فصل اوّل

1

ترسیم‌های هندسی و استدلال

هندسه و به‌ویژه ترسیم‌های هندسی از دیرباز مورد استفاده بشر بوده‌است.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

درس اوّل

ترسیم‌های هندسی

انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و به‌ویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است.

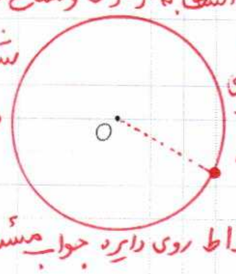
از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی پیشرفته کنونی، همگی نیازمندِ ترسیم‌های هندسی است.

فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

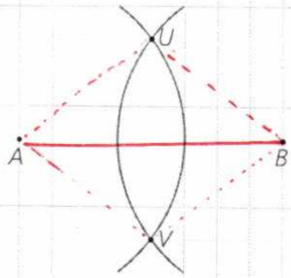
۱ــ نقطه‌ای مانند O را در صفحه درنظر بگیرید و برای رسم کردن از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.

کافی است به مرکز O و شعاع دلخواه
شعاع ۲ دایره رسم
مثلاً ۲ سانتی‌متری کنیم.



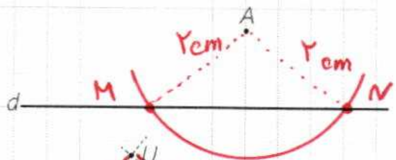
تمام نقاط روی دایره جواب مسئله هستند.

نقاطی را مشخص کنید که فاصلهٔ یکسانی از نقطهٔ O دارند. (مثلاً همهٔ نقاطی که فاصله‌شان از نقطهٔ O برابر ۲ سانتی‌متر است.)

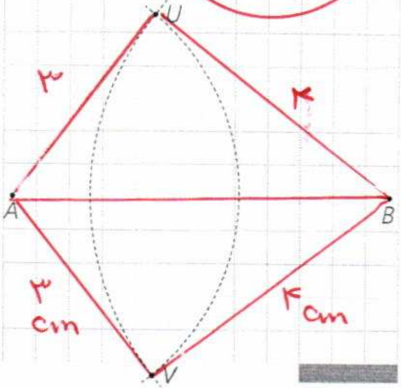


۲ــ نقاط A و B را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنید و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

از دو سر پاره خط AB به یک فاصله هستند.



۳ــ نقطهٔ A، مانند شکل مقابل به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ A باشند. کافی است به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی کمانی رسم کنیم که خط d را در نقاط M و N قطع کند.



۴ــ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ A یک کمان بزنید. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

همگی تا نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متری قرار دارند.

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟ همگی تا نقطهٔ B به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متری قرار دارند.

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازهٔ شعاع آنها و فاصلهٔ نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

$AU = 3cm \quad BU = 4cm$

$AV = 3cm \quad BV = 3cm$

$AU + BU > AB$

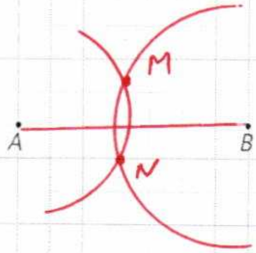
ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

$AU = 3$
$BU = 4$

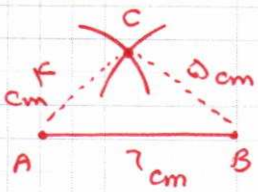
$AB^2 = AU^2 + BU^2 = 9 + 16 = 25$

$\Rightarrow AB = 5\ cm$

کار در کلاس



۱ــ دو نقطه مانند A و B را به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشد. کافی است به مرکز A کمانی به شعاع ۲ و از نقطهٔ B کمانی به شعاع ۲/۵ سانتی‌متر رسم کنیم. نقاط تقاطع دو کمان جواب مسئله هستند.



۲ــ توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد. ابتدا با خط‌کش یک پاره‌خط به اندازهٔ ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. سپس از دو سر این پاره‌خط، یک کمان به شعاع ۴ و از یک کمان به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.

۳ــ جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئلهٔ زیر:

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

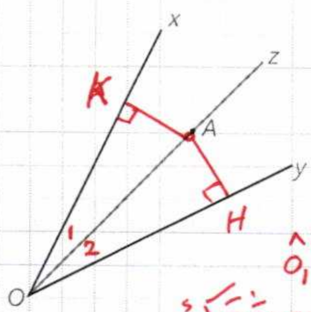
نقاط A و B به فاصلهٔ .... از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر .... و از نقطهٔ B برابر .... باشد.

الف) ۵ و ۶ و ۴
ب) ۶ و ۳ و ۳
پ) ۵ و ۱ و ۲

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

فعالیت

۱ــ زاویهٔ xOy و نیم‌خط Oz را نیمساز آن درنظر بگیرید. فرض کنید نقطهٔ A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصلهٔ نقطهٔ A از دو ضلع زاویهٔ xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطهٔ A عمودهایی بر نیم‌خط‌های Ox، Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است.)



$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
مشترک $OA = OA$

$\Rightarrow O\overset{\triangle}{A}H \cong O\overset{\triangle}{A}K \Rightarrow AH = AK$
(وتر و یک زاویهٔ حاده)

توجه: حالت همنهشتی (ز ض ز) را نمی‌توان بکاربرد

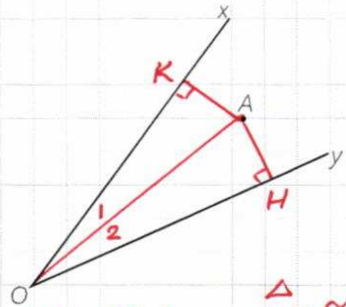
نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد ...آنگاه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله هستند.

۲ـ زاویهٔ xOy و نقطهٔ A را چنان درنظر می‌گیریم که فاصلهٔ نقطهٔ A از نیم‌خط‌های Oy و Ox باهم برابر باشد.

نشان دهید که نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد.

(راهنمایی: پاره‌خط OA، و دو عمود از نقطهٔ A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره‌خط OA همان نیمساز xOy است.)



$AH = AK$ ، $OA = OA$ وتر } $\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OAK \Rightarrow$ (وتر و یک ضلع) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

یعنی OA نیمساز زاویهٔ xOy است.

توجه: حالت (ض ز ض) را نیز می‌توان بکار برد.

نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه ....روی نیمساز زاویه.... قرار دارد.

نتیجه

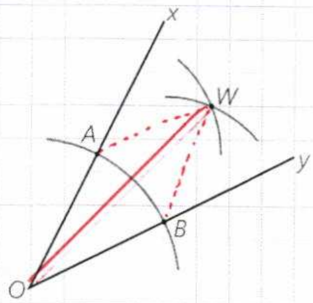
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی ....نیمساز.... یک زاویه قرار داشته باشد، ....از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.... و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی ....نیمساز.... آن زاویه قرار دارد.

فعالیت

۱ـ زاویهٔ xOy را درنظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.

ـ طول پاره‌خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

$OA = OB$ چون توسط پرگار به مرکز O و شعاع یکسان رسم شده‌اند.



۲ـ دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.

ـ طول پاره‌خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

$AW = BW$ چون شعاع پرگار ثابت مانده است.

ـ پاره‌خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ همنهشت به حالت تساوی سه ضلع

$OA = OB$ ، $AW = BW$ ، $OW = OW$ مشترک } $\Rightarrow \triangle OAW \cong \triangle OBW$ (ض ض ض) $\Rightarrow A\hat{O}W = B\hat{O}W$

ـ اندازهٔ زاویه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ مساوی

چون از دو مثلث متناظر همنهشت می‌باشند.

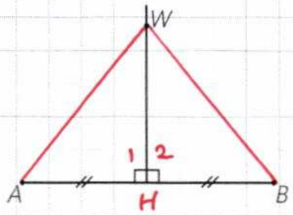
ـ پاره‌خط OW برای زاویهٔ xOy چه نوع پاره‌خطی است؟ نیمساز زاویه $x\hat{O}y$ است.

کار در کلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید. ابتدا یک زاویه دلخواه رسم می‌کنیم از رأس زاویه یک کمان سپس از نقاط بدست آمده دو کمان با شعاع‌های مساوی رسم می‌کنیم طوری که این دو کمان متقاطع باشند. اگر نقطه‌ی تقاطع این دو کمان را به رأس زاویه وصل کنیم، نیمساز زاویه بدست می‌آید.

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

فعالیت



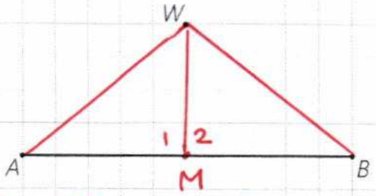
۱ــ پاره‌خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطهٔ W از دوسر پاره‌خط AB به یک فاصله است.

$$\left.\begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ WH = WH \text{ مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{W}H \cong B\hat{W}H \Rightarrow AW = BW$$

(ض ز ض)

نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک‌پاره‌خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره‌خط به یک فاصله است.



۲ــ پاره‌خط AB و نقطهٔ W را به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که نقطهٔ W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی WA = WB) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(راهنمایی: از نقطهٔ W به A و B و به وسط پاره‌خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.)

$$\left.\begin{array}{l} WA = WB \\ MW = MW \\ AM = BM \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{M}W \cong B\hat{M}W \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

وچون $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180$ پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$ یعنی MW بر AB عمود است وچون نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌باشد پس MW عمودمنصف پاره‌خط AB است.

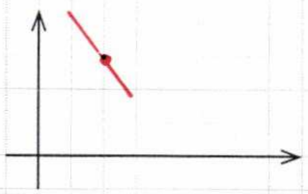
نتیجه ۲

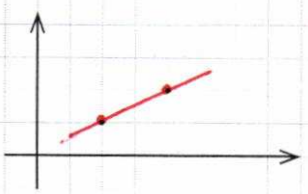
اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد آن نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خطی به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

فعالیت



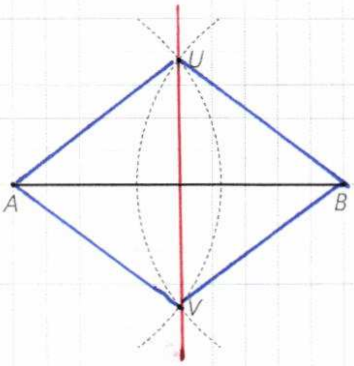


۱ــ یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه موردنظر بگذرد؟ بی‌شمار

۲ــ دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ موردنظر بگذرد؟ فقط یک خط

۳ــ به نظر شما برای اینکه یک خط به‌طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟ دو نقطه

فعالیت



پاره‌خط AB را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطهٔ A و بار دیگر با همان اندازه از نقطهٔ B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.

۲ــ طول پاره‌خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ مساوی‌اند، زیرا اندازه شعاع دایره ثابت است.

۳ــ طول پاره‌خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ مساوی‌اند، زیرا اندازه شعاع دایره ثابت است.

۴ــ آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند؟ چرا؟
بله، چون از دو سر پاره خط A B به یک فاصله هستند.

۵ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

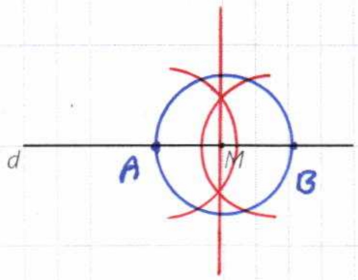
کاردرکلاس

مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید. پرگار را به اندازه‌ی بیش از نصف پاره خط AB باز کرده و از هر طرف یک کمان رسم می‌کنیم (از نقاط A و B) خط حاصل از اتصال نقاط تقاطع این دو کمان عمود منصف AB است.

رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن



خط d و نقطهٔ M را روی آن، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

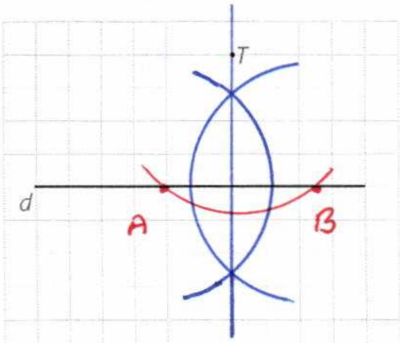
۱ــ به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به‌گونه‌ای که M وسط پاره‌خط AB باشد. به شعاع دلخواه کمانی به مرکز M رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و A قطع کند.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳ــ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d ..عمود..... و از نقطهٔ .M. می‌گذرد.

کاردرکلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید. ابتدا نقطه آ دلخواه روی خط d در نظر می‌گیریم. به شعاع دلخواه یک دایره به مرکز این نقطه رسم می‌کنیم. حال عمود منصف پاره خط بدست آمده از محل تقاطع خط مفروض و دایره را رسم می‌کنیم.



فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطهٔ T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.

می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ T به یک فاصله باشند. به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه متمایز قطع کند.

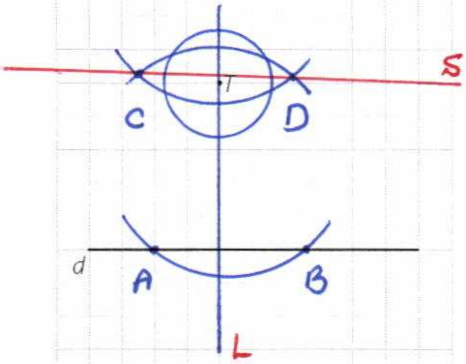
۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳ــ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ T می‌گذرد؟ چرا؟ بله، زیرا نقطهٔ T از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.

عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d ...عمود...... و از نقطهٔ ...T بگذرد........

کاردرکلاس

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید. ابتدا از نقطهٔ دلخواه T کمانی رسم می‌کنیم که خط مورد نظر را در نقاط A و B قطع کند. عمودمنصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود است.



$L \perp d$

$L \perp S \rightarrow d \parallel S$

فعالیت

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطهٔ غیرواقع بر آن

خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.

می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ T بگذرد و با خط d موازی باشد.

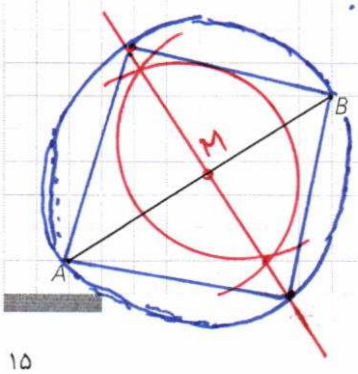
۱ــ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲ــ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳ــ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورّب درنظر بگیرید.)

کاردرکلاس

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید. ابتدا از نقطهٔ T خطی عمود بر d و سپس از همین نقطه خط دیگری عمود بر خط عمود بر d رسم می‌کنیم.



فعالیت

پاره‌خط داده شدهٔ AB در شکل مقابل را با اندازهٔ ۴ واحد درنظر بگیرید.

الف) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطهٔ برخورد این عمودمنصف با پاره‌خط AB، M باشد.

ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم کنید تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند.

پ) چهارضلعی ACBD چگونه چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟ مربع است

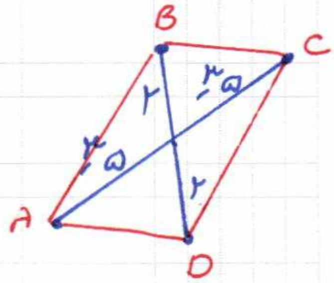
زیرا قطرهای این چهارضلعی هم برهم عمودند و هم همدیگر را نصف می‌کنند.

کار در کلاس

طریقهٔ رسم مربعی را که طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دهید. ابتدا عمودمنصف قطر مربع را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی تقاطع عمودمنصف و قطر (نقطه‌ی وسط قطر) دایره‌ای به مرکز این نقطه و به شعاع نصف قطر رسم می‌کنیم. نقاط تقاطع دایره با عمودمنصف را به نقاط دو سر پاره‌خط داده شده وصل می‌کنیم.

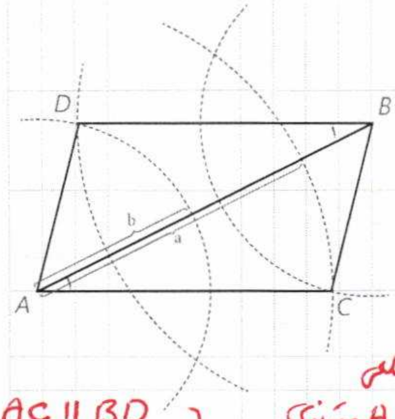
تمرین

۱ــ می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟ دو پاره خط طوری رسم می‌کنیم که همدیگر را نصف کنند. با اتصال متوالی دو سر این پاره خط‌ها چهارضلعی مورد نظر (متوازی‌الاضلاع) حاصل می‌شود. بی‌شمار



۲ــ می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.

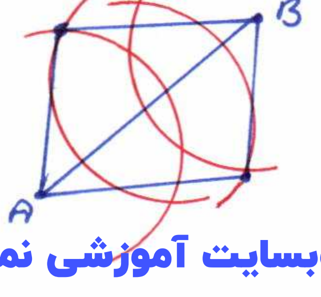
۳ــ پاره‌خط AB داده شده است. دهانهٔ پرگار را یک بار به اندازهٔ a و بار دیگر به اندازهٔ b باز می‌کنیم و از نقطهٔ A دو کمان می‌زنیم. (به‌طوری‌که مجموع a و b از اندازهٔ AB بزرگ‌تر باشد) سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این‌بار از نقطهٔ B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چهارضلعی ACBD چه نوع چندضلعی‌ای است؟ چرا؟

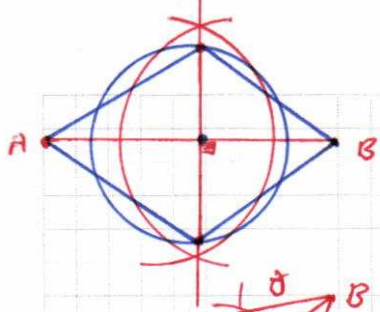


(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های ABC و ABD و زوایای A_1 و B_1 نسبت به هم چگونه‌اند.)

$AC = BD$
$BC = AD$
$AB = AB$ مشترک
$\Big\} \to A\overset{\triangle}{B}C \cong A\overset{\triangle}{B}D$ (ض‌ض‌ض) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow AC \parallel BD$ و چون $AC = BD$ $\Big\} \to$ چهارضلعی ACBD متوازی‌الاضلاع است.

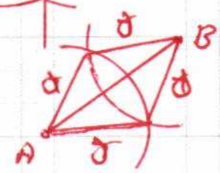
۴ــ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد. مشابه تمرین ۳ ابتدا قطر را رسم می‌کنیم.





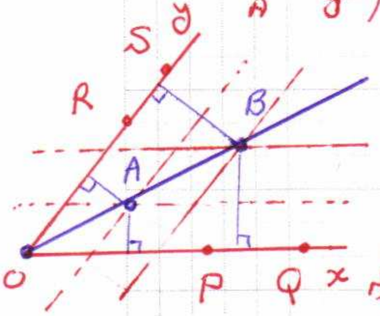
۵ــ می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد. دوباره خط عمود بر هم یکی به طول ۳ و دیگری به طول ۵ رسم می‌کنیم. چهارضلعی بدست می‌آید.



ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

مانند رسم متوازی الاضلاع ابتدا قطر را رسم می‌کنیم.



۶ ــ دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۲ واحد باشد.

ب) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ موردنظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویهٔ موردنظر را رسم کنید.

ابتدا از یک نقطهٔ دلخواه روی ضلع ox خطی موازی آن و به فاصله ۲ سانتی‌متری رسم می‌کنیم. سپس از یک نقطهٔ دلخواه دیگر روی ضلع ox خط موازی آن و به فاصله ۴ سانتی‌متری رسم می‌کنیم.

پایین برگه

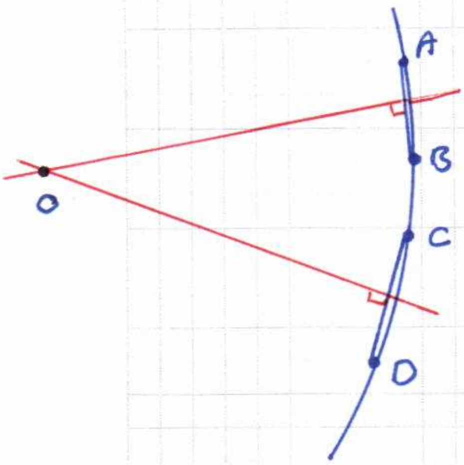
۷ــ وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

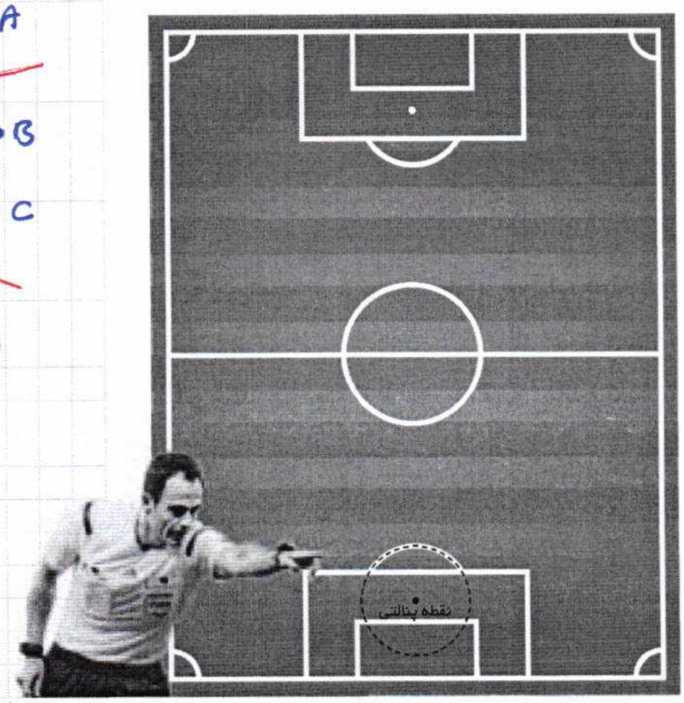
عمود منصف AB از نقطهٔ O می‌گذرد. چون O از دو سر پاره‌خط AB می‌گذرد. مرکز دایره

آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطهٔ پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطهٔ جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطهٔ پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطهٔ هجده قدم، نقطهٔ پنالتی را مشخص کند.

نقطهٔ پنالتی محل تقاطع دو وتر از قوس جلوی محوطهٔ هیجده قدم است.





اگر به همین ترتیب موارد قبل را برای ضلع oy انجام دهیم و محل تقاطع خطوط را A و B بنامیم. در این صورت نقطهٔ A (به فاصله ۲ سانتی‌متری از هر ضلع زاویه) و نقطهٔ B (به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متری از هر ضلع زاویه) بدست می‌آید. طبق ویژگی نیمساز زاویه نقاط A و B از هر ضلع زاویه به یک فاصله‌اند. پس امتداد پاره خط AB علاوه بر اینکه از نقطهٔ O می‌گذرد، نیمساز زاویه xOy می‌باشد.

درس دوم

استدلال

شیوهٔ درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعهٔ انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری مواقع، نتیجه‌گیری‌های غلط، تیره‌شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در پی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد بینجامد. ممکن است فردی با استدلال‌هایی این‌گونه، همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند :

ــ من در اولین امتحانم موفق نشدم، پس در امتحان‌های بعدی نیز موفق نخواهم شد.

ــ تیم مورد علاقهٔ من از ابتدای فصل در تمام بازی‌هایش شکست خورده است، پس در بازی‌آینده نیز شکست خواهد خورد.

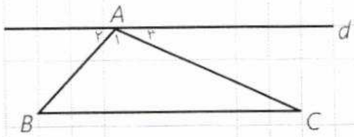
استقرا و استنتاج

در سال‌های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال، که با آن روبه‌رو شدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم». البته با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستیِ نتیجهٔ گرفته‌شده مطمئن بود.

به‌طور مثال اگر فردی با مشاهدهٔ اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه‌گیری کند که همهٔ افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از **استدلال استقرایی** استفاده کرده است.

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن **استدلال استنتاجی** گفته می‌شود.

به‌طور مثال با دانستن رابطهٔ بین خطوط موازی و مورّب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه کنید که استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می‌توان انجام داد.



$$d \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \hat{A}_2 \\ \hat{C} = \hat{A}_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3 = 180^\circ$$

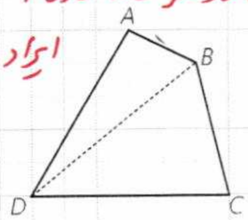
فعالیت

به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هریک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله : مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پژمان : در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به‌سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

در استدلال پژمان فقط چهارضلعی‌های خاص درنظر گرفته شده است. بنابراین ایراد دارد.



پیمان : می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم.

مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{BCD}$ برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با 360°.

استدلال پیمان از کل به جزء است و کاملاً درست می‌باشد.

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به‌کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئلهٔ قبل برابر 360° است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

ــ نوع استدلال ارائه‌شده توسط هرکدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

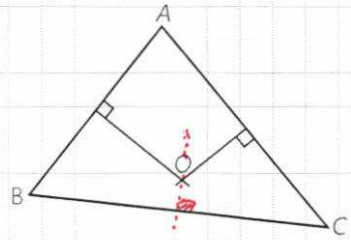
پژمان : استدلال استقرایی (از جزء به کل)

پیمان : استدلال استنتاجی (از کل به جزء)

مثال : می‌دانیم که هر نقطهٔ روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سرِ آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که **سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرس‌اند (در یک نقطه به هم می‌رسند).**

استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره‌خط‌های AB و AC متقاطع‌اند، عمودمنصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند.

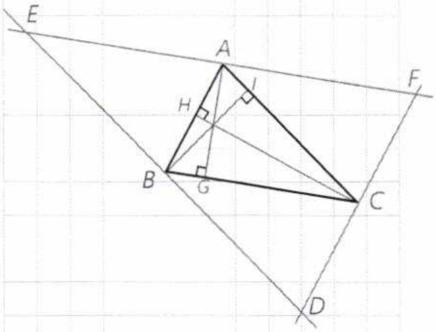


۱ـ نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است؛ بنابراین OC = OA

۲ـ نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ بنابراین OB = OA

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : OC = OB. بنابراین نقطهٔ O روی عمود منصف قرار دارد. درنتیجه نقطهٔ O محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث ABC است.

مثال : استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.



استدلال : مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به‌وجود آید.

چهارضلعی ABCF چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟ متوازی الاضلاع، اضلاع مقابل موازیند.

بنابراین BC = AF ❶

ـ چهارضلعی ACBE چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟ متوازی الاضلاع، اضلاع مقابل موازیند

بنابراین BC = AE ❷

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : AE = AF؛ بنابراین نقطهٔ A وسط پاره‌خط EF است.

$$\left.\begin{matrix} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AG \boxed{\perp} EF$$

لذا خط AG عمود منصف پاره‌خط EF است.

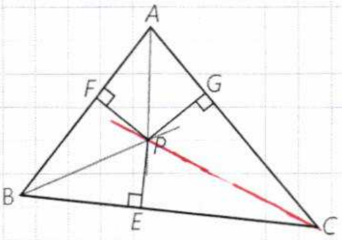
به‌طور مشابه می‌توان نشان داد :

پاره‌خط BI، عمود منصف پاره‌خط DE است.

پاره‌خط CH، عمود منصف پاره‌خط DF است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC، روی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث D.E.F هستند و درنتیجه همرسند.

مثال : می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرس‌اند.



استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطهٔ P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.

۱ــ نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ A است؛ بنابراین ....PF.... = ...PG....

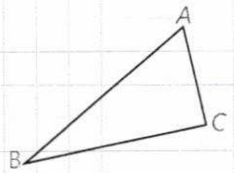
۲ــ نقطهٔ P روی نیمساز B است؛ بنابراین ....PF.... = ...PE....

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : ...PG... = ...PE... بنابراین نقطهٔ P روی ...نیمساز زاویه C است.

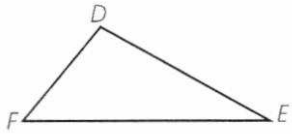
درنتیجه نقطهٔ P محل برخورد ...نیمسازهای زاویه‌های مثلث ABC است.

فعالیت

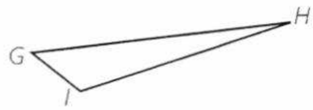
به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اولِ جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع	AB	BC	AC
زاویه‌ها	C	A	B



اضلاع	EF	DE	DF
زاویه‌ها	D	F	E



اضلاع	GH	HI	GI
زاویه‌ها	I	G	H

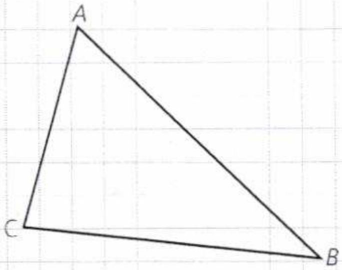
چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویهٔ زیر آن وجود دارد؟ زاویهٔ بزرگتر روبرو به ضلع بزرگتر است.

با توجه به این رابطه دربارهٔ یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟ در هر مثلث زاویه بزرگتر، روبرو به ضلع بزرگتر است.

برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟ استقرایی

آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس موردنظر درست است؟ خیر، نمی‌توان از نتیجه بدست آمده مطمئن بود

مسئله : اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،
زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.



استدلال : برای واضح‌شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می‌کنیم.
آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.

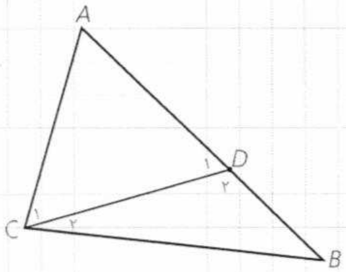
فرض: AB>AC
حکم: ...$\hat{C}$... > ...$\hat{B}$...

یاد آوری

۱ـ در مثلث متساوی‌الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

۲ـ اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویهٔ خارجی مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

می‌دانیم طبق فرض $AB>AC$ است؛ لذا می‌توانیم نقطهٔ D را روی AB جایی انتخاب کنیم که $AC=AD$



★ اندازهٔ زاویه‌های C و C_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C} \boxed{>} \hat{C}_1$

مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟ متساوی الساقین

★★ اندازهٔ زاویه‌های C_1 و D_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1 \boxed{=} \hat{D}_1$

زاویهٔ D_1 چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟ خارجی

★★★ اندازهٔ زاویه‌های D_1 و B نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{D}_1 \boxed{>} \hat{B}$

از ★ و ★★ و ★★★ چه نتیجه‌ای دربارهٔ اندازهٔ زاویه‌های B و C می‌توان گرفت؟

$\hat{C} \boxed{>} \hat{B}$

همان‌طور که مشاهده کردید در مثلثی مانند $\overset{\triangle}{ABC}$ فرض کردیم که ضلع $AB>AC$ است و نشان دادیم: زاویهٔ روبه‌رو به $AC <$ زاویهٔ روبه‌رو به AB است.

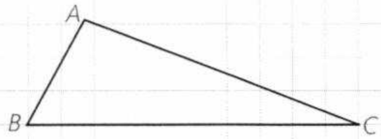
چرا می‌توان این موضوع را دربارهٔ تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟

زیرا این اثبات مبتنی بر واقعیت هایی است که درستی آنها را قبول داریم که می باشد (استدلال استنتاجی)

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئلهٔ قبل با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آید، **قضیه** نامیده می‌شود.

قضیه ۱: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،
زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ رو به‌رو به ضلع کوچک‌تر.

فرض: $AB<AC$
حکم: $\hat{C}<\hat{B}$



ـ بار دیگر به آنچه انجام شد، دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان این اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.

بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحلی توسط علاقه‌مندان به ریاضی به‌دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

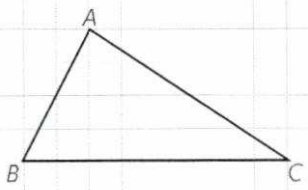
به‌طور مثال عکس قضیهٔ ۱ به‌صورت زیر است :

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده‌است.

عکس قضیه ۱ : اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

فرض: $\hat{C} < \hat{B}$

حکم: $AB < AC$



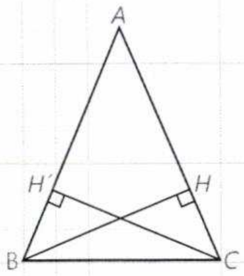
مثال :

قضیه : اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال :

قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.



فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث‌بودن ABC و ارتفاع‌بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

گزاره یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزارهٔ ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزارهٔ ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک **گزارهٔ مرکب** است.

جمله‌های زیر مثال‌هایی از گزاره است:

ــ مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

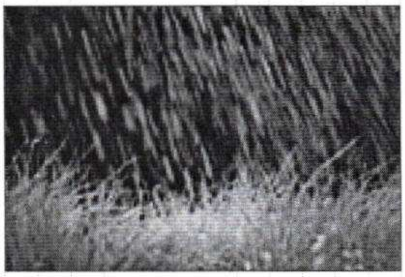
ــ ۳>۲

جمله‌های زیر گزاره نیست:

ــ آیا فردا هوا بارانی است؟

ــ چه هوای خوبی!

ــ کتابت را مطالعه کن.



نقیض یک گزاره: همان‌طورکه گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال:

الف) گزاره: «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن: «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره: «مجموع زوایای داخلی هر مثلث °۱۸۰ است.»

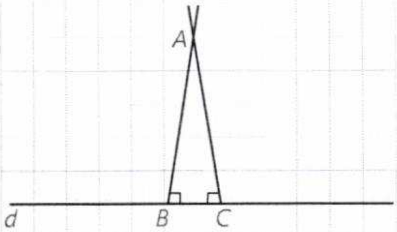
نقیض آن: «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث °۱۸۰ است.» که معادل است با «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن °۱۸۰ نیست.»

پ) گزاره: «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش °۳۶۰ نیست.»

نقیض: «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی‌اش °۳۶۰ نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی‌اش °۳۶۰ است.»

در برخی گزاره‌ها به‌جای اینکه دربارهٔ چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران ببارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، **گزاره‌های شرطی** می‌گویند.

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. بدین‌صورت که به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.



مثال : از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

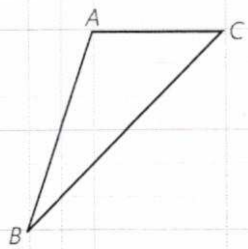
فرض : نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم : از نقطهٔ A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال : با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطهٔ A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

حال می‌خواهیم عکس قضیهٔ ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.

عکس قضیهٔ ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.



برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.

فرض : $\hat{A} > \hat{B}$

حکم : $BC > AC$

اثبات : با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم...نادرست... باشد. بنابراین باید...$BC < AC$... یا...$BC = AC$...

هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اوّل : اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیهٔ ۱ باید ...$\hat{A} < \hat{B}$...، که با فرض در تناقض است.

حالت دوّم : اگر $BC = AC$ باشد، $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث...متساوی الساقین... خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیرممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.

قضیه‌های دو شرطی

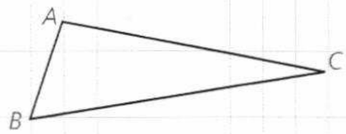
همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که :

> اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر، و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.

قضیه‌های دو شرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث باشد



$$BC > AB \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} < \hat{C}$$

مثال : در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به‌صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین‌صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است :

الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

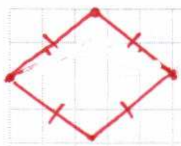
پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌های محدب)

ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که (-2) یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ

تهیه کننده :



همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟ نادرست. چهارضلعی ممکن است لوزی نباشد.

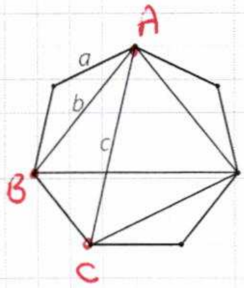
اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در موارد (پ) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟ ممکن است درست باشد. خیر

آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستیِ آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (پ) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش حکم کلی (پ) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» دربارهٔ گزینهٔ (ت) چه می‌توان گفت؟ مثال نقض دارد. اگر $۴۱ = n$ آنگاه

$۴۱^۲ + ۴۱ + ۴۱ = ۴۱(۴۱+۱+۱) = ۴۱ \times ۴۳$ عدد اول نیست

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

کار در کلاس



۱ــ در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به‌دست می‌آید».

خیر: مثلث ABC متساوی الساقین نیست.

۲ــ آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعهٔ A و B، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$ خیر

$A = \{۱,۲\}$

$B = \{۳,۴,۵\}$

$A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند. خیر

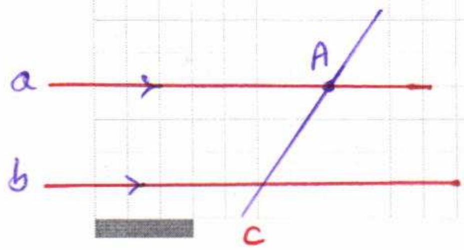
مثلث اول $a = ۸ , h = ۳ \Rightarrow S_1 = \frac{۳ \times ۸}{۲} = ۱۲$

مثلث دوم $a = ۱۲ , h = ۲ \Rightarrow S_2 = \frac{۲ \times ۱۲}{۲} = ۱۲$

ولی دو مثلث هم نهشت نیستند.

تمرین

۱ــ می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند. فرض کنیم که خط c خط b را قطع نکند



پس $c \parallel b$ و این به این معنی است که از نقطهٔ A دو خط موازی b رسم شده است و این ممکن نیست. لذا خط c باید خط b را قطع کند.

۲ــ با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

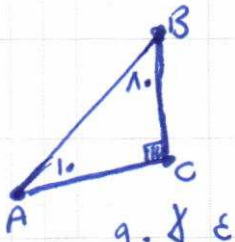
فرض کنیم که $\hat{B}=\hat{C}$ لذا باید $AB = AC$ باشد و این مخالف فرض است.

۳ــ گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۳) الف)

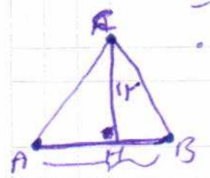


$۹۰ \not< ۴(۱۰)$

۴ــ با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(n-۲)\times ۱۸۰$.

CH۱۰

۳) ب) در مثلث زیر ارتفاع از ضلع AB کوچک‌تر نیست. مثال نقض



۵ــ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است. هر لوزی یک مربع نیست.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست. مستطیلی وجود دارد که مربع است.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد. همه مثلث‌ها بیش از یک زاویه قائمه دارند.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر ۳۶۰° است.

مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر ۳۶۰° نیست.

۶ــ عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

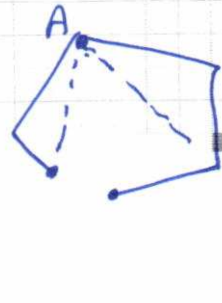
الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

۴) در یک n ضلعی محدب اگر رأس معینی را A بنامیم از این رأس $n-۳$ قطر می‌گذرد (چرا؟) و لذا $(n-۳)+۱=n-۲$ مثلث متمایز ایجاد می‌شود. مجموع زاویه‌های داخلی این مثلث‌ها یعنی $(n-۲)\times۱۸۰$ برابر مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی محدب است.



عکس قضیه: الف) در هر مثلث اگر دو زاویه روبرو به دو ضلع برابر باشند آنگاه آن دو ضلع برابرند.

قضیه دوشرطی: در هر مثلث اگر دو ضلع برابر باشند، زاویه‌های روبرو به آن دو ضلع نیز برابرند و برعکس

ب) اگر قطرهای یک چهارضلعی عمود منصف همدیگر باشند آنگاه چهارضلعی لوزی است.

قضیه دوشرطی: یک چهارضلعی لوزی است اگر و تنها اگر قطرهای آن عمود منصف همدیگر باشند.

پ) در هر مثلث اگر سه زاویه مساوی باشند آنگاه سه ضلع مساویند.

قضیه دوشرطی: اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند آنگاه سه زاویه برابرند و برعکس

ت) اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند آنگاه شعاع‌های آنها برابرند.

قضیه دوشرطی: اگر دو دایره شعاع برابر داشته باشند آنگاه مساحت‌ها برابر دارند و برعکس