ درجه است.



چند ضلعی محدب (کوژ) : چند ضلعی هایی که هیچ زاویه بزرگتر از ۱۸۰ درجه ندارند چند ضلعی محدب نامیده می شوند.

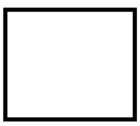
(چند ضلعی محدب مثل: مربع، مستطیل، همه مثلث ها و ....)

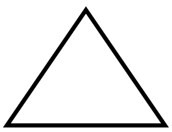


چند ضلعی مقعر (کاو) : چند ضلعی که دست کم یک زاویه بزرگتر از ۱۸۰ درجه داشته باشد چند ضلعی مقعر نامیده می‌شود.

نکته : یک چند ضلعی نمی تواند به طور همزمان، هم محدب و هم مقعر باشد.

چند ضلعی منتظم : به چند ضلعی هایی که همه ضلع ها و زاویه هایشان با هم مساوی است چند ضلعی منتظم گفته می شود.



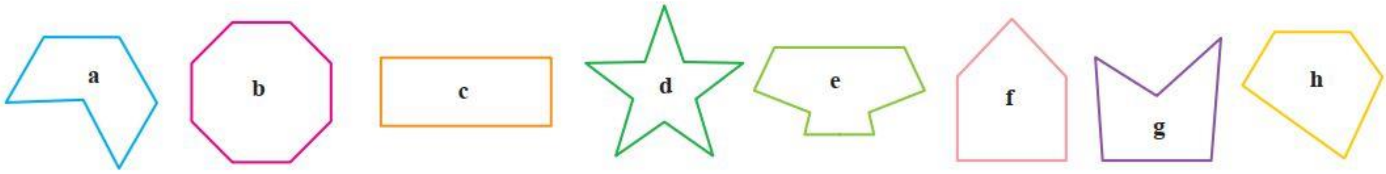


(مثلا مربع چهارضلعی منتظم است و مثلث متساوی الاضلاع سه ضلعی منتظم است)

نکته: چند ضلعی های منتظم مقعر نیستند. یعنی هیچ زاویهء بزرگتر از ۱۸۰° ندارند.

نکته: هر چند ضلعی محدب حتما یک چند ضلعی منتظم نیست. (مانند: مستطیل یا متوازی الاضلاع یا مثلث با زاویهء راست)

مثال : چند ضلعی های محدب و مقعر را در شکل زیر مشخص کنید:



پاسخ :

چند ضلعی های محدب : b و c و f و h

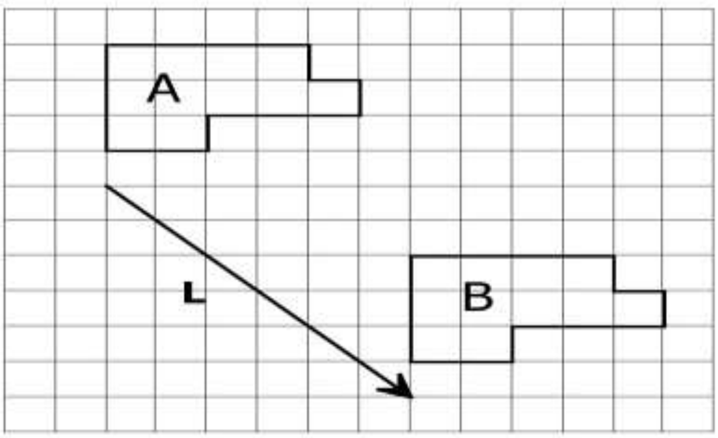
چند ضلعی های مقعر : a و d و e و g

درس سوم: تبدیلات هندسی (انتقال ، تقارن ، دوران)

انتقال : اگر یک شکل را بدون تغییر جهت روی صفحه حرکت دهیم (جابجا کنیم) تا به مکان دیگری برود . به این عمل انتقال و شکل حاصل را انتقال یافته شکل اولیه می گویند .

به عنوان مثال در شکل زیر شکل B انتقال یافته شکل A توسط بردار L است.

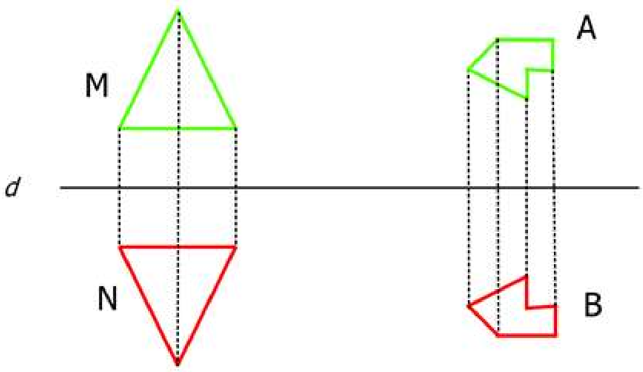
(چون تمام نقاط شکل A ، ۶ واحد به سمت راست، و سپس ۶ واحد به سمت پایین جابجا شده اند.)



نکته : وقتی شکلی را روی صفحه انتقال می دهیم تصویر بدست آمده مساوی (هم اندازه) و هم جهت با شکل اولیه است .

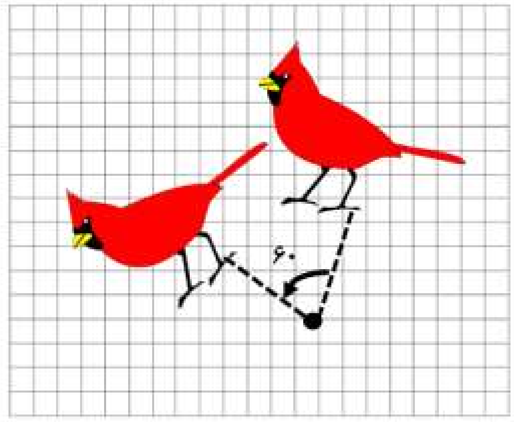
تقارن محوری (یا تقارن نسبت به خط) : اگر قرینه تمام نقاط شکلی را نسبت به خط دیگر مشخص کنیم آنگاه شکلی مانند B حاصل می شود که آن را قرینه شکل A نسبت به خط تقارن d می نامیم.

به عنوان مثال در شکل مقابل تصویر B قرینه تصویر A نسبت به خط d است، و تصویر N قرینه تصویر M نسبت به خط d می باشد.



نکته : وقتی قرینه شکلی را نسبت به یک خط پیدا می‌کنیم تصویر بدست آمده مساوی آن شکل است (هم اندازه) اما جهت آن تغییر می کند.

دوران : اگر شکل A را حول یک نقطه ثابت بچرخانیم و شکل جدید را B بنامیم آنگاه شکل B را دوران یافته شکل A می نامیم.



این عمل را دوران و نقطه ثابت را مرکز دوران می نامیم.

در شکل مقابل تصویر پرنده را به اندازه °۶۰ در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت دوران داده ایم.

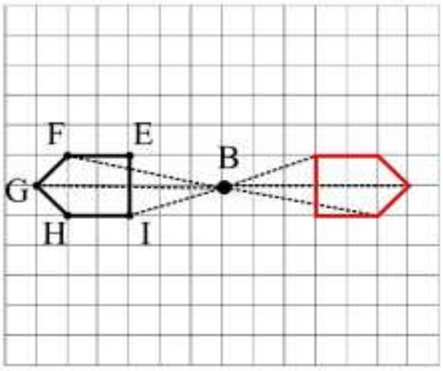
برای دوران یک شکل حول یک نقطه باید هر کدام از نقاط آن شکل را به مرکز دوران وصل کرد سپس پاره خط حاصل را به اندازه زاویه دوران، چرخاند (هم جهت یا خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت، با توجه به خواسته مسئله) در نهایت با انجام این کار برای تمامی نقاط، شکل دوران یافته به دست می آید.

توجه : برای دوران یک چند ضلعی کافی است عملیات بالا را برای راس های آن انجام دهیم و سپس راس ها را به هم وصل کنیم .

دوران به اندازه °۱۸۰ :

در دوران به اندازه ۱۸۰ درجه، جهت دوران (در جهت عقربه های ساعت یا خلاف) آن **مهم نمی باشد** و در هر دو حالت شکل های یکسان به دست می‌آید .

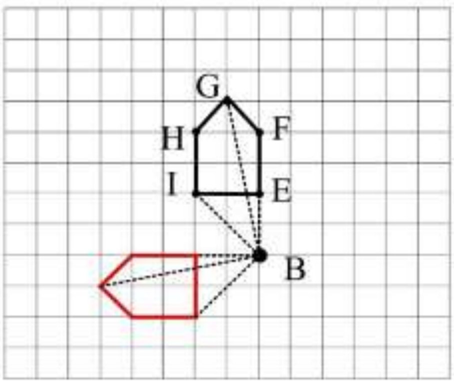
برای مشخص کردن دوران یافته یک چند ضلعی حول مرکز دوران به اندازه ۱۸۰ درجه، کافی است رأس های چند ضلعی را به مرکز دوران وصل کنیم و آنها را به همان اندازه امتداد دهیم تا رأس های چند ضلعی دوران یافته مشخص شود.



دوران °۱۸۰ شکل EFGHI حول نقطه B :

دوران به اندازه °۹۰ :

در دوران به اندازه °۹۰ **جهت دوران مهم است** . برای پیدا کردن دوران یافته چند ضلعی ها حول مرکز دوران رأس های چند ضلعی را با خط چین به مرکز دوران وصل میکنیم و خط چین ها را به اندازه ۹۰ درجه دوران می‌دهیم تا رأس های چند ضلعی جدید به دست آید.

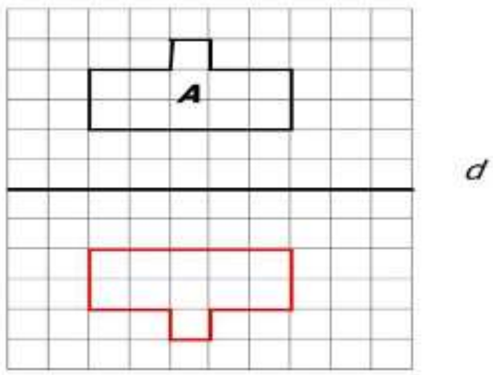


در شکل مقابل پنج ضلعی EFGHI را °۹۰ حول نقطه B در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت دوران داده ایم :

نکته : دوران یافته شکل A با شکل اولیه مساوی است (هم اندازه است) ولی جهت شکل تغییر می کند.

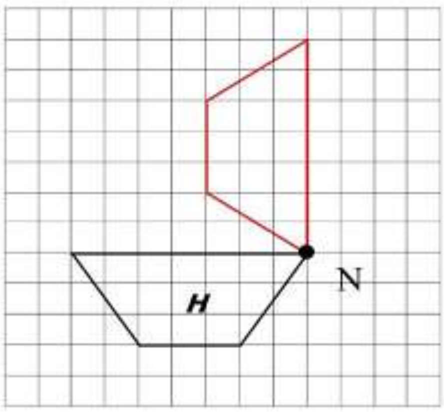
مثال : در هر قسمت شکل حاصل از تبدیل گفته شده را رسم کنید :

الف) قرینه A نسبت به خط d :

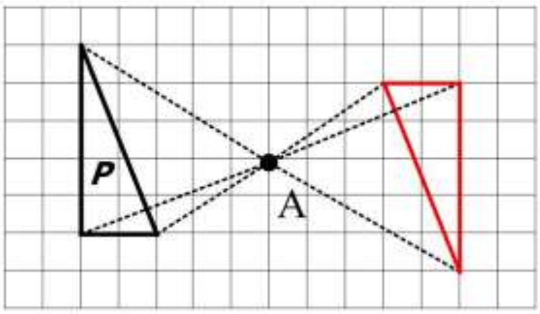


ب) دوران °۹۰ شکل H نسبت به نقطهء N در جهت حرکت

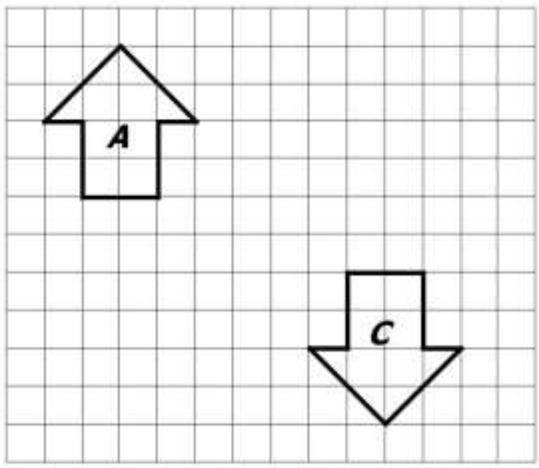
عقربه های ساعت :



پ) دوران °۱۸۰ شکل P نسبت به نقطهء A :



مثال : می خواهیم شکل B را طوری رسم کنیم که با دو تبدیل شکل A بر شکل C منطبق شود. شکل B را رسم کنید و روی هر فلش نوع تبدیل را بنویسید.



$$A \Longrightarrow B \Longrightarrow C$$

درس چهارم: شکل های مساوی (هم نهشت)

تعریف : اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (انتقال، تقارن یا دوران) در صفحه بر شکل دیگری در صفحه منطبق کنیم می گوییم این دو شکل با هم هم نهشت (مساوی) هستند.

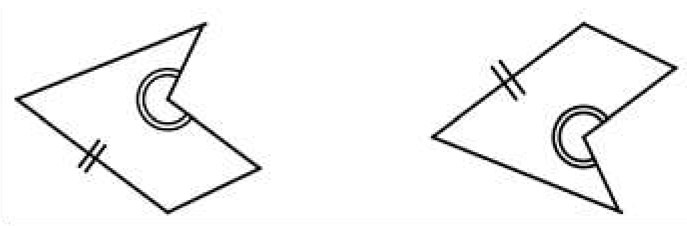
قرارداد : از علامت $\cong$ برای نشان دادن همنهشتی دو شکل استفاده می‌کنیم به عنوان مثال اگر دو مثلث دلخواه ABC و FGH هم نهشت باشند ، می نویسیم : $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{FGH}$

نکته: در دو شکل هندسی هم نهشت، اجزای متناظر دو به دو با هم برابرند.

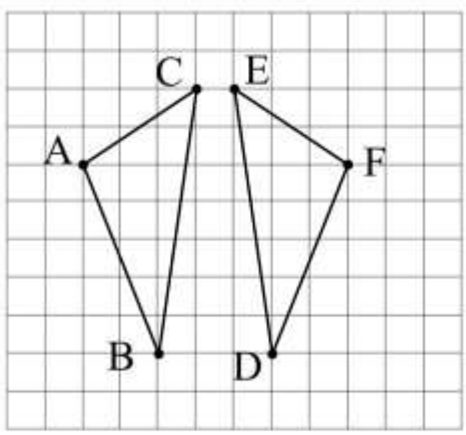
مثال : دو شکل مقابل همنهشت هستند .

یک ضلع و یک زاویهء مساوی (متناظر) با هم در دو شکل

با علامت گذاری یکسان مشخص شده اند.



مثال : در شکل مقابل دو مثلث همنهشت دیده می شود. تساوی اجزای متناظر این دو مثلث را کامل کنید.



$\overline{AB} = \overline{FD}$

$\overline{AC} = \overline{FE}$

$\overline{BC} = \overline{ED}$

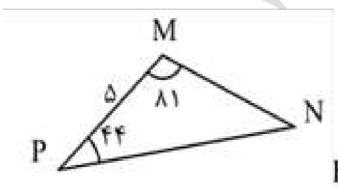
$\hat{A} = \hat{F}$

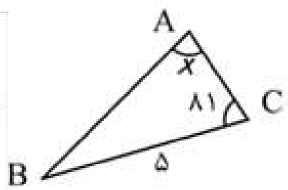
$\hat{C} = \hat{E}$

$\hat{B} = \hat{D}$

اجزای متناظر را روی شکل با علامت گذاری یکسان مشخص کنید.

مثال: مثلث های زیر همنهشت هستند. اندازه بعضی از زاویه ها به درجه و بعضی از ضلع ها به سانتی متر داده شده است، اندازه زاویهء x چند درجه است؟





پاسخ:

دقت کنید که در مثلث ABC زاویهء A رو به رو ضلع ۵ سانتی متری است، و چون دو مثلث همنهشت هستند پس در مثلث PMN نیز باید زاویهء رو به رو به ضلع ۵ سانتی متری هم اندازه زاویهء $\hat{A}$ یعنی برابر با x باشد. در واقع داریم: $\hat{N} = x$. با توجه به اینکه مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰° می باشد می توانیم برای مثلث MNP بنویسیم:

$$\hat{M} + \hat{N} + \hat{P} = ۱۸۰^\circ \Longrightarrow ۸۱ + ۴۴ + x = ۱۸۰ \Longrightarrow x = ۱۸۰ - (۸۱ + ۴۴) = ۵۵^\circ$$

نمونه سوالات امتحانی فصل چهارم

۱- اگر شکل  به شکل  تبدیل شده باشد، از تبدیلات ......دوران ۱۸۰° ...... و ......تقارن...... استفاده شده است .

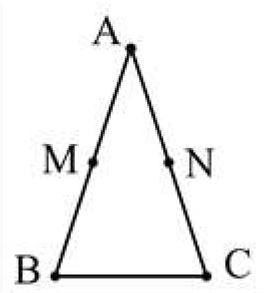
۲- در تبدیل انتقال، جهت شکل ......حفظ می شود...... .

۳- اگر مجموع دو زاویه ......۹۰°...... باشد، دو زاویه متمم یکدیگراند.

۴- اندازه مکمل زاویهء ۱۱۵° ، ......۶۵°...... است.

۵- در شکل زیر ۶ نقطه متمایز روی خط قرار دارند، ...۱۵... پاره خط در شکل وجود دارد.

۶- مثلث ABC متساوی الساقین است، یعنی $\overline{AB}=\overline{AC}$. نقطه M وسط AB است و نقطه N وسط AC .



چرا $\overline{AN}$ و $\overline{AM}$ با هم برابراند؟

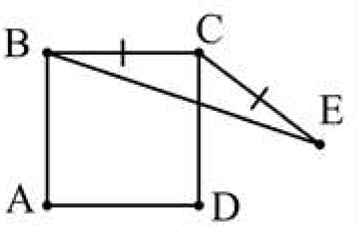
پاسخ : چون M وسط AB است پس آن را نصف می کند یعنی : $\overline{AM}=\overline{MB}$.

همین طور برای پاره خط AC چون N وسط پاره خط است پس : $\overline{AN}=\overline{NC}$.

با توجه به اینکه طول دو ساق با هم برابر هستند، پس نصف طول آن ها نیز با هم برابر است

یعنی : $\overline{AM}=\overline{AN}$.

۷- در شکل زیر یک مربع و یک مثلث متساوی الساقین دیده می شود. چرا $\overline{CD}=\overline{CE}$ ؟



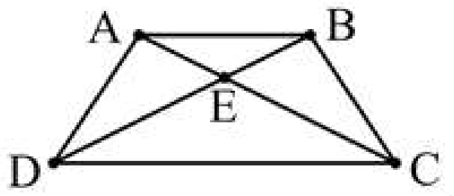
پاسخ :

چون چهارضلعی ABCD مربع است و همه اضلاع آن با هم برابر اند $\quad \boldsymbol{\overline{CD}=\overline{BC}}$

چون مثلث BCE متساوی الساقین است $\quad \boldsymbol{\overline{CE}=\overline{BC}}$

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\overline{CD}=\overline{BC}}\\ \boldsymbol{\overline{CE}=\overline{BC}}\end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\overline{CD}=\overline{CE}}$$

۸- با توجه به شکل مقابل رابطه های زیر را کامل کنید (چهارضلعی ABCD یک ذوزنقه است) :



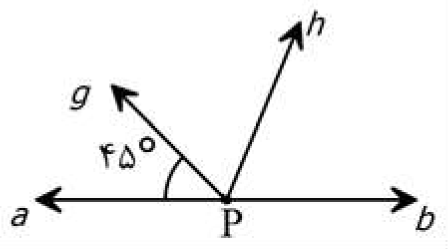
$\overline{BE}+\overline{ED}=\overline{BD}$

$\overline{AC}-\overline{EC}=\overline{AE}$

$\overline{DA}+\overline{DC}>\overline{AC}$

$\overline{AE}+\overline{EB}>\overline{AB}$ (نامساوی مثلث)

۹- در شکل زیر نیم خط Ph نیمساز زاویهء $\widehat{gPb}$ است. اندازه زاویهء $\widehat{hPb}$ را بدست آورید.

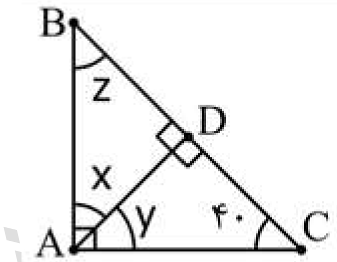


پاسخ :

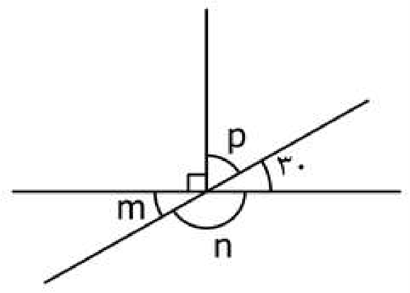
$$\widehat{gPb} = ۱۸۰° - ۴۵° = ۱۳۵°$$

$$\Longrightarrow \widehat{hPb} = \frac{۱}{۲}\,\widehat{gPb} = ۱۳۵ \div ۲ = ۶۷\,/\,۵$$

۱۰- در هر قسمت مقادیر مجهول را بیابید .



شکل الف



شکل ب

پاسخ :

الف) در مثلث ABC زاویه $\widehat{A} = ۹۰°$ است. با توجه به اینکه مجموع زاویه های مثلث برابر با $۱۸۰°$ است داریم :

$$\widehat{z} = ۱۸۰° - (۹۰° + ۴۰°) = ۱۸۰° - ۱۳۰° = ۵۰°$$

در مثلث ADC نیز داریم : $\widehat{D} = ۹۰°$ و مشابه بالا می توان نوشت :

$$\widehat{y} = ۱۸۰° - (۹۰° + ۴۰°) = ۱۸۰° - ۱۳۰° = ۵۰°$$

در مثلث ABD ، $\widehat{D} = ۹۰°$ پس داریم :

$$\widehat{x} = ۱۸۰° - (۹۰° + ...°) = ۱۸۰° - ......° = ...°$$

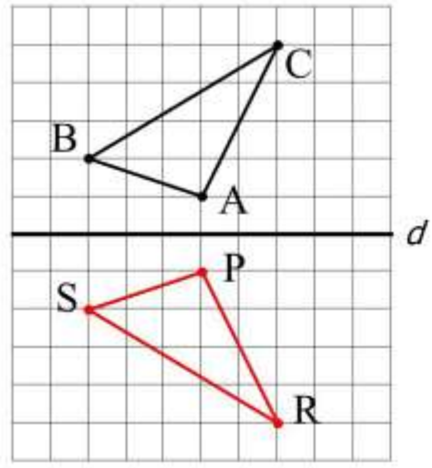
ب)

$$\widehat{p} + ۳۰° = ۹۰° \Longrightarrow \widehat{p} = ۶۰°$$

$\widehat{m} = ۳۰°$ (زیرا زاویه m متقابل به رأس با زاویهء ۳۰ درجه است)

$$\widehat{n} = ۱۸۰° - ۳۰° = ۱۵۰°$$

۱۱- قرینه مثلث ABC را نسبت به خط d رسم کنید و آن را PRS بنامید.



آیا این دو مثلث هم نهشت هستند؟

تساوی اجزای متناظر را بنویسید.

پاسخ :

بله

$\overline{AB} = \overline{PS}$	$\hat{A} = \hat{P}$
$\overline{AC} = \overline{PR}$	$\hat{B} = \hat{S}$
$\overline{BC} = \overline{SR}$	$\hat{C} = \hat{R}$

۱۲- اگر اندازه قد علی را با a ، اندازه قد حسن را با b و اندازه قد حسین را با c نشان دهیم در هر قسمت رابطه داده شده را کامل کنید و نتیجه را به فارسی بنویسید:

الف)

$a > b$ (یعنی قد علی بیشتر از قد حسن است.)

$b = c$ (یعنی قد حسن با قد حسین یکی است)

$\Rightarrow$ $a > c$

نتیجه: قد علی از قد حسین بزرگتر است.

در واقع بجای اینکه علی و حسین را کنار هم قرار دهیم و قد آن ها را مقایسه کنیم از دو رابطه بالا متوجه شدیم که علی بلند قدتر از حسین است.

ب) اگر بجای رابطه بالا رابطه زیر برقرار باشد، نتیجه را بیابید:

$b > a$ (یعنی قد حسن بزرگتر از قد علی است)

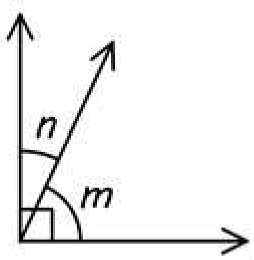
$a > c$ (یعنی قد علی بیشتر از قد حسین است)

$\Rightarrow$ $b > c$

نتیجه: با توجه به رابطه داده شده در قسمت (ب)

نتیجه می گیریم که قد حسن از قد حسین بیشتر است.

۱۳- در شکل رو به رو $m < ۷۰^\circ$ مقدار n کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟



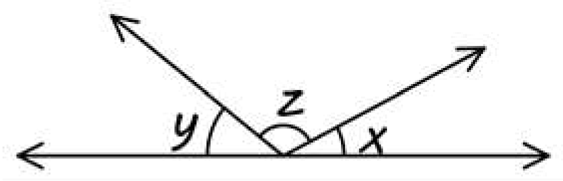
الف) ۲۵° ب) ۳۰° ج) ۴۰° د) ۱۰°

پاسخ:

دو زاویهء m و n متمم یکدیگر اند، زاویهء m از ۷۰° کمتر است و برای اینکه جمع m و n برابر با ۹۰° بشود باید زاویهء m با زاویه ای بزرگتر از ۳۰° جمع بشود. دقت کنید m مقدار ۷۰° را اختیار نمی کند، و همیشه اندازه آن کمتر از ۷۰° است به همین دلیل n باید بیشتر از ۳۰° باشد. که در بین گزینه ها فقط (ج) این شرایط را دارد.

مثلا اگر $\hat{m} = ۶۸^\circ$ باشد زاویهء n باید ۳۲° باشد تا دو زاویه متمم هم باشند.

۱۴- در شکل زیر $۳۰^\circ < x$ و $y < ۶۰^\circ$ است. مقدار z کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟



الف) ۹۰° ب) ۱۰۰° ج) ۶۰° د) ۲۵°

پاسخ:

دقت کنید که با توجه به اطلاعات مسئله جمع دو مقدار x و y مقداری کمتر از ۹۰° می شود (زیرا x کمتر از ۳۰ و y دارای مقداری کمتر از ۶۰ درجه است). پس برای اینکه این سه زاویه تشکیل یک زاویهء نیم صفحه بدهند باید با مقداری بیشتر از ۹۰° جمع شوند که از بین گزینه ها فقط گزینه (ب) این شرایط را دارد.

تمرین

۱) عبارات صحیح را با ✓ و عبارات غلط را با × مشخص کنید.

الف) مکمل هر زاویه از خود زاویه بزرگتر است.

ب) از دو نقطه فقط یک خط می گذرد.

پ) دو زاویهء متقابل به رأس با هم برابر اند.

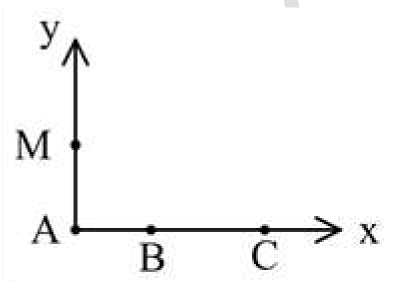
ت) مثلث متساوی الساقینی با یک زاویهء راست وجود ندارد.

ث) انتقال یافته هر شکل با شکل اولیه برابر است.

چ) هر چهار ضلعی که چهار زاویهء مساوی داشته باشد یک چهار ضلعی منتظم است.

ح) مساحت هر دو شکل همنهشت با هم برابر اند.

۲) در شکل مقابل چند نیم خط وجود دارد؟



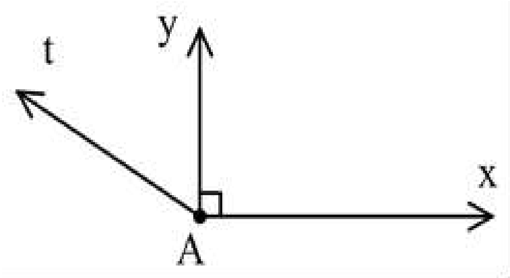
۳) در شکل زیر $\overline{AB} = ۳$، $\overline{BE} = x$، $\overline{EF} = ۴ + x$ و $\overline{AF} = ۱۸$ است. مقدار x را بیابید.

۴) برای هر قسمت یک خط رسم کنید و نقاط M ، N ، S و T را طوری روی آن مشخص کنید که رابطه داده شده صحیح باشد.

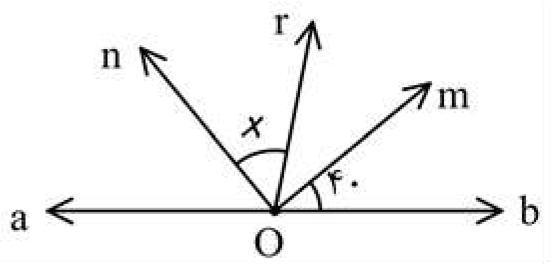
الف) $\overline{MN} - \overline{SM} = \overline{NT} + \overline{TS}$

ب) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

۵) در شکل مقابل $t\widehat{A}x = ۱۵۰^\circ$ زاویهء $t\widehat{A}y$ چه کسری از زاویهء $t\widehat{A}x$ است؟

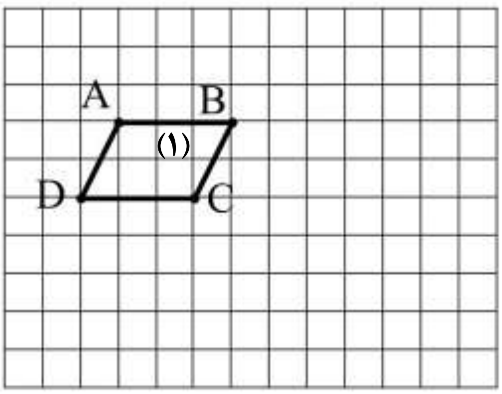


۶) در شکل زیر om نیمساز زاویهء $r\widehat{O}b$ است و on نیمساز زاویهء $r\widehat{O}a$ می باشد. مقدار x را بیابید.



۷) متوازی الاضلاع مقابل را در نظر بگیرید:

ابتدا متوازی الاضلاع (۱) را نسبت به خط DC تقارن دهید و رأس های انتقال یافته B و A را بیابید. سپس شکل جدید را (۲) بنامید و آن را حول نقطه B جدید به اندازه ۱۸۰° خلاف حرکت عقربه های ساعت دوران دهید. شکل نهایی را (۳) نام گذاری کنید.



آیا شکل (۱) و شکل (۳) با یکدیگر همنهشت هستند؟

دانش آموز عزیز برای تمرینات بیشتر و تسلط بهتر بر مطالب این فصل به کتاب درسی مراجعه کنید.