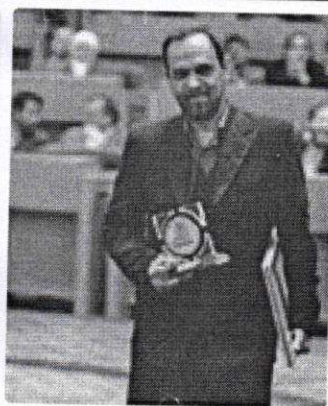


توان‌های گویا و عبارت‌های چبری

@Faragiri10
ghadam.com



پژوهشگاه رویان هشتم خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و پژوهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر سعید کاظمی آنتیانی و گروهی از پژوهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشکده پزشکی تولیدمثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.



درس اول ریشه و توان

درس دوم ریشه ۱۱م

درس سوم توان‌های گویا

درس چهارم عبارت‌های چبری

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

درس اول: ریشه و توان

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه با هم دارند. به عنوان مثال $\sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow 2^3 = 8$ ؛ همچنین $2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$. علامت \Rightarrow به این معنی است که طرف چپ، طرف راست را نتیجه می‌دهد. اگر طرف راست هم طرف چپ را نتیجه دهد، می‌توان هر دو نتیجه را به طور خلاصه با علامت \Leftrightarrow نوشت. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $2^3 = 8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$.

فعالیت

۱ اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

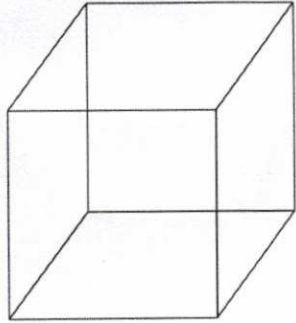
$(-3)^3 = -27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$	$\sqrt{81} = 9 \Leftrightarrow 9^2 = 81$
$(-5)^3 = -125 \Leftrightarrow$	$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow$
$2^4 = 16 \Leftrightarrow$	$\sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow$
$11^2 = 121 \Leftrightarrow$	$\sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow$
$(0/25)^2 = 0/0625 \Leftrightarrow$	$\sqrt{48} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$
$(0/5)^2 = 0/25 \Leftrightarrow$	$\sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow$

۲ در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

عدد	۸	۲۷	-۲۷	۱۲۵	-۱۰۰۰	۳۳۷۵	۱۰۰۰	۷۲۹
ریشه سوم	۲	۳	-۳	۵	-۱۰	۱۵	۱۰	۹

کار در کلاس

۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ متر مکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.



طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶

تهیه کننده:

دو دانش‌آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبه‌رو به دست آورده‌اند :
روش‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.

احمد : چون $3^3 = 27$ و
 $2 < \sqrt[3]{25} < 3$ پس $8 < 25 < 27$
بهرتر است $2/8$ را امتحان کنم
آیا $(2/8)^3 = 25$ ؟
 $(2/8)^3 = (2/8)^2 \times 2/8$
 $= 21/952$
 $= 22$

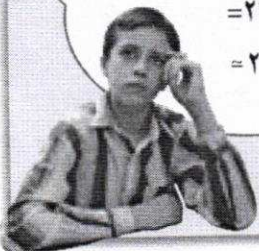


محسن : 25 به 27 نزدیک‌تر است
تا 8 ، پس بهتر است عدد $2/9$ را
امتحان کنم.

$$(2/9)^3 = (2/9)^2 \times 2/9$$

$$= 24/389$$

$$= 24/4$$



دبیر : ریشه سوم 25 تقریبی به دست می‌آید و می‌توانیم به صورت تقریبی آن را برابر $2/9$ بگیریم.

$$\sqrt[3]{25} = 2/9$$

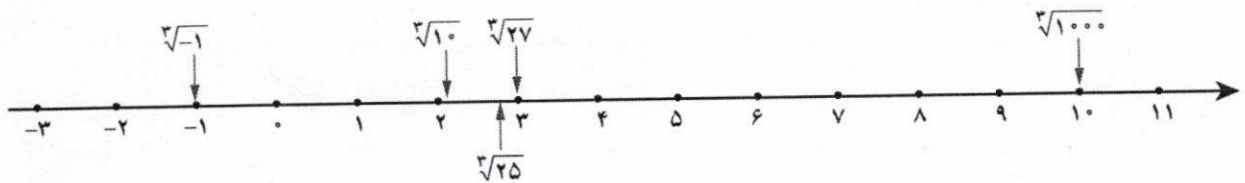
احمد : مقدار دقیق $\sqrt[3]{25}$ چقدر است؟

دبیر : $\sqrt[3]{25}$ یک عدد اعشاری است. اگر ماشین حساب مناسب داشته باشید، می‌توانید مقدار تقریبی دقیق‌تری برای آن به دست آورید، اما هیچ‌گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری قابل نمایش نیست. به همین علت برای نمایش مقدار دقیق آن از نماد $\sqrt[3]{25}$ استفاده می‌کنیم.

اگر قدرت ماشین حساب شما بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به دست می‌دهد و عدد دقیق‌تری برای ریشه سوم 25 حاصل می‌شود.

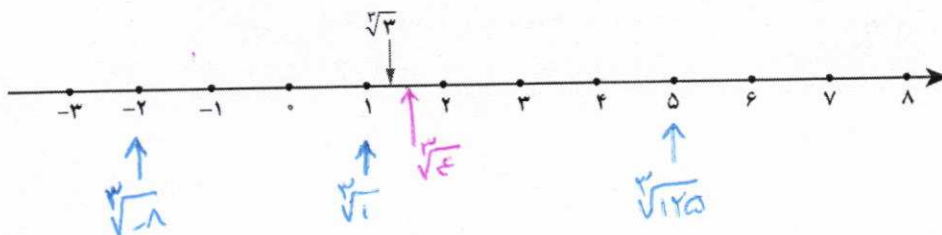
$\sqrt[3]{25}$ برای نمایش مقدار دقیق ریشه سوم 25 به کار می‌رود، اما در کاربردهای دنیای واقعی با مقادیر تقریبی آن مانند $2/9$ ، $2/92$ و $2/924$ کار می‌کنیم.

ریشه عددها را می‌توانیم به طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم.



مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt[3]{1} = 1 \quad \sqrt[3]{3} = 1/4 \quad \sqrt[3]{4} = 1/5 \quad \sqrt[3]{125} = 5 \quad \sqrt[3]{-8} = -2$$



۳) مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است:
 الف) چون $۳۰ < ۳۶ < ۲۵$ پس $۶ < \sqrt{۳۰} < ۵$. همچنین چون $۸ < ۵ < ۱$ پس $۲ < \sqrt[۳]{۵} < ۱$.

@Faragiri10
ghadam.com

پ) $\sqrt[۳]{\square} < \sqrt{۱۰} < \sqrt[۴]{\square}$

ب) $\sqrt[۴]{\square} < \sqrt{۷} < \sqrt[۳]{\square}$

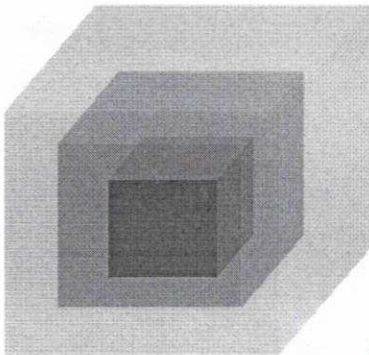
ث) $\sqrt[۲]{\square} < \sqrt[۳]{۲۰} < \sqrt[۳]{\square}$

ت) $\sqrt[۳]{\square} < \sqrt{-۱۷} < \sqrt[۳]{\square}$

۴) زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

ب) $۹ < \sqrt{\square} < ۱۰$
 هر عددی بین ۸۱ تا ۱۰۰

الف) $۴ < \sqrt[۳]{\square} < ۵$
 هر عددی بین ۶۴ تا ۱۲۵



۵) سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)

$۲۷ < a^3 < ۶۴$
 $\sqrt[۳]{۲۷} < \sqrt[۳]{a^3} < \sqrt[۳]{۶۴}$
 $۳ < a < ۴$

فعالیت

۱) مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشه چهارم را تعریف کرد. با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی داریم:

$۲^۴ = ۱۶$
 $(-۲)^۴ = ۱۶$
 ریشه‌های چهارم \Rightarrow ۱۶

$۵^۴ = ۶۲۵$
 $(-۵)^۴ = ۶۲۵$
 ریشه‌های چهارم \Rightarrow ۶۲۵

$\sqrt[۴]{۶۲۵}$ عددی مثبت و برابر است با ریشه چهارم مثبت عدد ۶۲۵؛ یعنی $\sqrt[۴]{۶۲۵} = ۵$. همچنین $-\sqrt[۴]{۶۲۵}$ عددی منفی است و برابر است با ریشه چهارم منفی عدد ۶۲۵؛ یعنی $-\sqrt[۴]{۶۲۵} = -۵$.

آیا ۱۶ ریشه چهارم دارد؟ آیا عددی مثبت یا منفی وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر ۱۶ شود؟
 اکنون عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت دارای ... ریشه چهارم است که ... یکدیگرند.
 عددهای منفی ریشه چهارم ندارند.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰,۰۰۰	۳۱۲۵	۸۱	
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵	+۱۰ -۱۰	$5\sqrt[4]{5}$ $-5\sqrt[4]{5}$ ۳ -۳

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲	۳۱۲۵	۷۱	-۲۴۳	-۱	-۱۰۰۰۰۰	۱۹	۴۴
ریشه پنجم	-۲	۵	$\sqrt[5]{71}$	-۳	-۱	-۱۰	$\sqrt[5]{19}$	$\sqrt[5]{44}$

۳ ریشه پنجم چه عددهایی با خودش برابر است؟

۴ محاسبه کنید.

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$\sqrt[5]{-0.00032} = -0.2$$

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای **یک** ریشه پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشه پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشه پنجم آن **منفی** است.

تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{14} = 4 < \sqrt{20} < 5 = \sqrt{25}$	$\sqrt[3]{32} = 4 < \sqrt[3]{20} < 3 = \sqrt[3]{27}$
$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{-8} = -2$	$\sqrt[3]{8} = 2 < \sqrt[3]{20} < 3 = \sqrt[3]{27}$
$\sqrt[3]{125} = 5$	$\sqrt[3]{216} = 6 < \sqrt[3]{250} < 7 = \sqrt[3]{343}$	$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt[3]{-125} = -5 < \sqrt[3]{-90} < -4 = \sqrt[3]{-64}$	$\sqrt[3]{-27} = -3 < \sqrt[3]{-20} < -2 = \sqrt[3]{-8}$	$\sqrt{400} = 20$
$\sqrt[3]{-1} = -1$	$\sqrt[3]{-216} = -6 < \sqrt[3]{-200} < -5 = \sqrt[3]{-125}$	$\sqrt[3]{400} = 7 < \sqrt[3]{400} < 8 = \sqrt[3]{512}$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt[5]{-32} = -2$	$\sqrt[3]{400} = 7 < \sqrt[3]{400} < 8 = \sqrt[3]{512}$

۵۱

$$\sqrt[3]{125} = 5 < \sqrt[3]{400} < 8 = \sqrt[3]{512}$$

$$\sqrt[5]{1024} = 4 < \sqrt[5]{400} < 5 = \sqrt[5]{3125}$$

تهیه کننده:

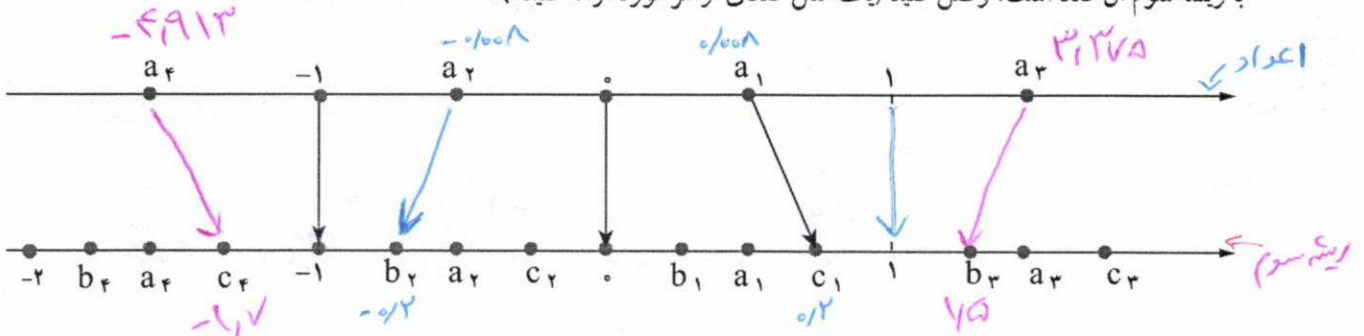
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt{10} \approx 3.17 \quad \sqrt[3]{25} \approx 2.92 \quad \sqrt[4]{7/25} \approx 1.19$$

$$\sqrt[5]{16} \approx 1.77 \quad \sqrt[3]{64} \approx 4.00 \quad \sqrt[4]{90} \approx 3.08$$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).



۴ با توجه به آنچه درباره ریشه سوم اعداد درک کرده اید، به سؤال های زیر پاسخ دهید.

$$\langle a < \sqrt[3]{a} \rangle$$

(الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. چه عددی می تواند باشد؟ اعداد بین ۰ تا ۱
 (ب) a عددی است که ریشه سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. چه اعدادی می تواند باشد؟ ۰، ۱، ۸

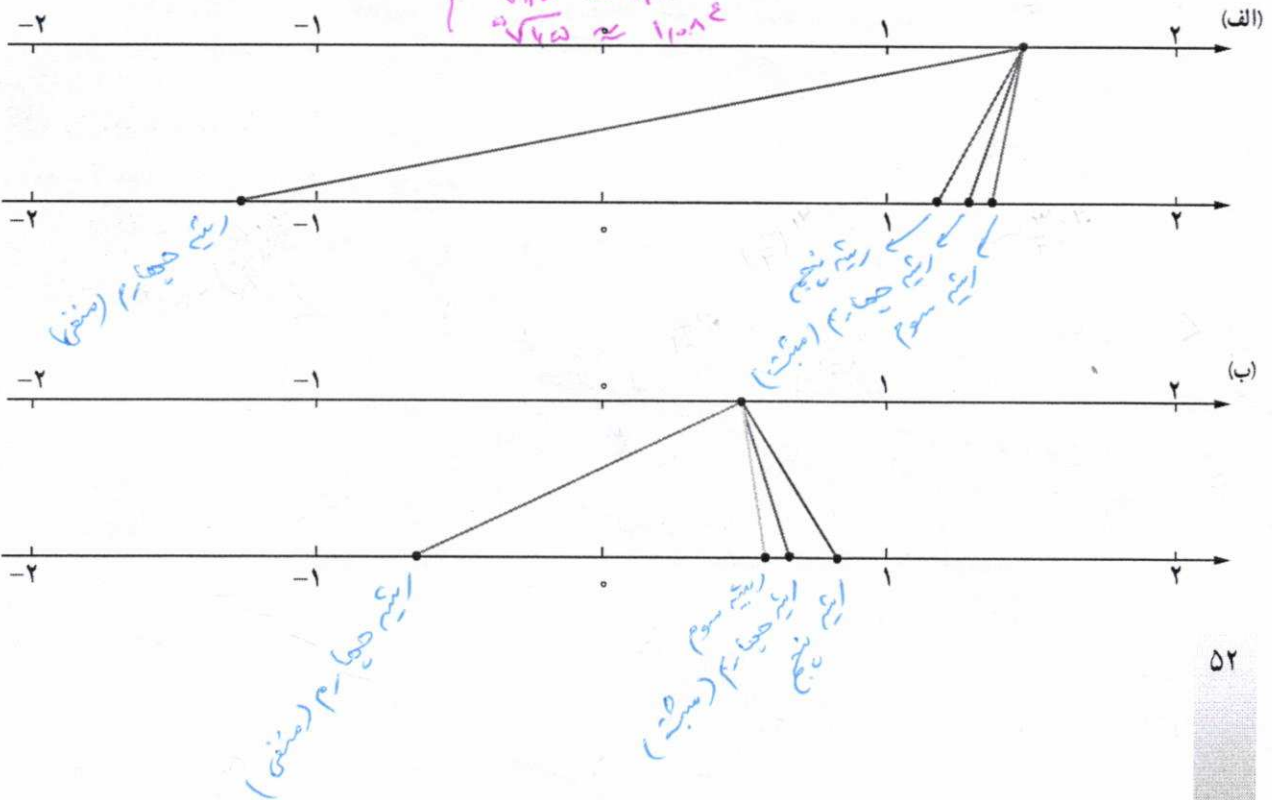
(پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. چه اعدادی می تواند باشد؟ اعداد بزرگتر از ۱ $\langle a > 1 \rangle$

(ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

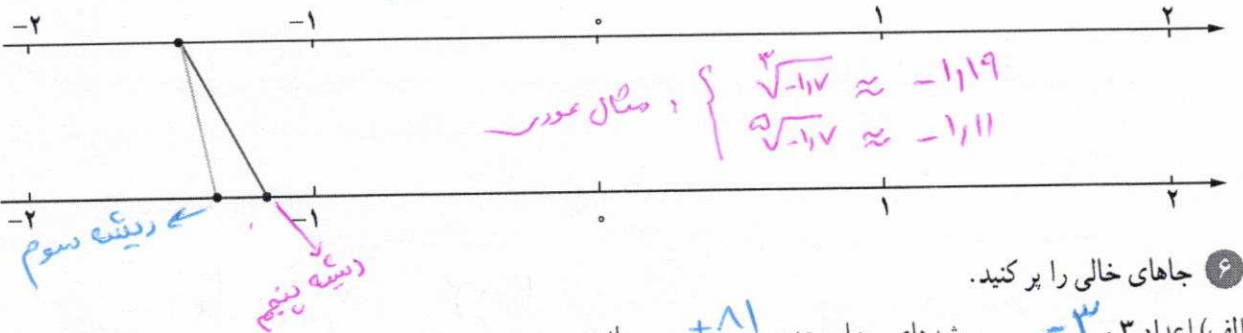
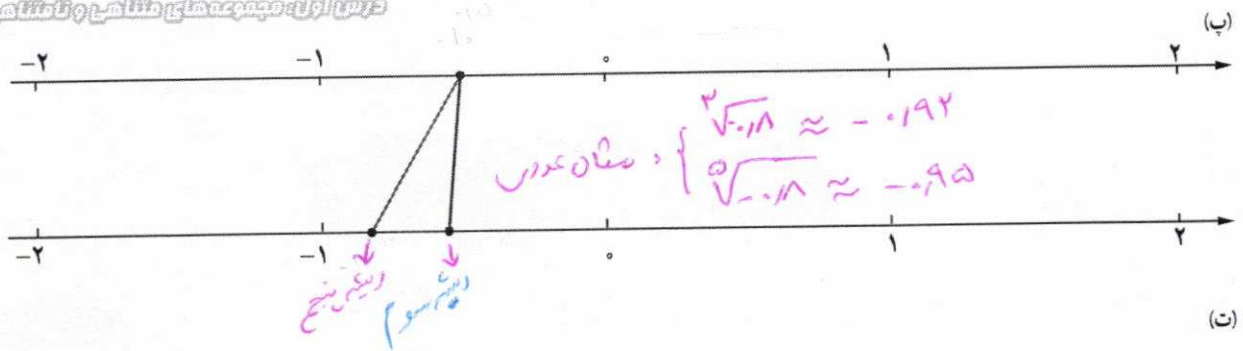
(ث) $a < 0, \sqrt[3]{a} > a$ اعداد کوچکتر از -۱ $\langle a < -1 \rangle$ (ب) $a < 0, \sqrt[3]{a} < a$ اعداد بین -۱ و ۰ $\langle -1 < a < 0 \rangle$

۵ در هر یک از شکل های زیر، نقطه ای از محور بالا به ریشه های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{115} \approx 4.82 \\ \sqrt[4]{115} \approx 3.25 \\ \sqrt[5]{115} \approx 2.52 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{92} \approx 4.52 \\ \sqrt[4]{92} \approx 3.12 \\ \sqrt[5]{92} \approx 2.47 \end{array} \right.$$



6 جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد 3 و 3 و 3... ریشه‌های چهارم عدد ... می‌باشند.

ب) اگر $\sqrt[3]{16} = a$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^2 + 5$ را بیابید.

$a^3 + a = 16 + a = 12 \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{12} = 2$
 $11 < \sqrt{17} \dots < 12$

7 می‌دانیم $\sqrt[5]{161051} = 11$ ، $\sqrt[5]{1700000}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

8 در جاهای خالی یکی از علامت‌های «>»، «<» یا «=» را قرار دهید.

$(-0.1)^5 > (-0.1)^3$

$(0.1)^5 < (0.1)^3$

$2^5 > 2^2$

$(-2)^5 < (-2)^2$

$(-2)^5 < (-2)^2$

$\sqrt[5]{0.00001} = 0.1$

9 قرار دهید $\sqrt[5]{a} = \square$ اکنون با توجه به تعریف مشخص کنید \square^5 برابر چه عددی است؟ بنابراین داریم $(\sqrt[5]{a})^5 = a$

$(\sqrt[5]{a})^5 = a$



خواندنی

سلول، واحد تشکیل دهنده بافت‌های بدن است. هر بافت سلول‌های ویژه خود را دارد که در صورت تکثیر، فقط می‌تواند به سلول‌های همان بافت تبدیل شود، ولی سلول بنیادی مادر تمام سلول‌ها است و توانایی تبدیل شدن به تمام سلول‌های بدن را دارد. دانشمندان می‌گویند این سلول‌ها می‌توانند امکان معالجه بیماری‌هایی را فراهم آورند که در حال حاضر فقط درمان‌های محدودی برای آنها وجود دارد. به دلیل توانایی منحصر به فرد سلول‌های بنیادی، پژوهش در مورد آنها امروزه از مباحث جذاب در زیست‌شناسی و پزشکی است. این سلول‌ها همچنین قدرت تکثیر فراوانی دارند و سلامت آنها سبب سلامت بدن می‌شود. پیشرفت در زمینه سلول‌های بنیادی تنها متکی بر علم پزشکی نخواهد بود، بلکه کمک علوم دیگری مانند بلیم، شیمی، فیزیک و ریاضی هم لازم خواهد بود. دانشمندان ایرانی در زمینه سلول‌های بنیادی پیشرفت‌های چشمگیری داشته‌اند. ایران در زمینه فناوری و تحقیقات سلول‌های بنیادی یکی از ۱۰ کشور برتر جهان محسوب می‌شود.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

درس دوم: ریشه نام

@Faragiri10
ghadam.com

فعالیت

۱ مشابه آنچه که برای ریشه های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می توان برای ریشه های دیگر مثلاً ریشه ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه های دوم	ریشه سوم	ریشه های چهارم	ریشه پنجم	ریشه های ششم	ریشه هفتم	ریشه های هشتم
$\sqrt{64} = 8$ و $-\sqrt{64} = -8$	$\sqrt[3]{64} = 4$ و $-\sqrt[3]{64} = -4$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[6]{64} = 2$ و $-\sqrt[6]{64} = -2$	$\sqrt[7]{64}$	$\sqrt[8]{64}$ و $-\sqrt[8]{64}$

ریشه های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ یا همان ۲ و -۲ هستند؛ زیرا $2^6 = 64$ و $(-2)^6 = 64$
 درباره ریشه های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می توانید بگویید؟ ($2^7 = 128$, $2^8 = 256$)
 به طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$ ، درباره ریشه نام عدد ۶۴ چه می توان گفت؟
 در حالت کلی تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$ ، درباره تعداد ریشه های نام a چه می توان گفت؟

$0 < a < 1 \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{a} < a$

$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} < 1$

۲ جدول زیر را که درباره ریشه های مختلف عدد ۶۴- است، تکمیل کنید.

ریشه دوم	ریشه سوم	ریشه چهارم	ریشه پنجم	ریشه ششم	ریشه هفتم	ریشه هشتم
وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64} = -4$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد

ریشه های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان برسد و مساوی ۶۴- شود.
 درباره ریشه های نام ۶۴- ($n \in \mathbb{N}$) بحث کنید.

$-1 < \sqrt[n]{-64} < -4$, n فرد باشد

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، درباره ریشه نام a چه می توان گفت؟
 $-1 < \sqrt[n]{a} < 0$ $\Leftrightarrow -1 < a < 0$, n فرد باشد

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه نام a عدد a می نامیم. هرگاه: $b^n = a$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

a > 0	n زوج	a دارای دو ریشه نام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	a = 81 n = 4	81 دارای دو ریشه چهارم $\sqrt[4]{81} = 3$ و $-\sqrt[4]{81} = -3$ است
	n فرد	a دارای یک ریشه نام $\sqrt[n]{a}$ است	a = 27 n = 3	27 دارای یک ریشه سوم $\sqrt[3]{27} = 3$ است.
a < 0	n زوج	ریشه نام وجود ندارد	a = -16 n = 4	وجود ندارد
	n فرد	a دارای یک ریشه نام $\sqrt[n]{a}$ است	a = -32 n = 5	-32 دارای یک ریشه پنجم $\sqrt[5]{-32} = -2$ است.

کار در کلاس

۱ حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\begin{aligned} \sqrt{125} &= 5 & \sqrt{-32} &= -2 & \sqrt{128} &= 2 & \sqrt[5]{256} &= 2 \\ \sqrt{-1} &= -1 & \sqrt[5]{625} &= 5 & -\sqrt[4]{16} &= -2 & \sqrt[5]{-1} &= -\frac{1}{5} \\ \sqrt{-128} &= -2 & \sqrt{-0.001} &= -0.1 & -\sqrt{1} &= -1 & \sqrt[5]{0} &= 0 \end{aligned}$$

۲ الف) می دانید که $\sqrt{x^2} = |x|$ درباره $\sqrt[4]{x^4}$ چه حدسی می زنید؟ درستی حدس خود را درباره چند عدد آزمایش کنید.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{(-2)^4} &= \sqrt{4} = 2 & \sqrt[4]{(-3)^4} &= \sqrt{11} = 3 \\ \sqrt[4]{(-2)^4} &= 2 & \sqrt[4]{(-3)^4} &= 3 \end{aligned}$$

ب) کدام یک درست محاسبه شده است؟

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{(-3)^4} &= -3 \quad \times & \sqrt[5]{35} &= 3 \quad \checkmark & \sqrt[6]{(-2)^6} &= -2 \quad \times \\ \sqrt[4]{(-3)^4} &= 3 \quad \checkmark & \sqrt[5]{(-3)^5} &= -3 \quad \checkmark & \sqrt[6]{(-2)^6} &= 2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

ب) به طور کلی اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ ؛ و اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = a$ (ت) مثالی ارائه دهید که نشان دهد تساوی زیر همیشه درست نیست!

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$$

$$\sqrt[4]{(-2)^4} \neq (\sqrt[4]{-2})^4$$

ت) در قسمت (ت) تساوی به ازای چه مقادیری برای a و n برقرار است؟
ت) اگر $a < 0$ ، n زوج باشد.

فعالیت

در سال نهم دیدید که:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{برای هر دو عدد مثبت } a \text{ و } b$$

آیا رابطه بالا درباره $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b}$ نیز برقرار می باشد؟ مثال بزنید.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{0.0001} \times \sqrt[4]{0.0016} &= 0.01 \times 0.2 = 0.002 \\ \sqrt[4]{0.0001} \times \sqrt[4]{0.0016} &= \sqrt[4]{0.00016} = 0.02 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{425} \times \sqrt[4]{10000} &= 5 \times 10 = 50 \\ \sqrt[4]{425} \times \sqrt[4]{10000} &= \sqrt[4]{4250000} = 50 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است، باید a و b باشند.

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = 2 \times 3 = \dots 4 \dots$$

$$\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{16 \times 81} = 6$$

درباره $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ چه می‌توان گفت؟ **درست است.**

آیا a و b حتماً باید مثبت باشند؟ مثالی از a و b مثبت و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

$$\sqrt[3]{32} \times \sqrt[3]{243} = 2 \times 3 = 4$$

$$\sqrt[3]{32} \times \sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{7776} = 4$$

به طور کلی داریم:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & a, b > 0 \text{ و } n \text{ زوج} \\ \sqrt[n]{ab} & a, b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد} \end{cases}$$

قرارداد: به طور کلی این قرارداد را اعمال می‌کنیم:

وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه‌های زوج برای عددهای منفی بی‌معنا هستند. پس هرگاه \sqrt{x} نوشتیم، از آن می‌فهمیم که $x \geq 0$ است. تساوی‌های فوق را می‌توان به صورت مقابل نمایش داد:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

کار در کلاس

۱ آیا $\sqrt[3]{25}$ و $(\sqrt[3]{2})^5$ با هم برابرند؟ درباره $\sqrt[4]{(-2)^4}$ و $(\sqrt[4]{-2})^4$ چه می‌توان گفت؟

$$(\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[3]{2^5}$$

۲ با توجه به اینکه

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2^3}$$

۳ درستی رابطه $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ را با مقادیری مختلف برای m و k بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{4 \times 4} = 4$$

$$(\sqrt[3]{27})^4 = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27^4} = \sqrt[3]{4 \times 4} = 4$$

$$\sqrt[5]{3^5} = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3^5}$$

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^n}$	زوج n	$a > 0$	$n=4$ $a=2$	$\sqrt[4]{2^4} = 2$ ($2= 2 $)
		$a < 0$	$n=4$ $a=-2$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ ($2= -2 $)
	فرد n	$a > 0$	$n=3$ $a=2$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$ ()
		$a < 0$	$n=3$ $a=-2$	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$ ()

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

زوج n $\begin{cases} a > 0 \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a \\ a < 0 \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a| \end{cases}$

فرد n $\begin{cases} a > 0 \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a \\ a < 0 \rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a \end{cases}$

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[n]{a})^n$	زوج n	$a > 0$	$n=4$ $a=16$	$(\sqrt[4]{16})^4 = 2^4 = 16$
		$a < 0$	$n=4$ $a=-16$	$(\sqrt[4]{-16})^4 \rightarrow$ تعریف نشده
	فرد n	$a > 0$	$n=3$ $a=8$	$(\sqrt[3]{8})^3 = 2^3 = 8$
		$a < 0$	$n=3$ $a=-8$	$(\sqrt[3]{-8})^3 = -2^3 = -8$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

زوج n $\begin{cases} a > 0 \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = a \\ a < 0 \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n \rightarrow$ تعریف نشده است

فرد n $\begin{cases} a > 0 \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = a \\ a < 0 \rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = a \end{cases}$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ایراد علامت = ندارد

۱ الف) یکی از علامت‌های > یا < را در □ قرار دهید.

$$(0/5)^2 \square (0/5)^3$$

$$45 = \sqrt{0/25} \square \sqrt[3]{0/125} = 1/5$$

ب) وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در □ قرار دهید.

$$a^2 \square a^3$$

$$\sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

$(0.2)^2 = 0.04$
 $(0.2)^3 = 0.008$
 استخوان خورد

شان عدد
 $\sqrt[3]{0.2} \approx 0.588$
 $\sqrt{0.2} \approx 0.447$

۲ فرض کنیم $a = -1$ است، در □ علامت مناسب را قرار دهید.

$$\sqrt[3]{a} \square \sqrt[5]{a}$$

$$\sqrt[5]{a} \square \sqrt[3]{a}$$

$$a^2 \square a^3$$

$$a^2 \square a^5$$

۳ با توجه به تعریف ریشه (اگر $\sqrt[n]{a} = b$ آنگاه $b^n = a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad (\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{b^n})^n = (b^n)^n = a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به جای a و b مقادیر عددی بدهید.

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \rightarrow \sqrt[3]{5^{-3}} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt[5]{3^{-5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^5} = \frac{1}{3} \quad \sqrt[7]{\frac{1}{128}} = \sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}\right)^7} = \frac{1}{2} \quad \sqrt[4]{3^{-4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{3}$$

۶ به جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به طوری که:

الف) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{5^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{2}{5}$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{2}{5}$$

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. (وقتی n زوج است، a و b هر دو مثبت اند).

$$\sqrt[3]{8+27} = \sqrt[3]{35} \approx$$

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = 2+3=5$$

$$\sqrt[5]{32+243} = \sqrt[5]{275} \approx$$

$$\sqrt[5]{32} + \sqrt[5]{243} = 2+3=5$$

$$\sqrt[4]{425+81} = \sqrt[4]{506} \approx 5.15$$

$$\sqrt[4]{425} + \sqrt[4]{81} = 5+3=8$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

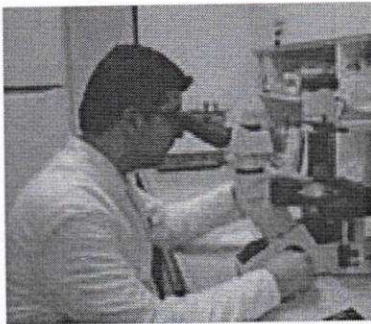
احتمال زیاد اشکال دارد - چون با شرطی که ذکر کرده همیشه تساوی برقرار است

تهیه کننده:

درس سوم: توان های گویا

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت



پدر محمد یک زیست شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می کند. در آزمایشی یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد، وزن این باکتری ها در هر ساعت ۲ برابر می شود. وزن باکتری ها در لحظه شروع ۱ گرم است؛ بنابراین وزن باکتری ها پس از یک ساعت ۲ گرم، پس از ۲ ساعت برابر ۴ گرم، و پس از ساعت n برابر 2^n گرم می شود:

$1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$

محمد از پدرش پرسید: «آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می توانیم وزن باکتری ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟»

پدرش گفت: تو فکر می کنی وزن باکتری ها پس از نیم ساعت چقدر می شود؟

محمد گفت: حدس می زنم وزن آنها $2^{\frac{1}{2}}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{1}{2}$ است.

پدرش گفت: $2^{\frac{1}{2}}$ چقدر است؟

محمد گفت: نمی دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم ساعت وزن باکتری ها b برابر شود، در این صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری ها باید برابر $b \times b = b^2$ شود. اما می دانیم پس از یک ساعت وزن باکتری ها دو برابر می شوند؛ پس $b^2 = 2$ ؛ یعنی $b = \sqrt{2}$ (زیرا b مثبت است).

نتیجه جالبی است! $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. مشابه این رابطه را می توانیم برای توان های دیگر نیز تعریف کنیم: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ ، همچنین برای عددهای دیگر $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$. می توانیم نماهای کسری با صورت ۱ را تعریف کنیم. a عددی حقیقی و مثبت است.

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

توجه داریم اگر $a < 0$ در این صورت $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی شود، به عنوان مثال عبارت هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{2}}$ و $(-2)^{\frac{1}{4}}$ تعریف نمی شوند.

Handwritten notes in blue ink:

$$-2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^2} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$$

$$(-2)^{\frac{1}{4}} = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \rightarrow \text{نمی شود}$$

← پس دین

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

۱) توان های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{2} & 3^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{3} & 4^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{4} \\ 5^{\frac{1}{7}} &= \sqrt[7]{5} & 5^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{5} & (-3)^{\frac{1}{5}} &= \sqrt[5]{-3} \\ 6^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{6} & 81^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{81} & (-5)^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{-5} \end{aligned}$$

۲) کدام درست است؟

الف) $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$ X ب) $\sqrt[5]{-32} = -2$ ✓

فعالیت

حاصل $a^{\frac{m}{n}}$ که $a > 0$ و m و n دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می کنیم؟

در مبحث توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل کردیم؟

قاعده ضرب توان) $2^6 = 2^{2 \times 3} = (2^2)^3$

در مورد توان های گویا هم می توانیم به طریق مشابه عمل کنیم:

$$2^{\frac{2}{3}} = 2^{2 \times \frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^2} \qquad 5^{\frac{8}{3}} = 5^{8 \times \frac{1}{3}} = (5^8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^8}$$

به طور کلی:

هرگاه $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اکنون شما اعداد توان دار را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

الف) $5^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^2}$ ب) $3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2}$ ج) $(-3)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-3)^2}$ تعریف نمی شود د) $(-6)^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{(-6)^2}$ تعریف نمی شود

اگر r و s دو عدد گویا باشند، و $a > 0$ قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم:

- ۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$
- ۲) $(a^r)^s = a^{rs}$
- ۳) $(ab)^r = a^r \times b^r$

باکتری ها موجودات بسیار ریزی هستند که در انواع مختلف در همه جا حضور دارند. بیشتر باکتری ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می رسند و می توانند شروع به تولید مثل کنند. در شرایط محیطی مناسب، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می شود و بعد از ۲۰ دقیقه دیگر به چهار باکتری تبدیل می شود و به همین ترتیب، در فاصله هر ۲۰ دقیقه، تعداد باکتری ها دو برابر می شود و به ترتیب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و ... باکتری پدید می آید. اگر این روش تکثیر باکتری ها ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده ای از باکتری ها به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد. البته عملاً چنین اتفاقی نمی افتد، زیرا در این صورت، آب و مواد غذایی لازم به زودی در محیط زندگی آنها تمام می شود و دیگر قادر به تولید مثل بیشتر نخواهند بود. اگرچه بعضی از باکتری ها عامل فساد مواد غذایی و بیماری هستند؛ اما بسیاری از باکتری ها مفیدند. باکتری ها در تهیه فرآورده های غذایی و شیمیایی و همچنین در شناسایی و استخراج معادن و پاکسازی محیط زیست کاربرد دارند. باکتری هایی نیز برای خالص سازی عناصر معدنی مانند مس و اورانیوم کاربرد دارند. همچنین باکتری ها در پاکسازی آب ها و خاک های آلوده به آلاینده های نفتی و شیمیایی کاربرد وسیعی دارند. باکتری ها نقش بسیار مهم در اکوسیستم جهانی (اکوسیستم های آبی و خشکی) دارند. مهم ترین راه دستیابی گیاهان به نیتروژن توسط برخی از باکتری ها صورت می گیرد.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۱ تساوی‌های زیر را مانند نمونه به صورت رادیکالی بنویسید.

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$$

$$3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{3} = 3\sqrt[4]{3}$$

$$4^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}$$

$$2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$4^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{4^5} = \sqrt[2]{4^4 \times 4} = 4^2 \sqrt[2]{4} = 16 \times 2 = 32$$

$$5^{\frac{4}{2}} = \sqrt{5^4} = \sqrt{5^2 \times 5^2} = 5^2 = 25$$

$$(16^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = (16^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}} = (16^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{16^2} = \sqrt[3]{256}$$

$$5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 5^1 = 5$$

۲ رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$$\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[2]{2^5} = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$\sqrt[4]{7^2} = 7^{\frac{2}{4}} = 7^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\sqrt[5]{19} = 19^{\frac{1}{5}}$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt{-27} = -3$$

$$\sqrt[5]{25} = 25^{\frac{1}{5}}$$

۳ جدول‌های زیر را کامل کنید:

$a > 0$	a^3	a^{-3}	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
---------	-------	----------	-------------------	-------------------

$a = 5$	5^3	$\frac{1}{5^3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt[3]{5^2}$
---------	-------	-----------------	------------	-----------------

$a < 0$	a^3	a^{-3}	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
---------	-------	----------	-------------------	-------------------

$a = -5$	$(-5)^3$	$\frac{1}{(-5)^3}$	تعریف نمی‌شود	$(-5)^{\frac{2}{3}} = 25^{\frac{1}{3}}$
----------	----------	--------------------	---------------	---

توان کسری توان گویا است

فعالیت

۱ با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ است. تساوی را کامل کنید ($a > 0$).

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

۲ دبیر: به خاطر دارید که حاصل یک رادیکال با فرجه زوج همواره عددی مثبت است. مثلاً $\sqrt[4]{81} = 3$

به علاوه در تعریف نمای کسری $a^{\frac{1}{n}}$ باید a عددی مثبت فرض شود. اکنون $\sqrt[4]{(-3)^4}$ را به دست آورید.

نسترن: اگر جای توان‌ها را مانند توان‌های طبیعی عوض کنیم، چه اشکالی دارد؟

دبیر: این کار را انجام می‌دهم؛ خودت اشکال را پیدا کن!

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = [(-3)^4]^{\frac{1}{4}} = [(-3)^{\frac{4}{4}}]^{\frac{1}{4}} = (-3)^{\frac{4}{4} \times \frac{1}{4}} = (-3)^1 = -3$$

نسترن: فکر کنم متوجه اشکال کار شده‌ام. ما حق نداریم بنویسیم $(-3)^{\frac{1}{4}}$ چون در تعریف $a^{\frac{1}{n}}$ گفتیم a باید مثبت باشد.

دبیر: آفرین، کاملاً درست است. حالا چه کار کنیم؟

حمیده: بهتر است اول $(-3)^4$ را حساب کنیم، یعنی

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

دیر: آفرین حمیده، جواب شما درست است. البته می‌توانید، همان‌گونه که قبلاً گفتیم چون ۴ عددی زوج است از الگوی زیر نیز استفاده کنید.

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$$

۳) با توجه به فعالیت ۱ در صفحه قبل تساوی‌ها را کامل کنید.

(الف) $(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5^2} = (5^{\frac{2}{6}})^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}$

(ب) $(4^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[4]{4})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[20]{4} = 5^{\frac{2}{5}} \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{5}}$

(ب) اکنون برای هر عدد $a > 0$ ، به ازای هر دو عدد گویای غیر صحیح r و s درستی تساوی $(a^r)^s = a^{rs}$ را برای $r = \frac{1}{4}$ و $s = \frac{1}{5}$ ، تحقیق کنید.

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{5}} = (a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}}$$

تمرین

۱) هر یک از توان‌های کسری زیر را به صورت رادیکال بنویسید.

$16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}$ $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{6} + \frac{4}{6}} = 3^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{3^7}$ $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$ $(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$
 $a^{2.5} \rightarrow a^{\frac{5}{2}} = \sqrt{a^5}$ $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$
 $32^{-\frac{1}{5}} = (\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ $32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2}$ $17^{-\frac{1}{2}} = (\frac{1}{17})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{17}}$

۲) هر یک از رادیکال‌ها را به صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنا دارد که پایه عدد مثبت باشد.

$a^{2.5} \rightarrow \sqrt{a^5} = a^{\frac{5}{2}}$ $a^{2.5} \rightarrow \sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}}$ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2$
 $\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1$ $\sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}}$ $\sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}}$ $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2$

۳) می‌دانیم

$$\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = \sqrt{a} \quad \sqrt[5]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$$

آیا تساوی $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است ($a > 0$)؟ n, m, k طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[2]{2^3}$ برابرند.

۴) فرض کنیم $a = 64$ ، $r = \frac{1}{3}$ و $s = \frac{1}{4}$ ، مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a ، r ، s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵) حساب کنید.

$$\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5^1} = (5^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{8}}$$

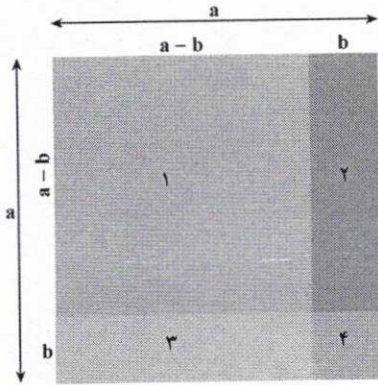
$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[2]{2^3} = 2$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$\frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt[4]{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$ $a^{r-s} = 4^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 4^{\frac{4-3}{12}} = 4^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2} = 2$

$\sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ $\sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
 $\sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2}$

درس چهارم: عبارت‌های جبری



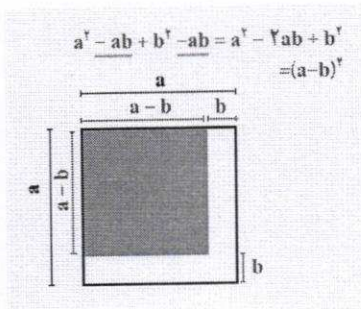
$$S_1 = (a-b)^2$$

$$S_1 = S - S_2 - S_3 - S_4$$

$$= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

(1) و (2) $\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



$$a^2 - ab + b^2 - ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

فعالیت

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید. می‌توانید بگویید چرا به تساوی $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (1)

اتحاد گفته می‌شود؟

در حقیقت می‌توان a و b را در دو طرف با هر دو عدد دلخواه جایگزین کرد و برای دو طرف یک عدد به دست آورد. برای مثال اگر $a = \frac{1}{5}$ و $b = 3$ اختیار شود.

$$\left(\frac{1}{5} + 3\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} \times 3 + 3^2$$

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 9 \rightarrow \frac{256}{25} = \frac{256}{25}$$

یا اگر در رابطه (1) به جای b ، $-b$ قرار دهیم، به دست می‌آوریم:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

گاهی هم دو اتحاد (1) و (2) را با هم می‌نویسیم:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (3)$$

اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به دست آورید.

با محاسبه $(a+b)^3$ اتحاد دیگری به دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2ab^2 + ab^2 + ab^2 + b^3$$

که با جمع جملات مشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به صورت زیر در می‌آید.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

می‌توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به دست آوریم:

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

۲ یک بار دیگر $(a-b)^2$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شماره (۲) محاسبه کنید.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$$

۳ اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانه فوق را بنویسیم، مثلاً

$$a^2 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2 = (a-b)(a-b)(a-b) \quad (۴)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^2 - 3a^2b + 3ab^2 - b^2$ را به حاصل ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارات $a-b$ را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند. تجزیه برخی عبارات‌های جبری به دسته‌بندی مناسب جملات و مهارت‌های بیشتری نیاز دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

یادآوری
اتحادهایی که سال قبل خوانده‌اید.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$$

$$(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$$

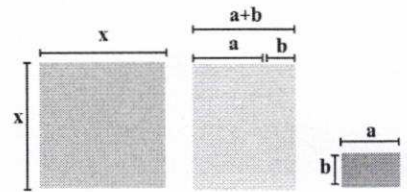
@Faragiri10
ghadam.com

مثال ۱

عبارت $2x^2 + 3x + 1$ را تجزیه کنید.

می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 1 &= x^2 + 2x + 1 + x^2 + x \\ &= (x+1)^2 + x(x+1) \\ &= (x+1)(x+1+x) = (x+1)(2x+1) \end{aligned}$$

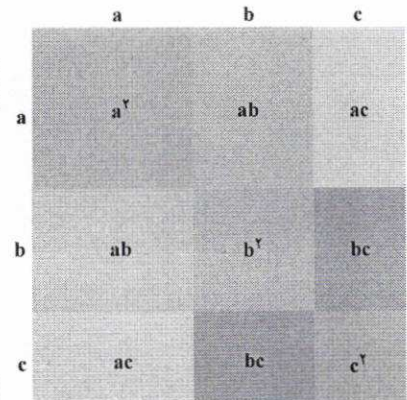


مثال ۲

عبارت $a^2 - 2ab + a^2b - 2b^2$ را تجزیه کنید:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + a^2b - 2b^2 &= a^2(a+b) - 2b(a+b) \\ &= (a^2+b)(a-2b) \end{aligned}$$

استفاده جبری
دست‌ها



کار در کلاس

۱ حاصل عبارات‌های زیر را به دست آورید و ساده کنید. *استفاده جبری باید باشد*

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

۲ با استفاده از پرسش ۱، عبارات‌های $a^3 - b^3$ و $a^3 + b^3$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی

به دست آورید. *اشکوبه به سوال بالا دارد*

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

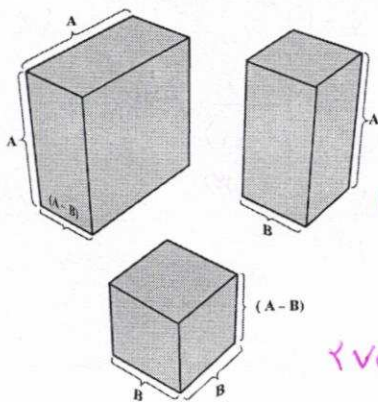
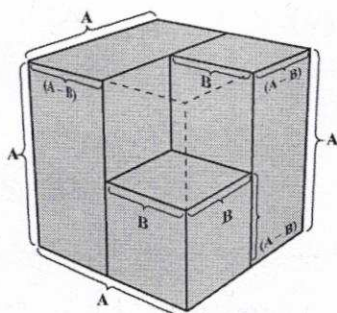
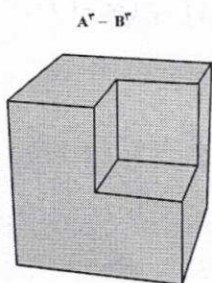
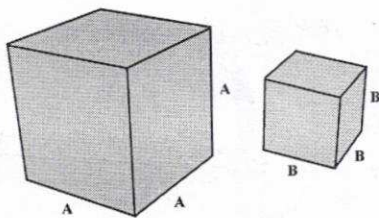
$$\begin{cases} (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \end{cases}$$

انگاره جبری

عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$



$$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3$$

$$= (2x-3)[(2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2]$$

$$= (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$$

$$x^3 + 1 = (x)^3 + (1)^3 = (x+1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^3 - 8 = (x)^3 - (2)^3 = (x-2)(x^2 + x(2) + (2)^2) = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^3 - 125 = (x)^3 - (5)^3 = (x-5)(x^2 + x(5) + 5^2) = (x-5)(x^2 + 5x + 25)$$

$$x^3 - 1 = (x^3)^3 - 1^3 = (x^3-1)(x^6 + x^3(1) + 1^2) = (x^3-1)(x^6 + x^3 + 1)$$

$$= (x-1)(x+1)(x^3 + x^2 + 1)$$

تعالیت

واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به‌خاطر دارید:

$$12 = 3 \times 4$$

هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک شمارنده عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. ۱۲ شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶، ۹، ۱۵ و ... مشابه این در اتحاد مزدوج

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک شمارنده $a^2 - b^2$ است. همچنین $a^2 - b^2$ هم مضرب $a-b$ و هم مضرب $a+b$ است.

آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟ بله

۱) مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به‌دست می‌آیند:

..... و $(a+b)(a-b)$ و $-4(a+b)$ و $(a+b)(a+b)^2$ و $2(a+b)$ و $a+b$: بعضی از

مضرب‌های $a+b$

بعضی از مضرب‌های $a-b$ را بنویسید. $2a(a-b)$, $-v(a-b)$, $2(a-b)$, $(a-b)^2$

۲) دو عبارت بنویسید که $a-b$ شمارنده هر یک از آنها باشد.

۳) عبارت $27a^3 - 1$ مضرب کدام یک از عبارت‌هاست؟

الف) $a-1$

ب) $3a-1$

پ) $9a^2 + 3a + 1$

ت) $3a+1$

نکته: عبارت $\sqrt{3}(a+b)$ یک مضرب $a+b$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط

می‌توانند عدد صحیح باشند.

تهیه‌کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۴ کدام یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

الف) $\frac{\sqrt{3x} - \sqrt{7}}{x^2}$ (ب) $\frac{\sqrt{x^3-1}}{x^3+1}$ (پ) $\sqrt[3]{x}-1$ (ت) $\sqrt{x^2}+x-1$

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد. (مقدار ندارد)

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$ $x-1=0 \quad x=1$
 $x+1=0 \quad x=-1$

به ازای $x=1$ و $x=-1$ تعریف نشده است.

۶ حاصل کسرهایی زیر را به دست آورید و ساده کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{1(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{3}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-2+3}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}+2}{x-1}$

ب) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2+1) + (x-1)(x^2+1) - (x^2+1) + (x^2-1)}{(x-1)(x^2+1)}$

$= \frac{x^3 + x + x^3 + x - x^2 - 1 + x^2 - 1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2x^3 + 2x - 2}{(x^2-1)(x^2+1)}$

مثال

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt{x^2})^2 + \sqrt{x^2} + 1)}{(\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2})^2 + \sqrt{x^2} + 1)} + \frac{1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x^2})^2 + \sqrt{x^2} + 1}{(\sqrt{x^2})^3 - (1)^3} + \frac{1}{x-1}$

$\frac{(\sqrt{x^2})^2 + \sqrt{x^2} + 1}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt{x^2})^2 + \sqrt{x^2} + 1) + (x+1)}{(x^2-1)}$

کار در کلاس

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

الف) $\frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1} = \frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$ ب) $\frac{x^3-1}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)^3} = \frac{x^2+x-1}{(x-1)^2}$

پ) $\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{1}{x^2-1}$ ت) $\frac{y^4-y}{y^3+y^2+y} = \frac{y(y^3-1)}{y(y^2+y+1)} = \frac{y^3-1}{y^2+y+1}$

ث) $\frac{y^5-y^3-12y}{8y^2+16y} = \frac{y(y^4-y^2-12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)} = \frac{(y-2)(y^2+3)}{8}$

در اتحاد

$a^2+1=(a+1)(a^2-a+1)$

قرار دهید $a = \sqrt{x^2}$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$(\sqrt{x^2})^3+1=(\sqrt{x^2}+1)((\sqrt{x^2})^2-(\sqrt{x^2})(1)+(1)^2)$
 $x^2+1=(\sqrt{x^2}+1)(\sqrt{x^2}^2-\sqrt{x^2}+1)$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

گویا کردن مخرج های گنگ : صورت و مخرج کسرهای زیر را مانند نمونه در عبارتهایی ضرب کنید که عبارت مخرج تبدیل به یک عبارت گویا شود.

@Faragiri10
ghadam.com

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(\sqrt{x^2})^2 - \sqrt{x^2} + 1}{(\sqrt{x^2}+1)(\sqrt{x^2})^2 - \sqrt{x^2} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} + 1}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \quad (x \neq 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}$$

تمرین

۱ هر یک از عبارتهای زیر را تا حد ممکن (به عبارتهای گویا) تجزیه کنید.

پ) x^2+y^2

ب) x^2-y^2

الف) x^2-y^2

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

ت) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$

الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

۳ بعضی از ضربهای عددی را با استفاده از اتحادها می توان به صورت ذهنی حساب کرد. مانند نمونه، بقیه ضربها را ذهنی انجام دهید.

الف) $16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$

ب) 105^2

پ) 1007^2

ت) 99^2

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲ کسرها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

۵ عبارت $a^6 - 2b^6 + 2a^2b^2$ را تجزیه کنید.

خواندنی

* سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

یک سه‌تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

* (جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد:

$$(1/0.1)^{360} = 37/8$$

$$(0/99)^{360} = 0/0.3$$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(1/0.1)^{360}$ و $(0/99)^{360}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

اگر هر روز اندکی کار خود را نسبت به روز قبل بهتر کنیم، در سال حدود ۴۰ برابر راندمان (بهره‌وری) کار افزایش می‌یابد. شما هم داستانی در باب توان‌ها بنویسید.

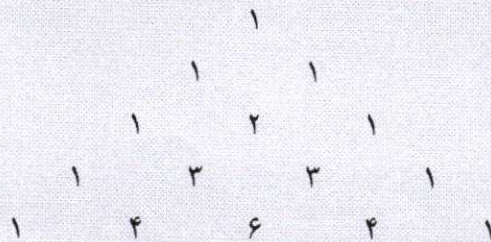
* (مثلث خیام)

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^4 + b^4 - 3b^4$$



خیام است.

ضرایب $(a+b)^n$ برابر اعداد سطر $(n+1)$ ام مثلث

چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟ می‌توانید توان چهارم دوجمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) \\ &= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

تهیه کننده:

① ا) $x^3 - y^3 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

ب) $x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = (x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$

پ) $x^2 + y^2 =$ تجزیه نمی شود

② ا) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{(1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x - y}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(1)(\sqrt{x^2} + 2\sqrt{x} + 4)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x^2} + 2\sqrt{x} + 4)} = \frac{\sqrt{x^2} + 2\sqrt{x} + 4}{x - 4}$

پ) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(1)(\sqrt{x^2} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^2})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x^2} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^2})} = \frac{\sqrt{x^2} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^2}}{x + y}$

ت) $\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2x}{x - 1} = \frac{(1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{(2)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{2x}{x - 1}$
 $= \frac{\sqrt{x} + 1 + 2\sqrt{x} - 2 - 2x}{x - 1} = \frac{3\sqrt{x} - 2x - 1}{x - 1}$

③ ا) $14 \times 14 =$ در کتب حل شده

ب) $100^2 = (100 + 5)^2 = (100)^2 + 2(100)(5) + 5^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$

پ) $(1000)^2 = (1000 + 7)^2 = (1000)^2 + 2(1000)(7) + (7)^2$
 $= 1000000 + 14000 + 49 = 1014049$

ت) $(99)^2 = (100 - 1)^2 = (100)^2 - 2(100)(1) + (1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$

(۴)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1(\sqrt{n+1})}{\sqrt{n-1}(\sqrt{n+1})} + \frac{1}{\sqrt[n]{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{x+1}}$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{\sqrt{n+1}}{x-1} + \frac{(\sqrt[n]{x+1})(\sqrt{n+1})}{x-1} + \frac{(\sqrt[n]{x+1})(\sqrt[n]{x+1})(\sqrt{n+1})}{x-1}$$

$$= \frac{1 + (\sqrt{n+1}) + (\sqrt[n]{x+1})(\sqrt{n+1}) + (\sqrt[n]{x+1})(\sqrt[n]{x+1})(\sqrt{n+1})}{x+1}$$

(۵)

$$a^4 - 2b^4 + 2a^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 3b^4$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - 3(b^2)^2 = (a^2 + b^2 - \sqrt{3}b^2)(a^2 + b^2 + \sqrt{3}b^2)$$

برای این عبارت به این صورت باشد: $a^4 - 3b^4 + 2a^2b^2$ بجز آن چنین می شود.

$$a^4 - 3b^4 + 2a^2b^2 = a^4 - a^2b^2 + 3a^2b^2 - 3b^4 = a^2(a^2 + b^2) + 3b^2(a^2 - b^2)$$

$$= (a^2 - b^2)(a^2 + 3b^2) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 + 3b^2)$$

چون یک عدد در آن از کسری سوال ۴

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x-1}} \times \frac{\sqrt[n]{x^2+1}}{\sqrt[n]{x+1}} = \frac{\sqrt[n]{x+1}}{\sqrt[n]{x-1}} \times \frac{\sqrt[n]{x+1}}{\sqrt[n]{x+1}} = \frac{(\sqrt[n]{x+1})(\sqrt[n]{x+1})}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x-1}} \times \frac{\sqrt[n]{x+1}}{\sqrt[n]{x+1}} = \frac{\sqrt[n]{x+1}}{\sqrt[n]{x-1}} \times \frac{\sqrt[n]{x+1}}{\sqrt[n]{x+1}} = \frac{(\sqrt[n]{x+1})(\sqrt[n]{x+1})}{\sqrt[n]{x-1}} \times \frac{\sqrt[n]{x+1}}{\sqrt[n]{x+1}}$$

$$= \frac{(\sqrt[n]{x+1})(\sqrt[n]{x+1})(\sqrt[n]{x+1})}{x-1}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان