فصل ۱ تابع

عکاس: سیدمهدی حسینی

پل سفید ـ اهواز

پل سفید اهواز یکی از پل‌های شهر اهواز است که یکی از نمادهای این شهر نیز محسوب می‌شود. این پل در سال ۱۳۱۵ بر روی رودخانهٔ کارون ساخته شده است که دارای دو قوس فلزی ۱۲ و ۲۰ متری است.

درس اول

توابع چند جمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای:

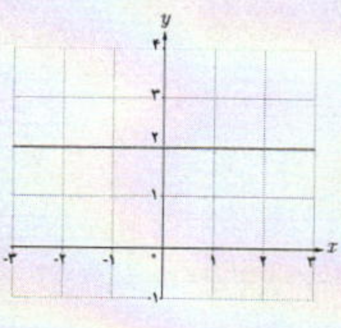
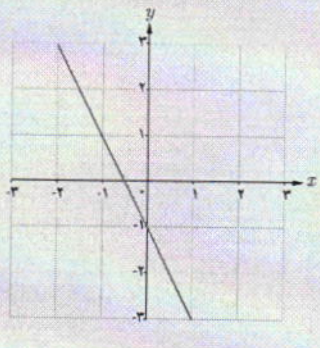
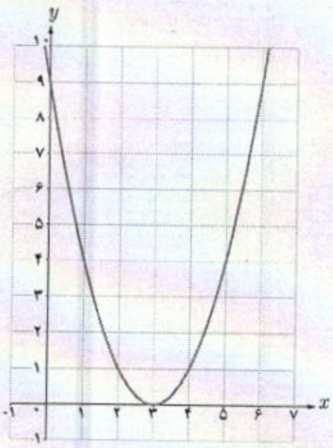
در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$، تابع به‌صورت $f(x)=b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

هر تابع به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم. دامنهٔ توابع چند جمله‌ای مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

مثال : توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به‌ترتیب از درجهٔ ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y=3x+5 \quad , \quad y=-8x^2+2x-\frac{1}{2} \quad , \quad y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x \quad , \quad y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$$

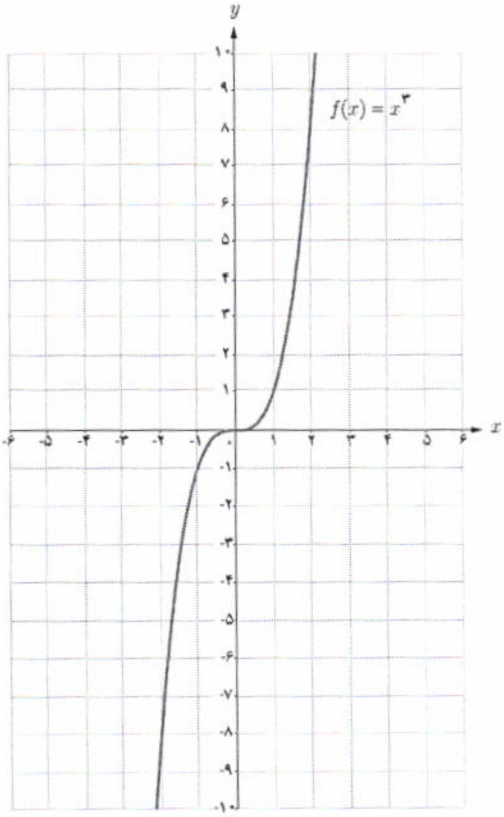
انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به‌صورت زیر است :

درجهٔ تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجهٔ دوم
ضابطهٔ کلی	$f(x)=b$	$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$	$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$
مثال	$f(x)=2$ 	$f(x)=-2x-1$ 	$f(x)=x^2-6x+9$ 

تابع درجهٔ ۳:

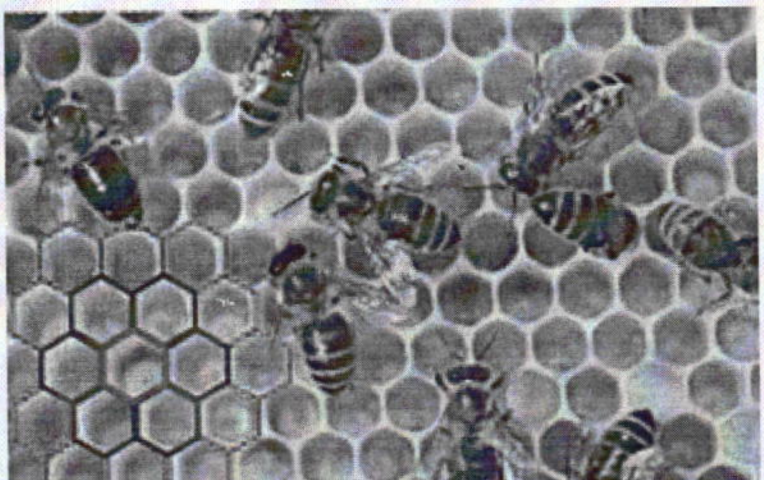
تابع چند جمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ یک تابع درجهٔ ۳ است که در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x)=x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم :

x	$f(x)=x^3$
-2	-8
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8



خواندنی

الگوی کلی لانهٔ زنبور عسل به‌صورت یک شش‌ضلعی است که در دور اول با شش تا شش‌ضلعی دیگر احاطه شده است، در دور دوم با دوازده تا شش ضلعی احاطه می‌شود و به همین ترتیب در دورهای دیگر تعداد شش ضلعی‌ها با الگوی خاصی افزایش می‌یابد.
تعداد کلِ این شش ضلعی‌ها را می‌توان با تابع درجه دوم $f(r)=3r^2-3r+1$ به دست آورد که r تعداد دورهاست. آیا می‌توانید تعداد کل شش ضلعی‌ها را برای $r=1,2,3$ به دست آورید؟



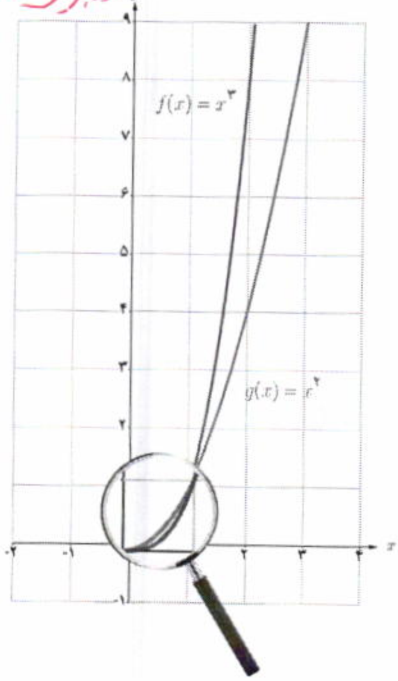
$f(1)=3(1)^2-3(1)+1=3-3+1=1$
$f(2)=3(2)^2-3(2)+1=12-6+1=7$
$f(3)=3(3)^2-3(3)+1=27-9+1=19$

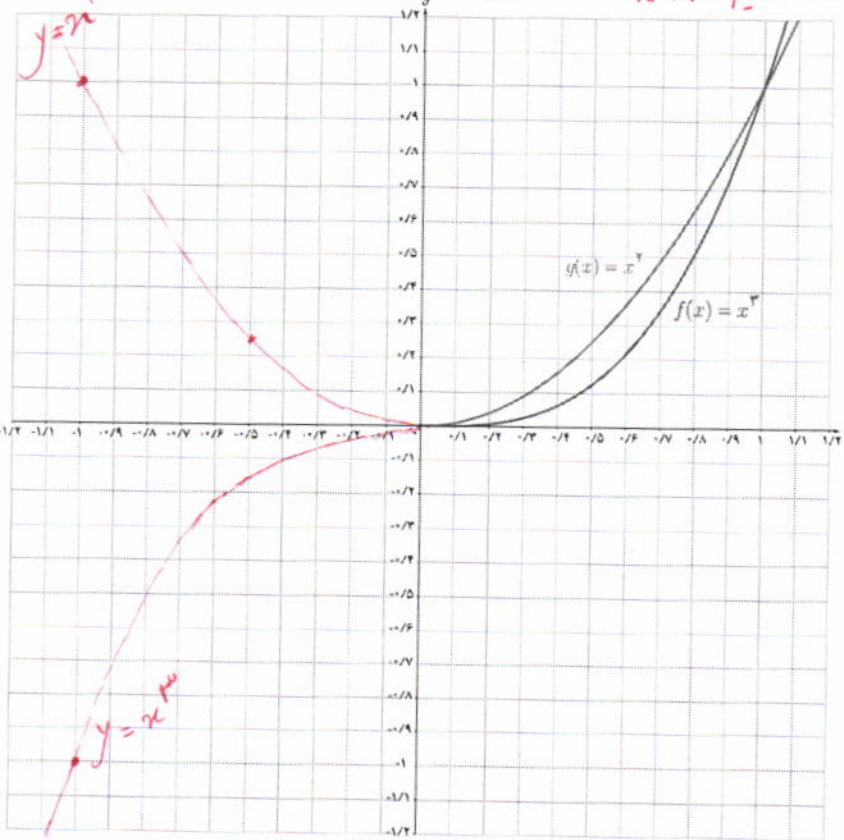
فعالیت

با توجه به نمودار توابع $f(x)=x^3$ و $g(x)=x^2$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند :

الف) آیا برای تمام x های نامنفی، نمودار $f(x)=x^3$ بالای نمودار $g(x)=x^2$ قرار دارد؟ خیر، زیرا برای $0<x<1$ داریم $x^3<x^2$

ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[-1,0]$ رسم کنید.

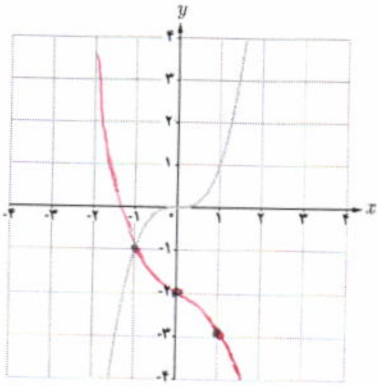




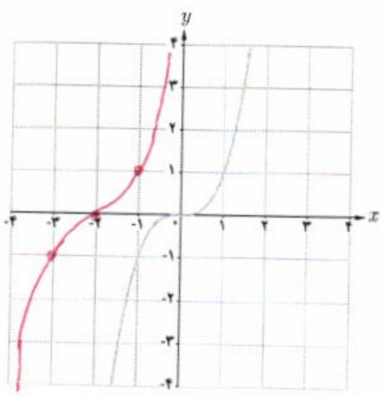
فعالیت

با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^3$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

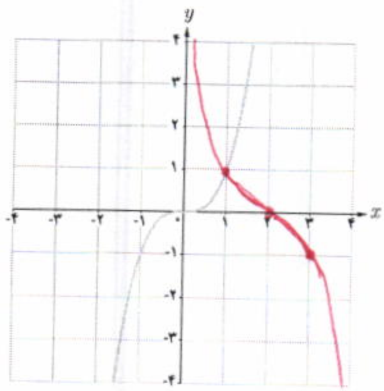
الف) $y=-x^3-2$



ب) $y=(x+2)^3$



پ) $y=-(x-2)^3$



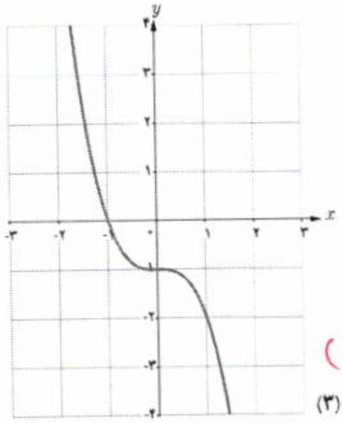
کار در کلاس

به کمک نمودار تابع $y=x^3$، ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

پ) $y=-x^3+1$ ۸ | ب) $y=(x-2)^3$ ۹ | الف) $y=(x-1)^3+2$ ۶

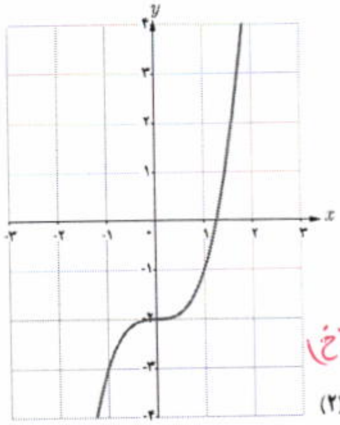
ج) $y=(x+1)^3$ ۱ | ث) $y=-x^3$ ۵ | ت) $y=(x+1)^3-1$ ۷

خ) $y=x^3-2$ ۲ | ح) $y=-x^3-1$ ۳ | چ) $y=x^3+1$ ۴



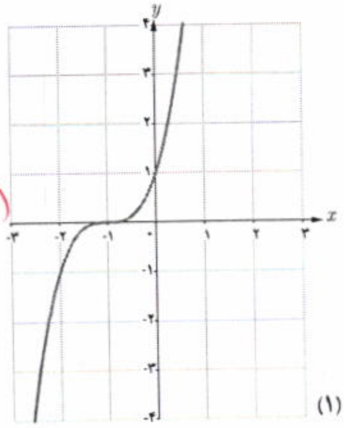
(ح)

(۳)



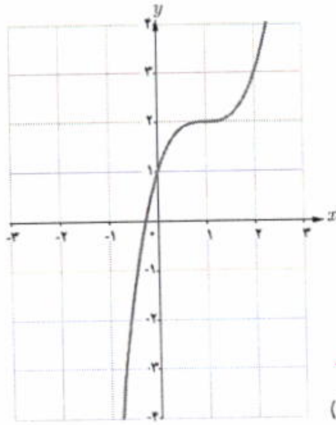
(خ)

(۲)



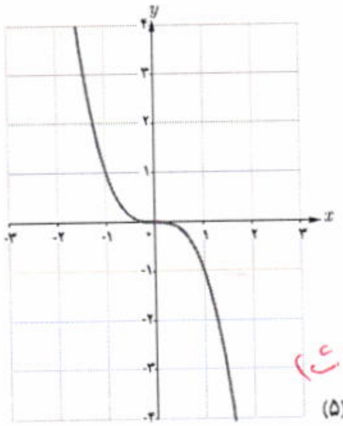
(ج)

(۱)



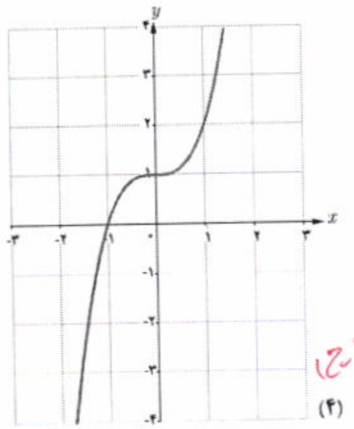
الف

(۶)



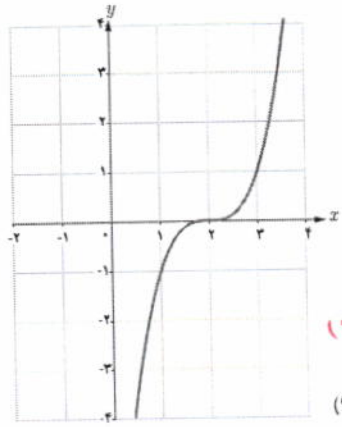
(ث)

(۵)



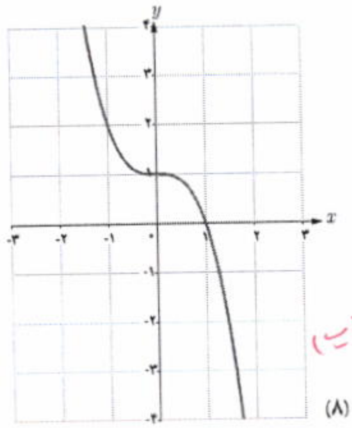
(چ)

(۴)



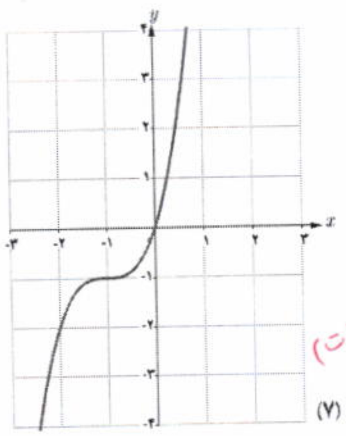
(ب)

(۹)



(پ)

(۸)



(ت)

(۷)

توابع صعودی و توابع نزولی:

فعالیت

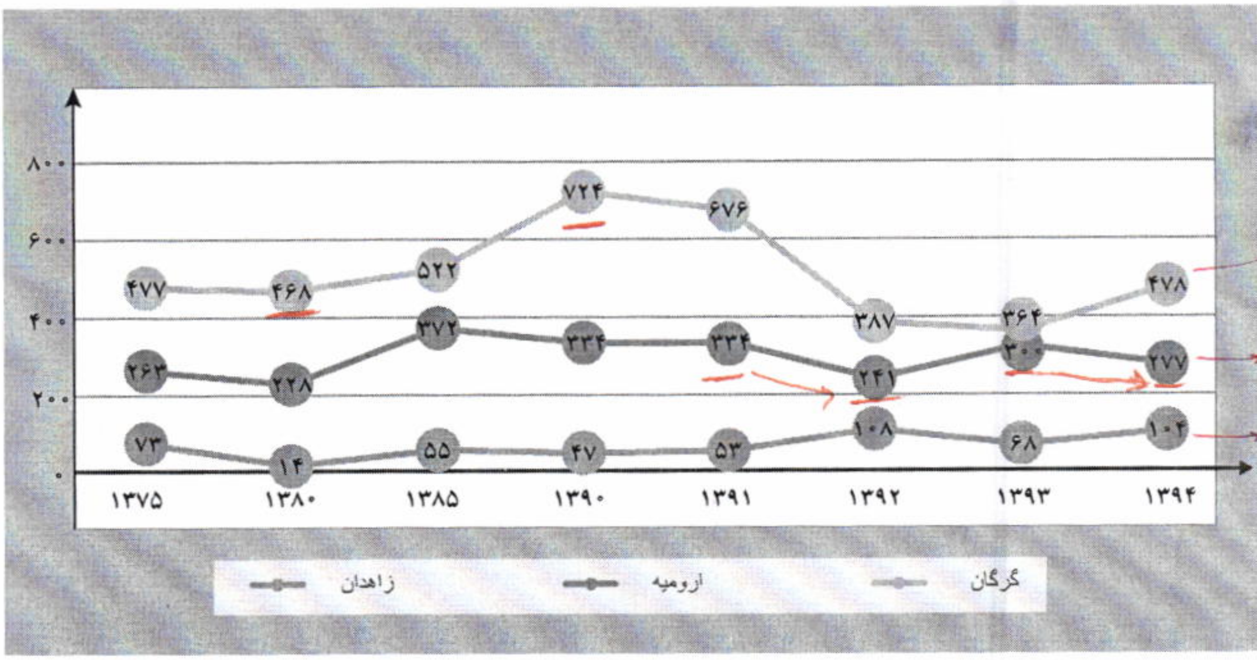
یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به‌طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

از سال ۸۵ تا ۹۰ صعودی

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

$\left.\begin{array}{l}\text{از سال ۹۱ تا ۹۳}\\ \text{از سال ۹۳ تا ۹۴}\end{array}\right\}$ روند نزولی



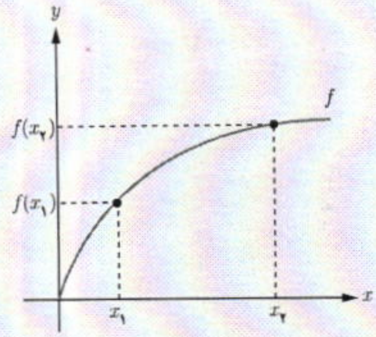
گرگان

ارومیه

زاهدان

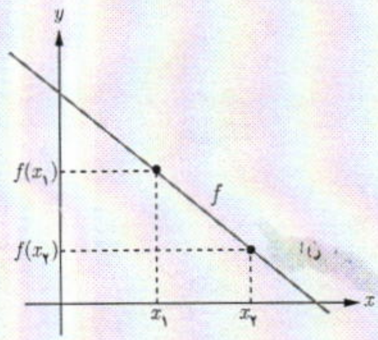
میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی‌متر)[1]

۱ــ منبع: سایت مرکز آمار ایران www.amar.org.ir



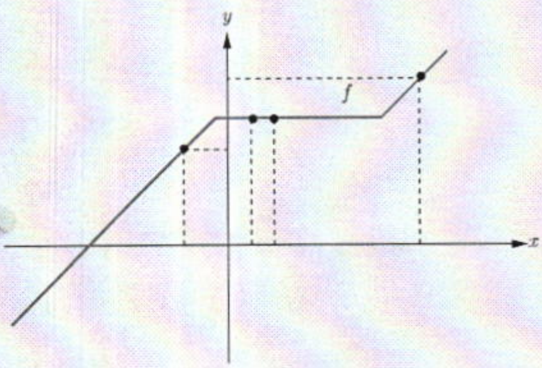
تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1)<f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



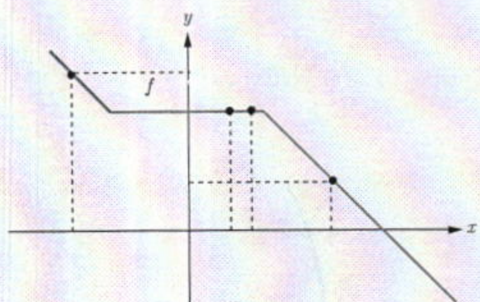
تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1)>f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.



تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\leq f(x_2)$، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.



تابع نزولی

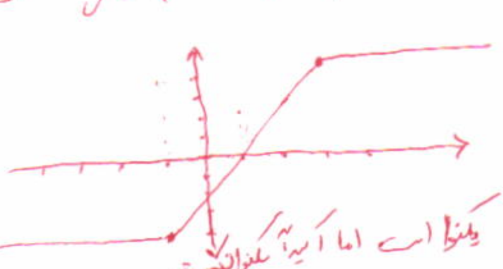
اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از دامنهٔ تابع f که $x_1 < x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\geq f(x_2)$، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

نکته : به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.

خیر

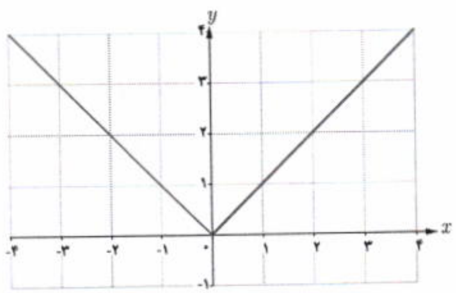
مثال $y=|x+1|-|x-3|$



یکنوا است اما اکیداً یکنوا نیست

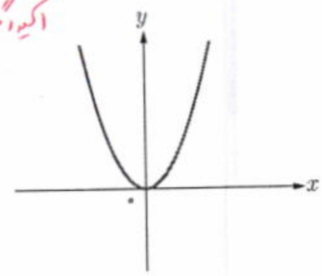
ممکن است تابعی در یک بازهٔ صعودی (اکیداً صعودی) و در بازهٔ دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

مثال : تابع $f(x)=|x|$ در بازهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.



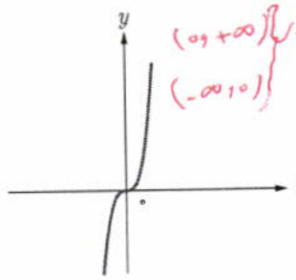
کار در کلاس

هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟



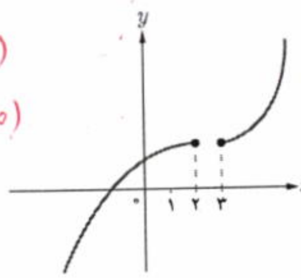
(پ)

اکیداً صعودی $(0,+\infty)$ ؛ اکیداً نزولی $(-\infty,0)$



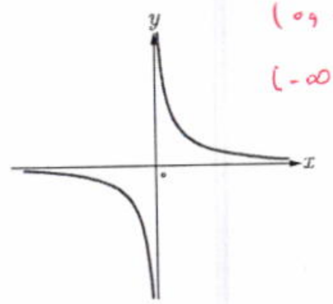
(ب)

اکیداً صعودی $(0,+\infty)$ $(-\infty,0)$



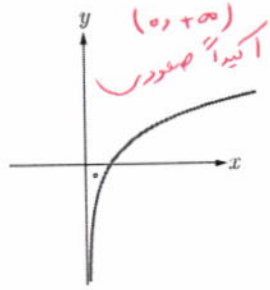
(الف)

اکیداً صعودی $(-\infty,2)$ $(3,+\infty)$



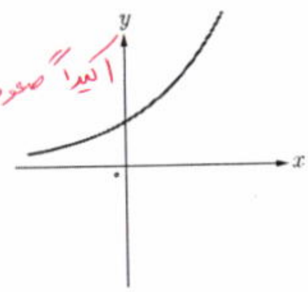
(ج)

اکیداً نزولی $(0,+\infty)$ $(-\infty,0)$



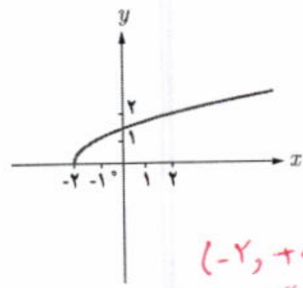
(ث)

اکیداً صعودی $(0,+\infty)$



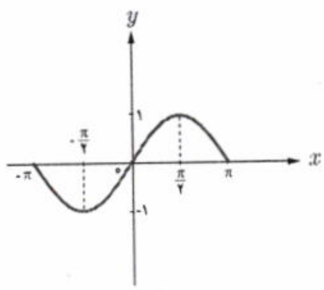
(ت)

اکیداً صعودی $\mathbb{R}$



(خ)

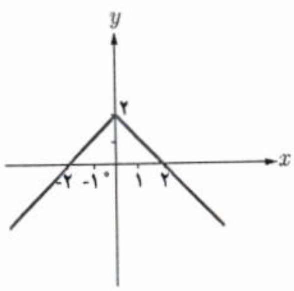
اکیداً صعودی $(-2,+\infty)$



(ح)

اکیداً صعودی $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

اکیداً نزولی $(-\pi,-\frac{\pi}{2})$ $(\frac{\pi}{2},\pi)$



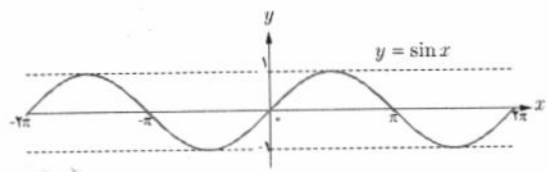
(چ)

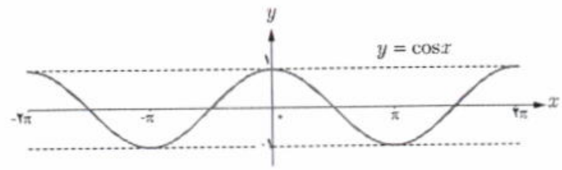
اکیداً نزولی $(0,+\infty)$

اکیداً صعودی $(-\infty,0)$

کار در کلاس

نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.





x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

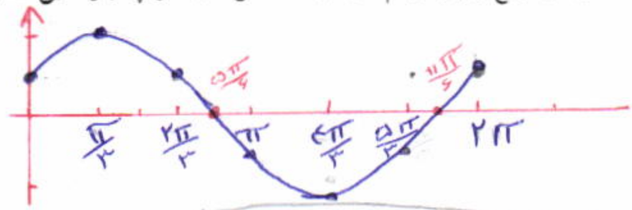
x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

کار در کلاس

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$ $\quad D_f=[0,2\pi]$



$[0,\frac{\pi}{3}) \Leftarrow$ صعودی $\rightarrow (\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$

$(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ نزولی

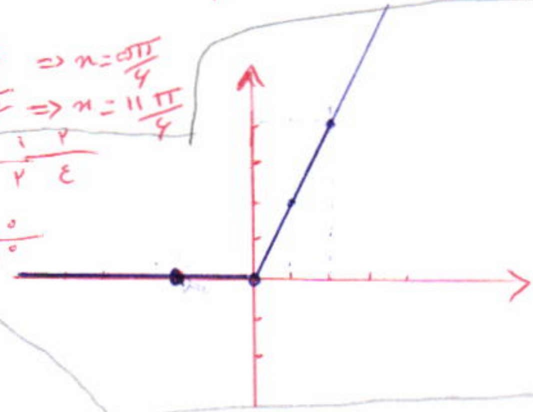
$\cos(x-\frac{\pi}{3})=0 \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{5\pi}{6} \\ x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{11\pi}{6} \end{cases}$

ب) $g(x)=x+|x|$

$\begin{cases} 2x & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$

x	0	1	2
y	0	2	4

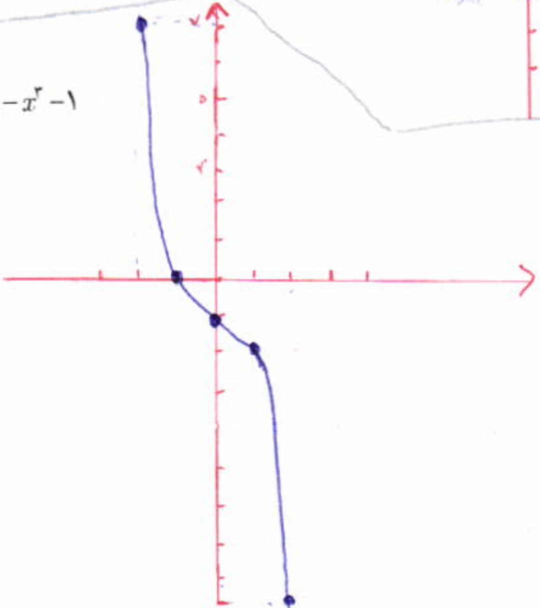
x	-1	0
y	0	0



$(-\infty, 0)$ ثابت، صعودی و نزولی

صعودی $(0,+\infty)$

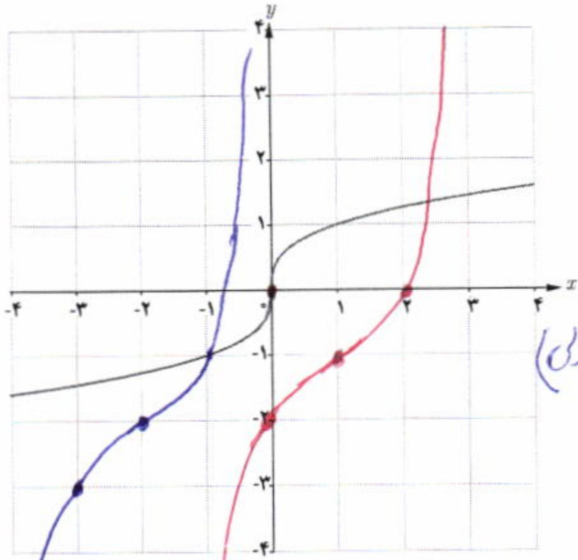
پ) $t(x)=-x^3-1$



x	y
-2	7
-1	0
0	-1
1	-2
2	-9

در $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است

فعالیت



به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟ اکیداً صعودی

ب) این تابع یک به یک است؟ بله

پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟ خیر. طبق تعریف اکیداً صعودی (نزولی) داریم

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $\quad (f(x_1) > f(x_2))$

در نتیجه طول های نابرابر عرض های نابرابر دارند.

x	y
-3	-3
-2	-2
-1	-1

تمرین

تمرین (۱) (ب)

تمرین (۱) قسمت الف

x	y
-1	-9
0	-2
1	-1
2	0
3	7

۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y=(x-1)^3-1$ دامنه و برد هر دو مجموعه اعداد حقیقی است

ب) $y=(x+2)^3-2$ دامنه و برد هر دو مجموعه اعداد حقیقی است

۲) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & x<-4\\ 3 & -4\le x<2\\ 3x-2 & x\ge 2\end{cases}$$

x	-5	-4
y	7	5

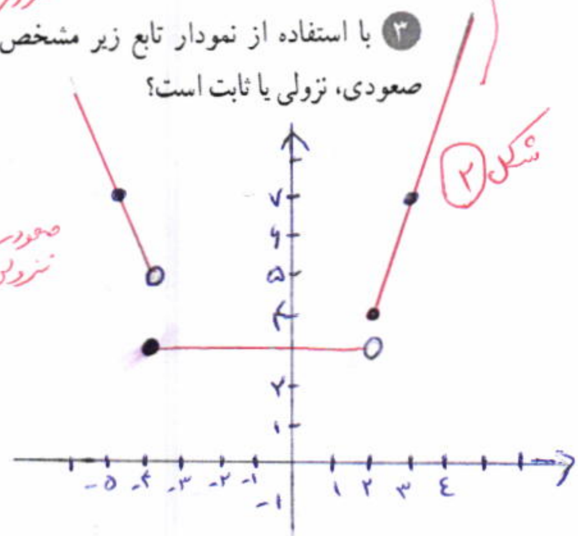
x	-4	2
y	3	3

x	2	3
y	4	7

$(-\infty, -4)$ نزولی

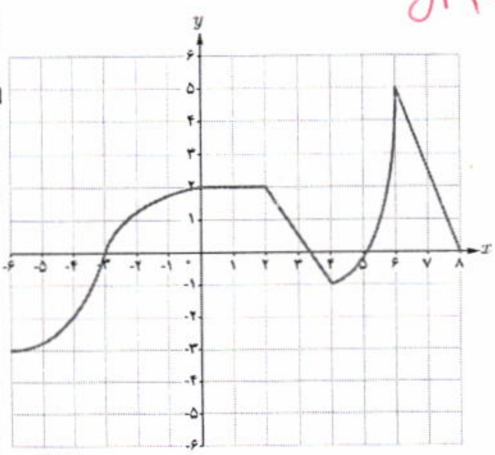
$(-4, 2)$ ثابت

$(2, +\infty)$ صعودی



شکل (۲)

۳) با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



$(-6, 0)$ صعودی

$(0, 2)$ ثابت {صعودی / نزولی}

$(2, 4)$ نزولی

$(4, 6)$ صعودی

$(6, +\infty)$ نزولی

گروه ریاضی دوره دوم استان خوزستان

۴) تابع نمایی $y=2^{-x}-2$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_2^x+2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۵) تابع $y=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

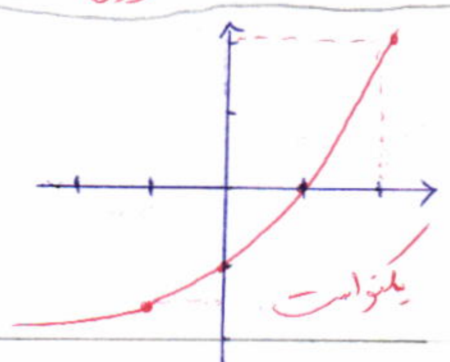
$|x|=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=\begin{cases}x^2(x) & x\ge 0\\ x^2(-x) & x<0\end{cases} \Rightarrow a=0$ حداکثر

۶) تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.

$y=\sqrt{x} \to [0,+\infty)$ اکیداً صعودی و $y=2^{-x}$ اکیداً نزولی است

(۴) $y=2^x-2$

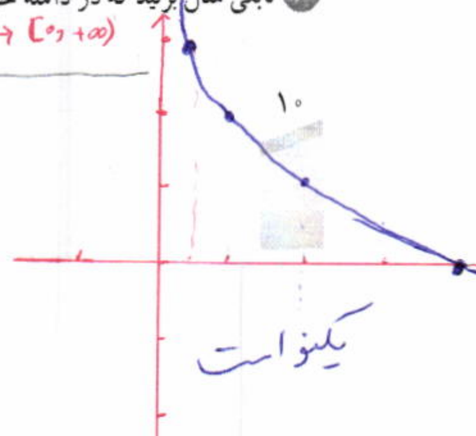
x	y
-1	$-\frac{3}{2}$
0	-1
1	0
2	2



یکنواست

$y=-\log_2^x+2$

x	y
$\frac{1}{2}$	3
1	2
2	1
4	0
8	-1



یکنواست

درس دوم

ترکیب توابع

در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می‌خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$d(t)=4t+2 \quad ; \quad 0\leq t\leq 3$ (واحد t، ساعت است.)

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$d(2)=10$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد است.

$d(1)= 4(1)+2=6$ " " " ۶ " " " " " " " "

$d(3)= 4(3)+2=14$ " " " ۱۴ " " " " " " " "

همچنین اگر یک مادهٔ غذایی را با دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$n(d)=20d^2-80d+500; \quad 2\leq d\leq 14$

که در این تابع، d دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجهٔ سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$n(10)=20(10)^2-80(10)+500=1700$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد به ۱۷۰۰ افزایش یافته است.

$n(2)= 20(2)^2-80(2)+500=80-160+500=420$

$n(3)= 20(3)^2-80(3)+500=180-240+500=440$

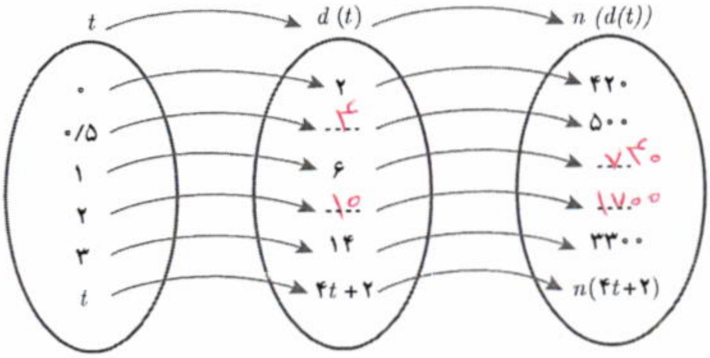
به‌طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد، به عبارت دیگر :

$$\text{زمان} \xrightarrow{d} \text{دما} \xrightarrow{n} \text{تعداد باکتری‌ها}$$

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت : تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی که به میزان ۲ ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۷۰۰ تاست.

پ) جدول روبه‌رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

t	$d(t)=۴t+۲$	$n(d(t))=n(۴t+۲)$
۰	$d(۰)=۲$	$n(d(۰))=n(۲)=۴۲۰$
$۰/۵$	$d(۰/۵)=$ ۴	$n(d(۰/۵))=n($۴$)=۵۰۰$
۱	$d(۱)=۶$	$n(d(۱))=n(۶)=$ ۷۴۰
۲	$d(۲)=$ ۱۰	$n(d(۲))=n($۱۰$)=$ ۱۷۰۰
۳	$d(۳)=۱۴$	$n(d(۳))=n(۱۴)=۳۳۰۰$



همان‌طور که دیدیم، می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است.

آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟

به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که n را برحسب t مشخص کند؟

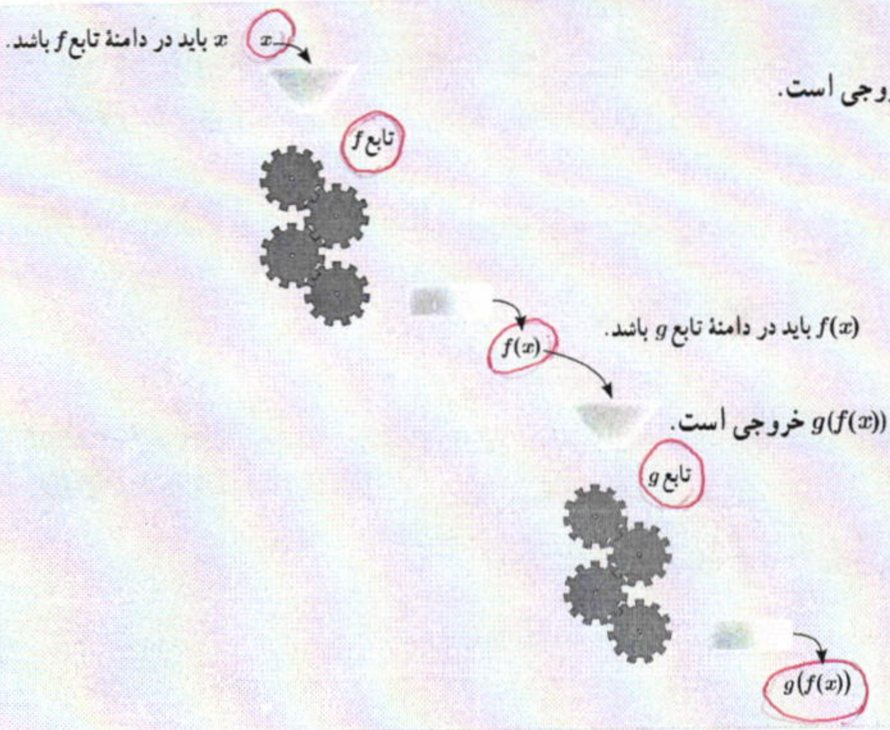
برای به‌دست آوردن چنین تابعی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$n(d(t))=n(۴t+۲)=۲۰(۴t+۲)^۲-۸۰(۴t+۲)+۵۰۰=۳۲۰t^۲+۳۲۰t+۸۰-۳۲۰t\underbrace{}_{-۱۶۰+۵۰۰}=۳۲۰t^۲+۴۲۰ \qquad ۰\le t\le ۳$$

$n(d(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

مراحل ساخت تابع $g(f(x))$:

مرحلهٔ اول : x ورودی و $f(x)$ خروجی است.



مرحلهٔ دوم : $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.

اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع f و دامنهٔ تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر :

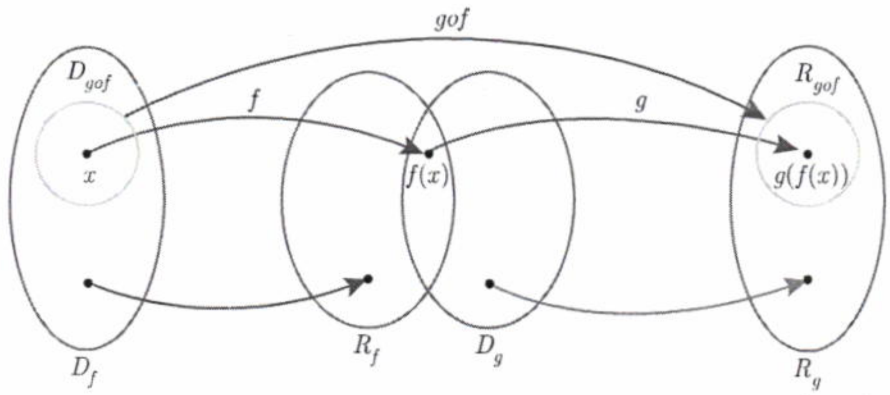
$$(gof)(x) = g(f(x))$$

دامنهٔ تابع مرکب :

دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ـ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ـ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به‌صورت مشابه دامنهٔ تابع fog به صورت زیر است :

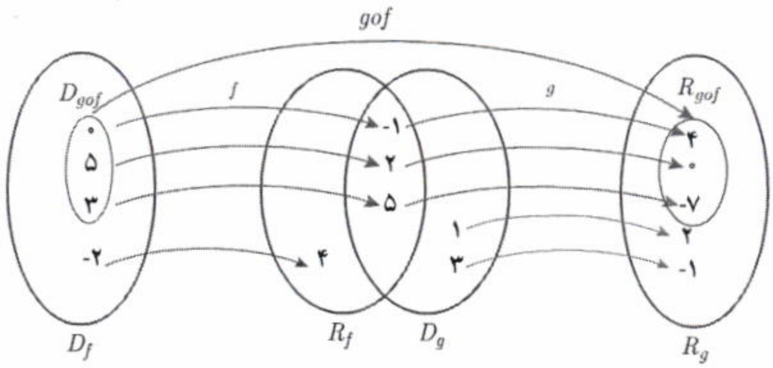
$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

و همچنین :

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

مثال : اگر $f = \{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵),(-۲,۴)\}$ و $g = \{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰),(-۱,۴),(۵,-۷)\}$ ، تابع gof را در صورت امکان بنویسید.

$$\left.\begin{array}{l} (gof)(۰) = g(f(۰)) = g(-۱) = ۴ \\ (gof)(۵) = g(f(۵)) = g(۲) = ۰ \\ (gof)(۳) = g(f(۳)) = g(۵) = -۷ \\ (gof)(-۲) = g(f(-۲)) = g(۴) : \text{تعریف نشده} \end{array}\right\} \rightarrow gof = \{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$$



کار در کلاس

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

x	$f(x)$
-3	-7
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	3
2	5
3	5

x	$g(x)$
-3	8
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8

الف) $(fog)(1) = f(g(1)) = f(0) = -1$

ب) $(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(0) = -1$

پ) $(gof)(0) = g(f(0)) = g(-1) = 0$

ت) $(gog)(-2) = g(g(-2)) = g(3) = 8$

ث) $(gof)(2) = g(f(2)) = g(5) =$ تعریف نشده است

ج) $(fof)(1) = f(f(1)) = f(3) = 5$

مثال : اگر $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطهٔ تابع gof را به‌دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x-2)^2 - 1$$

مثال : اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-1}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $x - 1 \geq 0$ که بازهٔ $[1, +\infty)$ به‌دست می‌آید.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 2(f(x))^2 - 1 = 2(\sqrt{x-1})^2 - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\}$$

عبارت $2x^2 - 1 \in [1, +\infty)$ به این معنی است که عبارت $2x^2 - 1$ متعلق به بازهٔ $[1, +\infty)$ باشد، یعنی $2x^2 - 1 \geq 1$، بنابراین :

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1} = \sqrt{2x^2 - 1 - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$$

اگر دامنه و ضابطهٔ توابع gof و fog را با هم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ لزوماً با هم برابر نیستند.

تذکر : دامنهٔ توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطهٔ آن. مثلاً در اینجا می‌بینیم که دامنهٔ تابع gof با توجه به ضابطهٔ آن $\mathbb{R}$ است در صورتی که برابر $[1, +\infty)$ است.

کار در کلاس

اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و fof را به‌دست آورید.

$D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{3}{x} \in \mathbb{R} - \{1\}\} = \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$\frac{3}{x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$

$fog(x) = f(g(x)) = \frac{2}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{2x}{3-x}$

$D_{fof} = \{x \in \mathbb{R} - \{1\} \mid \frac{2}{x-1} \in \mathbb{R} - \{1\}\} = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

$\frac{2}{x-1} \neq 1 \Rightarrow (\frac{2}{x-1} = 1 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3) \; x \neq 3$

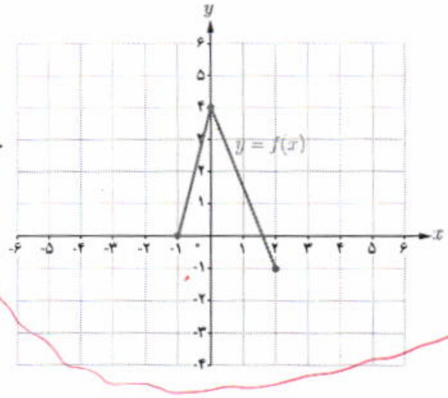
$fof(x) = \frac{2}{\frac{2}{x-1} - 1} = \frac{2x-2}{3-x}$

«تبدیل نمودار توابع»

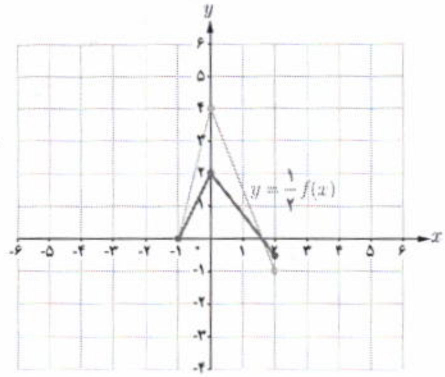
یادآوری : همان‌طور که در پایهٔ یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

مثال : در شکل زیر نمودار تابع f و با کمک آن نمودار توابع $y=\frac{1}{2}f(x)$ ، $y=-f(x)$ و $y=2f(x)$ رسم شده است.

x	$f(x)$
۱-	۰
۰	۴
۲	۱-



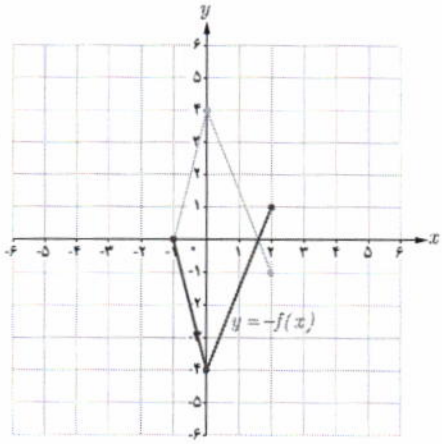
x	$\frac{1}{2}f(x)$
۱-	۰
۰	۲
۲	$-\frac{1}{2}$



برای رسم نمودار $y=\frac{1}{2}f(x)$ عرض هر نقطهٔ نمودار تابع f را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

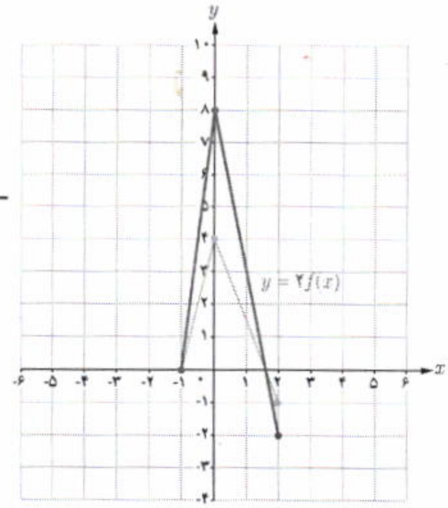
از آنجایی که ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ و $kf(x)=0$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور xها یکسان است.

x	$-f(x)$
۱-	۰
۰	۴-
۲	۱



برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطهٔ نمودار تابع f را در ۱- ضرب می‌کنیم.

x	$2f(x)$
۱-	۰
۰	۸
۲	۲-

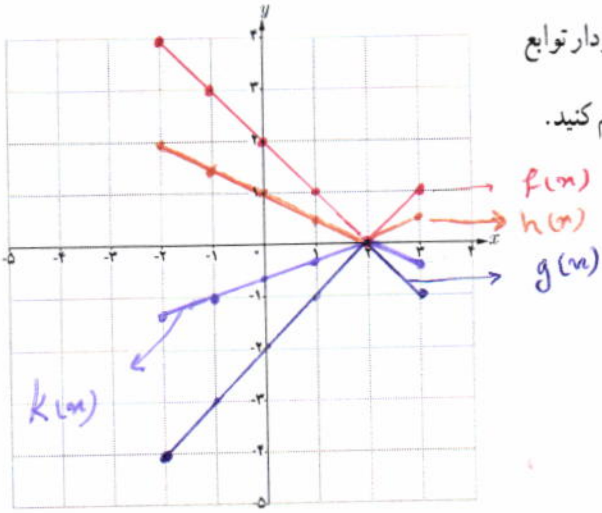


برای رسم نمودار $y=2f(x)$ عرض هر نقطهٔ نمودار تابع f را در ۲ ضرب می‌کنیم.

دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

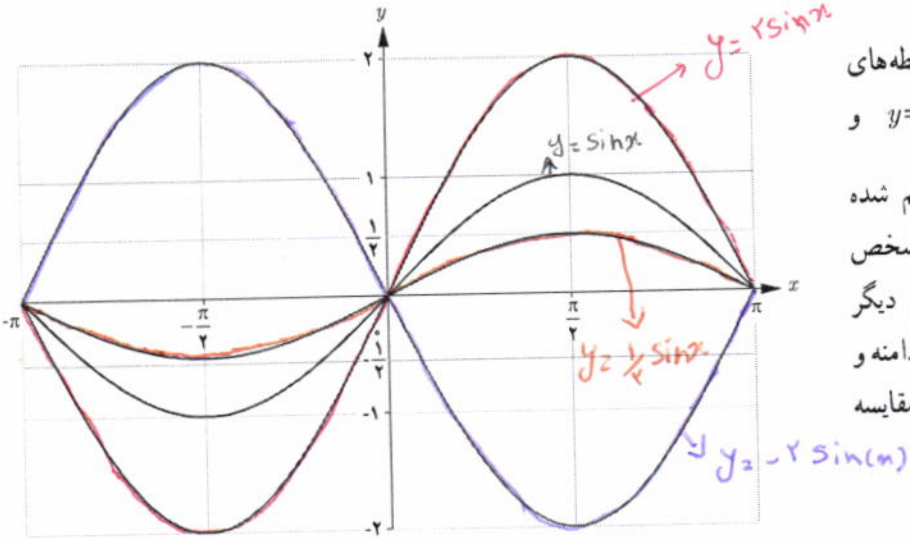
کار در کلاس

نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازهٔ $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.



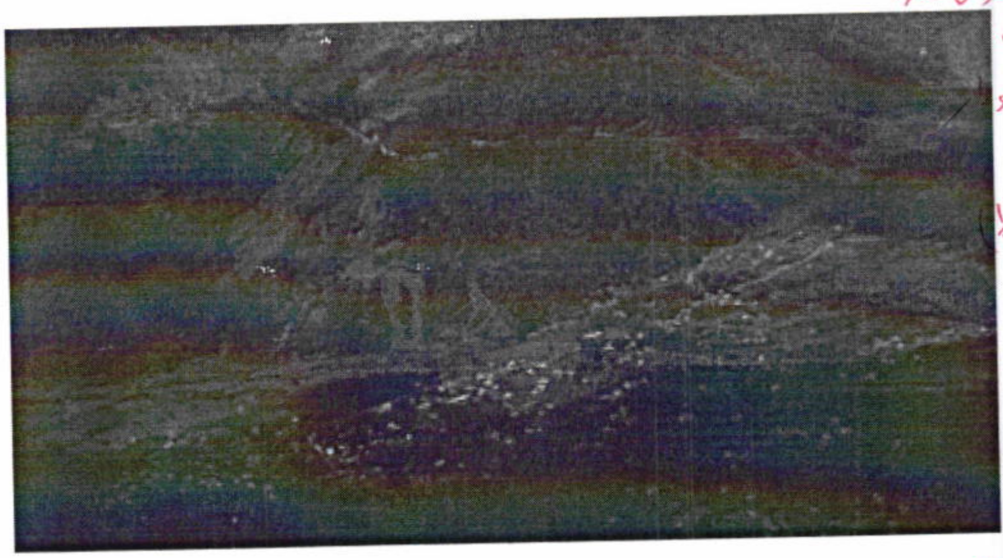
کار در کلاس

در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$ ،$y=۲\sin x$ ،$y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.



دامنه هیچ کدام تغییر نمی‌کند.

توابع $y=2\sin x$، $y=-2\sin x$، $y=\frac{1}{2}\sin x$ برای رسم عرض هر نقطه از نمودار تابع $y=\sin x$ را با حفظ طول آن نقطه (2 یا -2 یا $\frac{1}{2}$) برابر می‌کنیم.



ییلاقات تالش

$y=2\sin x \rightarrow$ برد $=[-2,2]$

$y=-2\sin x \rightarrow$

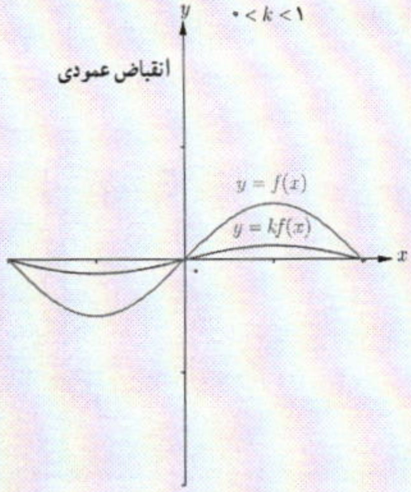
$y=\frac{1}{2}\sin x$ برد $=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

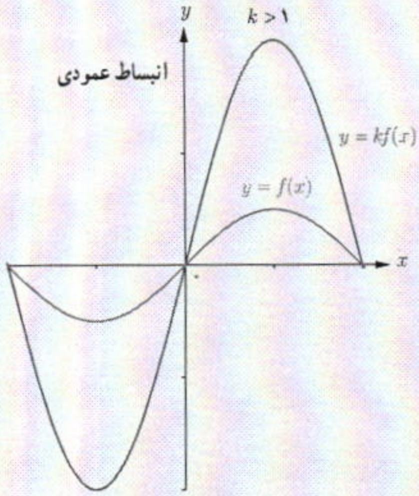
$y=\sin x$ برد $=[-1,1]$

می‌توان گفت نمودار تابع $y = kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y = f(x)$ دارد :

اگر $k > ۰$، نمودار $y = kf(x)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور yها به دست آورد.

اگر $k < ۰$ ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.





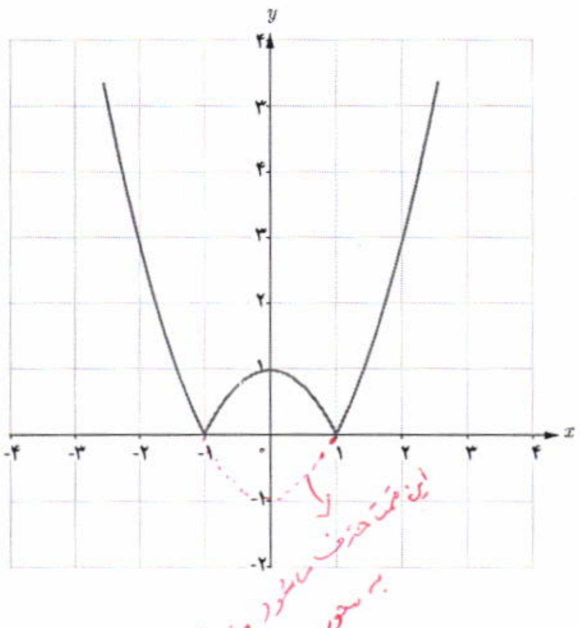
اگر $۰ < k < ۱$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.

اگر $k > ۱$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

رسم نمودار $|f|$:

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور xهاست، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور xها رسم کنیم.

مثال : در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = |x^2 - ۱|$ رسم شده است.



این قسمت حذف می‌شود و قرینه آن نسبت به محور xها رسم می‌شود

رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$:

مثال : تابع $f(x)=x+۳$ را با دامنه $[-۴,۰]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{x}{۲})$ را بررسی می‌کنیم.
ضابطهٔ تابع $y=f(۲x)$ به صورت $f(۲x)=۲x+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$$-۴\leq ۲x\leq ۰ \rightarrow -۲\leq x\leq ۰ \rightarrow f(۲x) \text{ دامنهٔ } : D=[-۲,۰]$$

همچنین ضابطهٔ تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به صورت $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

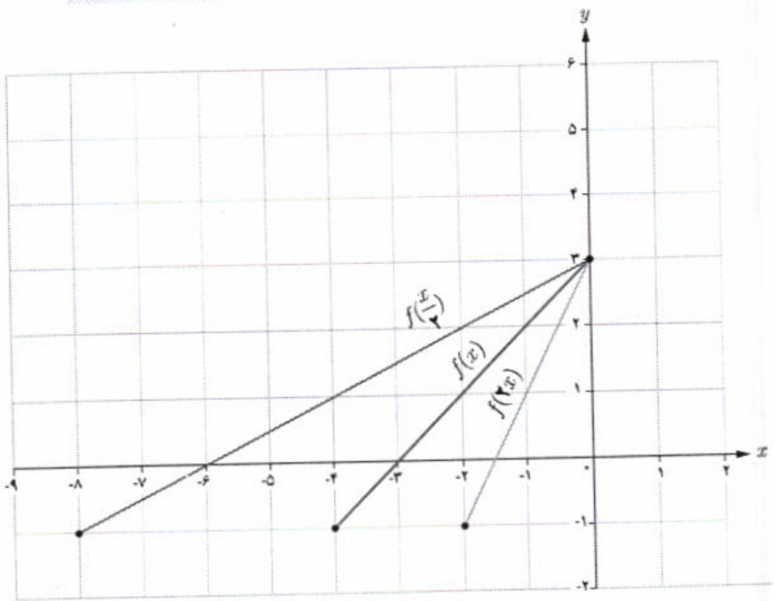
$$-۴\leq \frac{x}{۲}\leq ۰ \rightarrow -۸\leq x\leq ۰ \rightarrow f(\frac{x}{۲}) \text{ دامنهٔ } : D=[-۸,۰]$$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است :

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
$f(x)=x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

x	-۲	$-۱/۵$	-۱	$-۰/۵$	۰
$f(۲x)=۲x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

x	-۸	-۶	-۴	-۲	۰
$f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

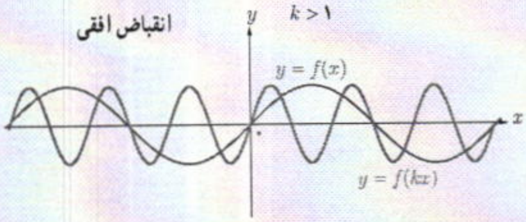


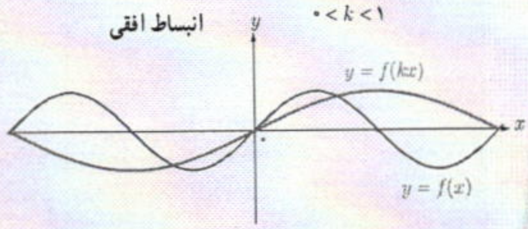
همان‌طور که ملاحظه می‌شود برد توابع $f(۲x)$ و $f(\frac{x}{۲})$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به دست آورد.

اگر $k<0$، ابتدا نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

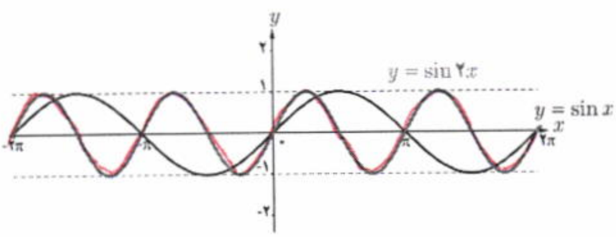


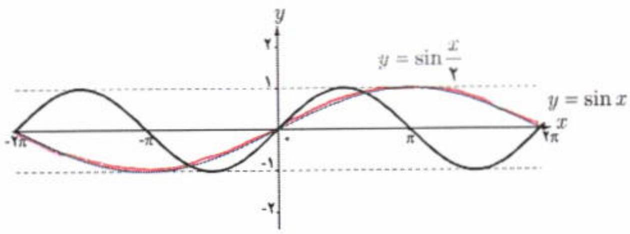


اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

اگر $0<k<1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

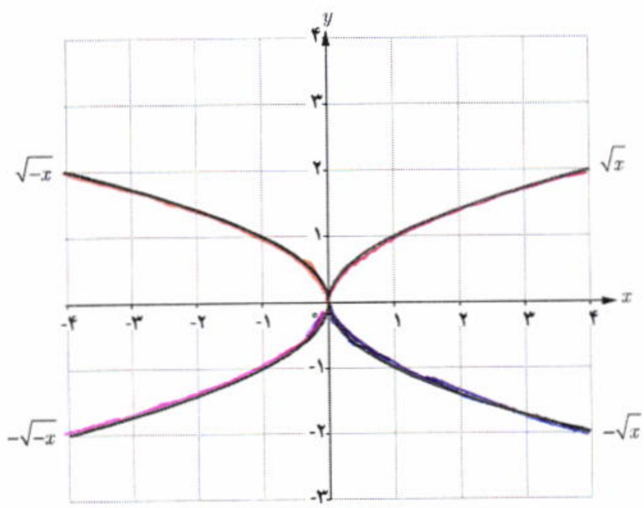
مثال : در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin\frac{x}{2}$ در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y=\sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محورxها و نمودار تابع $y=\sin\frac{x}{2}$ با انبساط نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محورxها به‌دست آمده است.





کار در کلاس

نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده‌است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.



$y=\sqrt{x}$ $D=[0,+\infty)$ $R=[0,+\infty)$

$y=-\sqrt{x}$ $D=[0,+\infty)$ $R=(-\infty,0]$

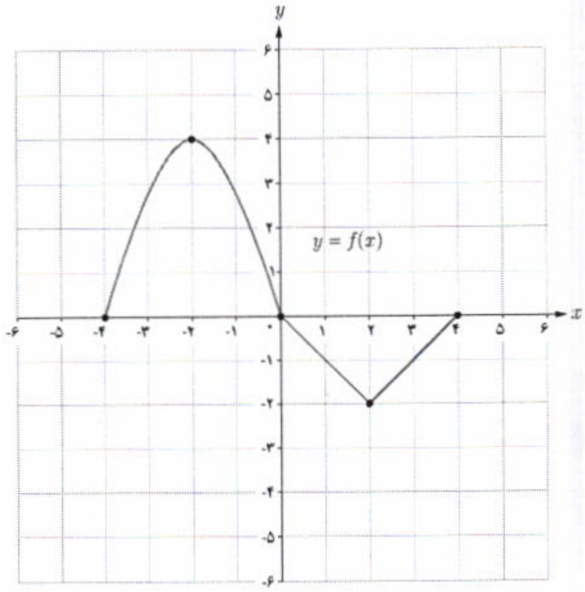
$y=\sqrt{-x}$ $D=(-\infty,0]$ $R=[0,+\infty)$

$y=-\sqrt{-x}$ $D=(-\infty,0]$ $R=(-\infty,0]$

کار در کلاس

نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۴,۴]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
-۴	۰
-۲	۴
۰	۰
۲	-۲
۴	۰

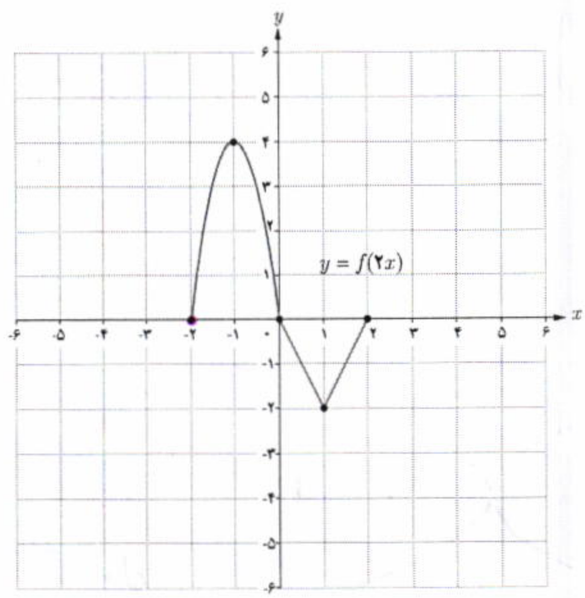


الف) برای تعیین دامنهٔ $y=f(۲x)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-۴ \le ۲x \le ۴ \rightarrow -۲ \le x \le ۲$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(۲x)$ بازهٔ $[-۲,۲]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.
برای رسم نمودار $f(۲x)$، طول نقاط یا همان xها باید محاسبه شود.

x	$۲x$	$f(۲x)$	$(x, f(۲x))$
-۲	-۴	۰	$(-۲,۰)$
-۱	-۲	۴	$(-۱,۴)$
۰	۰	۰	$(۰,۰)$
۱	۲	-۲	$(۱,-۲)$
۲	۴	۰	$(۲,۰)$

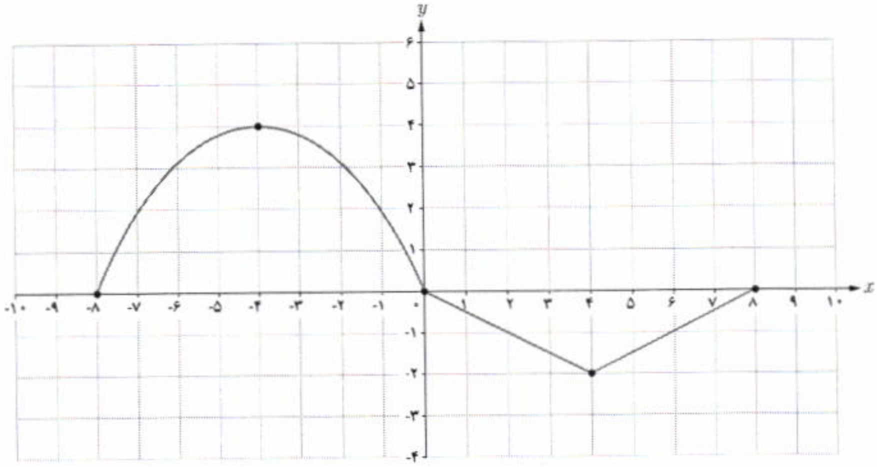


ب) برای تعیین دامنهٔ $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$-۴ \le \frac{۱}{۲}x \le ۴ \rightarrow -۸ \le x \le ۸$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(\frac{1}{2}x)$ بازهٔ $[-8,8]$ است و نقاط متناظر به‌صورت زیر است :

$\frac{1}{2}x$	x	$f(\frac{1}{2}x)$
-4	-8	0
-2	-4	4
0	0	0
2	4	-2
4	8	0

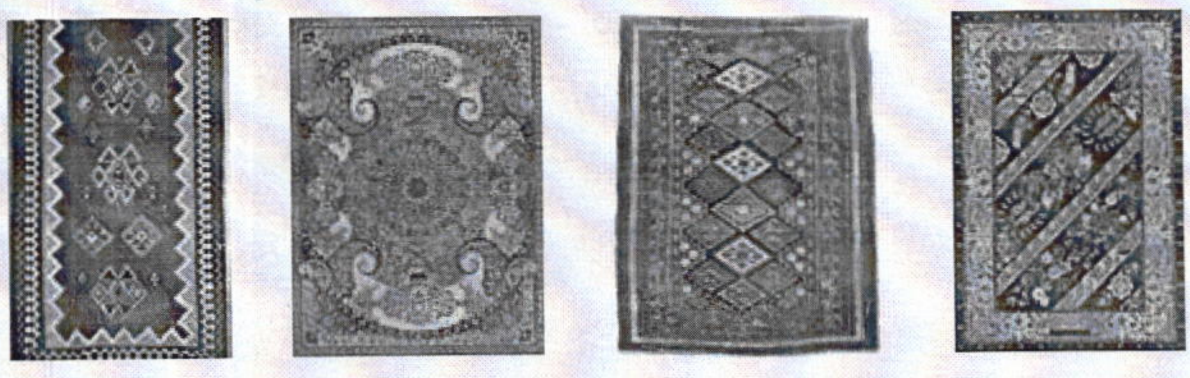


همان‌طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y=f(2x)$ طول هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ و برای رسم نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ طول هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم.

دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

خواندنی

فرش‌بافی از جمله هنرهای اصیل و ارزشمندی است که سابقه‌ای طولانی در ایران دارد. این هنر اصیل با فرهنگ کهنسال این مرز و بوم پیوندی ناگسستنی داشته و در گذر قرن‌ها یکی از دستاوردهای مهم ایرانیان محسوب شده است، به طوری‌که جهانیان فرش را با نام ایران می‌شناسند. هنرمندان طراح فرش با الهام از طبیعت و یا ترکیبی از خیال و طبیعت نقش‌هایی را بر روی آثارشان جلوه‌گر می‌سازند که در آنها اشکالی به صورت شکسته، گردان و یا تلفیقی طراحی می‌کنند. در این طراحی‌ها از انتقال و تبدیل نیز استفاده می‌شود.



تمرین

۱ اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$ ، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^۲-۵ \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x+۶} \quad : \quad D_{fog}\,,(fog)(x)$

ب) $f(x)=\sqrt{۳-۲x} \quad ; \quad g(x)=\dfrac{۶}{۳x-۵} \quad : \quad D_{fog}\,,(fog)(x)$

پ) $f(x)=\sqrt{x+۲} \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶} \quad : \quad D_{gof}\,,(gof)(x)$

ت) $f(x)=\sin x \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x} \quad : \quad D_{gof}\,,(gof)(x)$

۳ اگر $f\big(g(x)\big)=۳x^۲-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ؛ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$. نادرست

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست. نادرست

پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ ، آنگاه $(fog)(۴)=۵$. درست

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$. درست

۵ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۶ تابع $h(x)=(۳x^۲-۴x+۱)^۵$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x)=\sqrt[۵]{x} \; ; \; g(x)=۳x^۲-۴x+۱$ $\qquad fog(x)=\sqrt[۵]{۳x^۲-۴x+۱} \qquad gof(x)=۳(\sqrt[۵]{x})^۲-۴(\sqrt[۵]{x})+۱$

ب) $k(x)=x^۵ \quad ; \; l(x)=۳x^۲-۴x+۱$ $\qquad kol(x)=(۳x^۲-۴x+۱)^۵$ ✓ $\qquad lok(x)=۳(x^۵)^۲-۴(x^۵)+۱$

۷ هریک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱} = fog(x) \Leftarrow \boxed{f(x)=\sqrt[۳]{x+۱} \qquad g(x)=x^۲}$ یا $\boxed{f(x)=\sqrt[۳]{x} \qquad g(x)=x^۲+۱}$

ب) $l(x)=\sqrt{x^۲+۵}$

$\boxed{f(x)=\sqrt{x+۵} \qquad g(x)=x^۲}$

یا

$\boxed{f(x)=\sqrt{x} \qquad g(x)=x^۲+۵}$

⋮

$fog(x)=\sqrt{x^۲+۵}$

ادامه سوال (۲)

ت) $f(x)=\sin(x)$ $\quad g(x)=\sqrt{x}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$ $\quad D_g=[0,+\infty)$

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} \mid \sin(x)\in[0,+\infty)\}=[2k\pi,(2k+1)\pi] \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\sin(x)\geq 0 \xrightarrow{\text{ناحیه اول و دوم}} x\in[2k\pi,(2k+1)\pi] \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$gof(x)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\sin x}$$

---

۳)

$f(x)=3x-4$ $\quad f(g(x))=3x^2-6x+14$ $\quad g(x)=?$

برابر

$$f(g(x))=3(g(x))-4$$

$$3(g(x))-4=3x^2-6x+14 \qquad 3(g(x))=3x^2-6x+18 \xRightarrow{\div 3}$$

$$\boxed{g(x)=x^2-2x+6}$$

---

۴)

الف) نادرست

$fog(5)=f(g(5))$

$=f(\sqrt{21})$

$=17$

ب) نادرست

مثال

$f(x)=3x$

$g(x)=2x$

$fog(x)=gof(x)=6x$

پ) درست

$fog(4)=f(g(4))=$

$=f(7)=5$

ت) درست

$fog(5)=f(g(5))$

$=f(9)=3$

$g(2)=2(2)-1=3$

گروه ریاضی دوره دوم استان خوزستان

---

۵)

$f(x)=x-\underbrace{0.2x}_{\text{تخفیف ۲۰ درصد}}=0.8x$ $\qquad g(x)=\underbrace{x-200000}_{\text{تخفیف نقدی}}$

الف) $gof(x)=g(f(x))=0.8x-200000$

$$gof(2000000)=0.8(2000000)-200000=1600000-200000=1400000$$

ب) $fog(x)=f(g(x))=0.8(x-200000)=0.8x-160000$

$$fog(2000000)=0.8(2000000)-160000=1600000-160000=1440000$$

در حالت الف نفع الناز بیشتر است

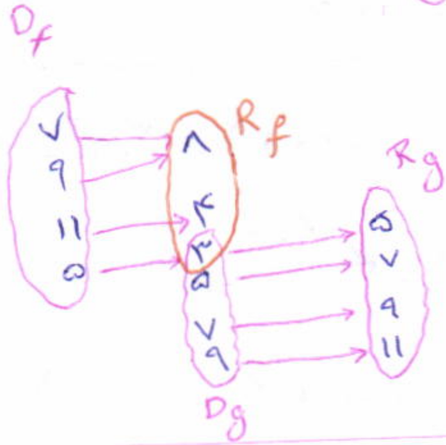
تمرین های ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ در تمرین ها حل شده است

تمرین های صفحه های ۲۲ ، ۲۳ فصل (۱) ریاضی (۳) ص ۲۲،۱

$f = \{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\}$ $\quad g = \{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\}$

$f \circ g = \{(5,8),(3,3),(7,8),(9,4)\}$

$g \circ f = \{(5,5)\}$



گروه ریاضی دوره دوم
استان خوزستان

(۲)

الف) $f(x) = x^2 - 5 \qquad g(x) = \sqrt{x+6} \qquad D_f = \mathbb{R} \qquad D_g = [-6, +\infty)$

$D_{f \circ g} = \{ x \in [-6, +\infty) \mid \underbrace{\sqrt{x+6} \in \mathbb{R}}_{\text{با توجه به دامنه برقرار است}} \} = [-6, +\infty)$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x+6})^2 - 5 = x + 6 - 5 = x + 1$

ب) $f(x) = \sqrt{3 - 2x} \qquad g(x) = \frac{6}{3x-5} \qquad D_f = (-\infty, \frac{3}{2}] \qquad D_g = \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\}$

$D_{f \circ g} = \{ x \in \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\} \mid \frac{6}{3x-5} \in (-\infty, \frac{3}{2}] \} = [3, +\infty)$

$\frac{6}{3x-5} \leq \frac{3}{2} \implies \frac{2}{3x-5} \leq \frac{1}{2} \implies \frac{3x-5}{2} \geq 2 \implies 3x \geq 9 \implies x \geq 3$

$x \in [3, +\infty)$

$f \circ g(x) = \sqrt{3 - 2\left(\frac{6}{3x-5}\right)} = \sqrt{\frac{9x - 15 - 12}{3x-5}} = \sqrt{\frac{9x-27}{3x-5}}$

پ) $f(x) = \sqrt{x+2} \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 16} \qquad D_f = [-2, +\infty) \qquad D_g = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

$D_{g \circ f} = \{ x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x+2} \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \} = [14, +\infty)$

$g \circ f(x) = \sqrt{(\sqrt{x+2})^2 - 16} = \sqrt{x + 2 - 16} = \sqrt{x - 14}$

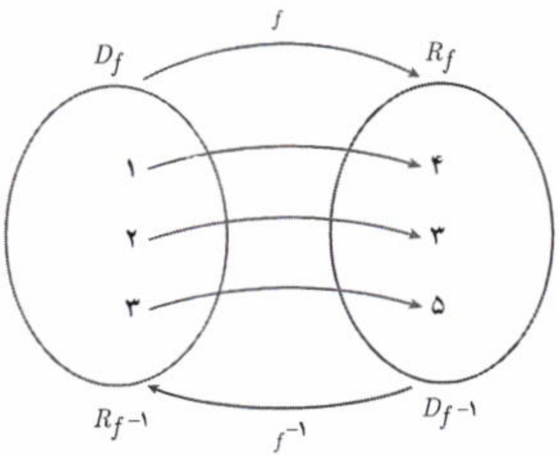
$\sqrt{x+2} \leq -4 \implies$ همواره نادرست است

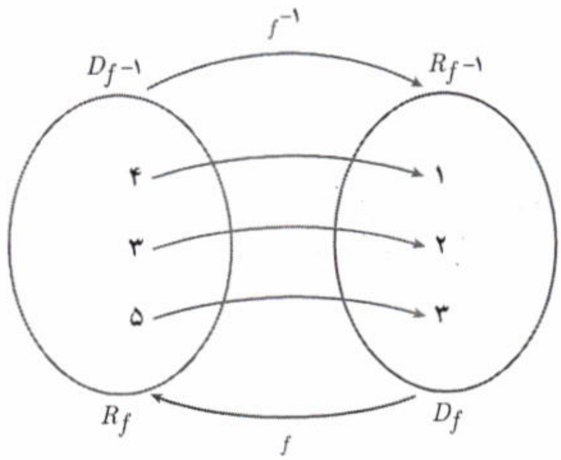
$\sqrt{x+2} \geq 4 \xRightarrow{\text{توان ۲}} x + 2 \geq 16 \implies x \geq 14 \implies [14, +\infty)$

همچنین :

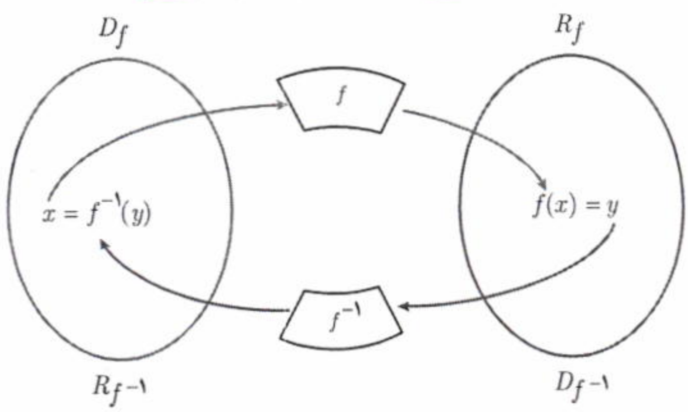
$$\begin{cases}(f^{-۱}of)(۱)=f^{-۱}(f(۱))=f^{-۱}(۴)=۱\\(f^{-۱}of)(۲)=f^{-۱}(f(۲))=f^{-۱}(۳)=۲ \rightarrow f^{-۱}of=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}\\(f^{-۱}of)(۳)=f^{-۱}(f(۳))=f^{-۱}(۵)=۳\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f داریم : $(f^{-۱}of)(x)=x$





به‌طور کلی اگر f تابعی یک‌به‌یک و $f^{-۱}$ تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و $f^{-۱}$ را نشان می‌دهد.



اگر f تابعی وارون‌پذیر و $f^{-۱}$ وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f(f^{-۱}(x))=x \quad ; \quad x\in D_{f^{-۱}}$$

$$f^{-۱}(f(x))=x \quad ; \quad x\in D_f$$

توجه به تفاوت دامنه ها

با توجه به آنچه که دیدیم می‌توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که :

الف) $(fog)(x)=x \; ; \; x\in D_g$

ب) $(gof)(x)=x \; ; \; x\in D_f$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = ۳x - ۴$$

$$g(x) = \frac{x + ۴}{۳}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۳g(x) - ۴ = ۳(\frac{x+۴}{۳}) - ۴ = x \qquad (x \in D_g)$$

همچنین :

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+۴}{۳} = \frac{۳x - ۴ + ۴}{۳} = x \qquad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.[۱]

کار در کلاس

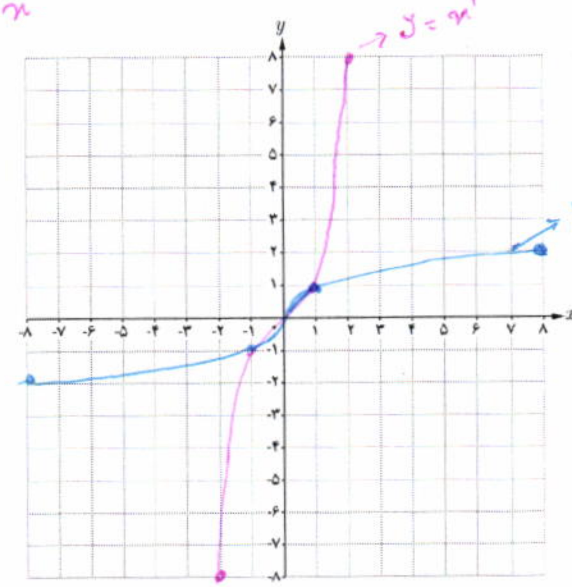
آیا تابع $f(x) = x^۳$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x) = x^۳$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطهٔ تابع وارون چیست؟

بله

$y = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = y$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$



$y = \sqrt[3]{x}$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = \mathbb{R}$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

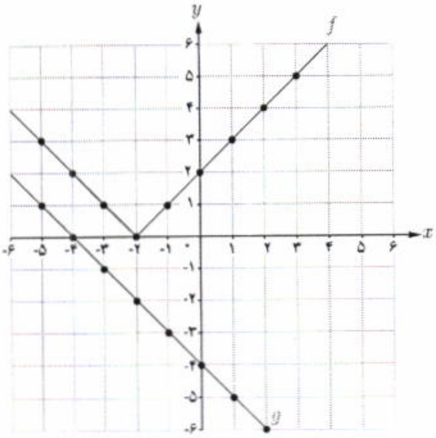
$R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$x_1^3 = x_2^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} x_1 = x_2$

پس این تابع یک به یک است

۱ــ توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجهٔ دوم، $\sqrt{ax+b}$، $x^۳$ و $\sqrt[3]{x}$ است. رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.



۸ با توجه به نمودارهای توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-1) = f(-3) = 1$

ب) $(gof)(0) = g(2) = 4$

پ) $(fog)(1) = f(3) = 5$

ت) $(gof)(-1) = g(1) = -5$

$gof(4)$ وجود ندارد شما سیه است

۹ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x-5 \quad , \quad g(x) = x^2-3x+8 : (fog)(x) = 7$

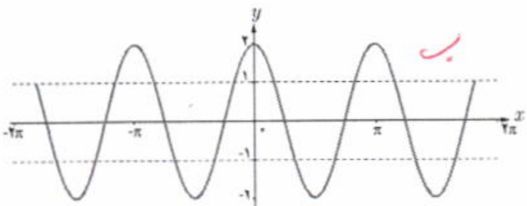
$2(x^2-3x+8)-5=7 \Rightarrow 2x^2-6x+4=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \quad (x-1)(x-2)=0 < \begin{matrix} x=1 \\ x=2 \end{matrix}$

ب) $f(x) = 3x^2+x-1 \quad , \quad g(x) = 1-2x \quad : (gof)(x) = -5$

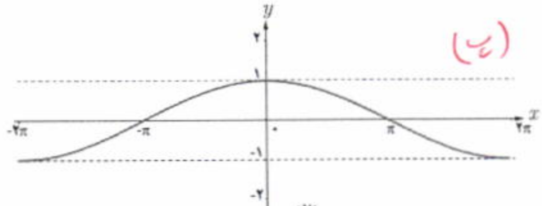
$1-2(3x^2+x-1)=-5 \Rightarrow -6x^2-2x+8=0 \xrightarrow{\div -2} 3x^2+x-4=0$ *

۱۰ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

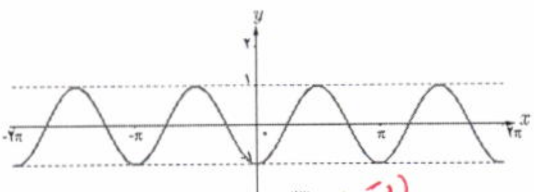
الف) $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x)$ (۴) ب) $y=2\cos 2x$ (۱) پ) $y=\cos(\frac{1}{2}x)$ (۲) ت) $y=-\cos 2x$ (۳)



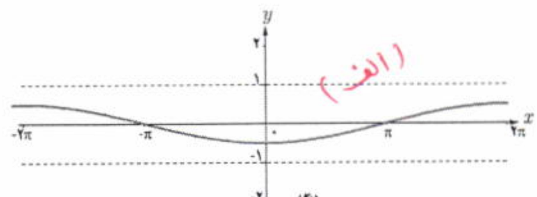
(۱) ب



(۲) (پ)

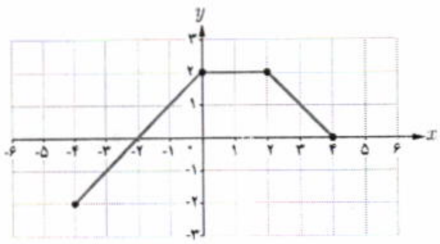


(۳) (ت)



(۴) (الف)

۱۱ نمودار توابع $y=-\sin 2x - 1$ و $y=2\sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.



۱۲ با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

الف) $y=\frac{1}{2}f(2x)-1$

ب) $y=-f(-x)+2$

پ) $y=2f(x-1)-3$

ت) $y=2f(\frac{1}{2}x)$

ادامه سوال ۹ قسمت ب

$\Delta = (1)^2-4(3)(-4) = 1+48 = 49$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{49}}{2(3)} = \frac{-1+7}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2(3)} = \frac{-1-7}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$

درس سوم

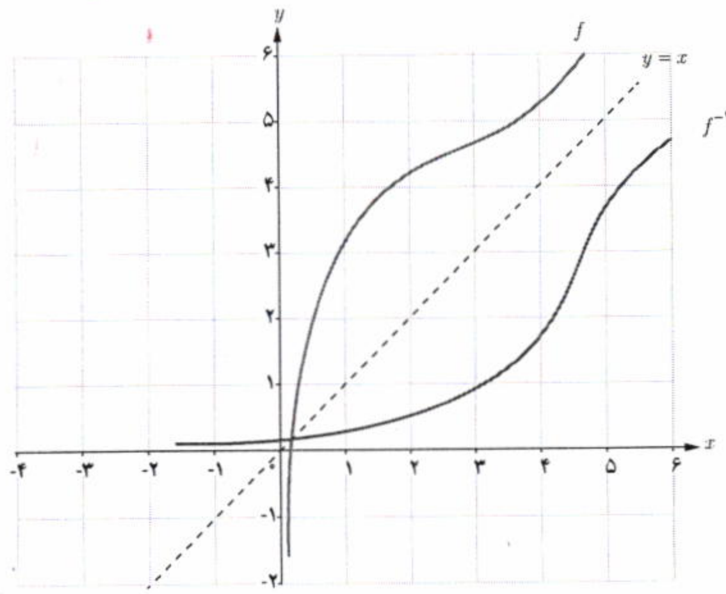
تابع وارون

یادآوری

همان‌طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک‌به‌یک f، تابعی جدید به‌دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ $(a\,,b)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ $(b\,,a)$ روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس:

$$(a\,,b)\in f \Leftrightarrow (b\,,a)\in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اوّل و سوم) قرینه‌اند.



مثال:

اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ آن‌گاه:

$$f^{-1}=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(fof^{-1})(۴)=f(f^{-1}(۴))=f(۱)=۴\\(fof^{-1})(۳)=f(f^{-1}(۳))=f(۲)=۳\\(fof^{-1})(۵)=f(f^{-1}(۵))=f(۳)=۵\end{cases} \rightarrow\ fof^{-1}=\{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f^{-1} داریم:

$$(fof^{-1})(x)=x$$

۲۹|۲

۴) ب) $g(x) = -x^2 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = -x^2 & x \geq 0 \to [0, +\infty) \\ \text{یا} \\ g(x) = -x^2 & x \leq 0 \to (-\infty, 0] \end{cases}$

پ) $h(x) = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow h(x) = (x+2)^2 - 1$, $x = -2$

یا $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2(1)} = -2$

$$\begin{cases} h(x) = x^2 + 4x + 3 & x \leq -2 & (-\infty, -2] \\ \text{یا} \\ h(x) = x^2 + 4x + 3 & x \geq -2 & [-2, +\infty) \end{cases}$$

بازه‌های نوشته شده بزرگترین بازه برای یک به یک بودن توابع است می‌توان زیرمجموعه‌ای از هرکدام از این بازه‌ها را نیز به عنوان دامنه معرفی کنید.

---

۵) از روی نمودار

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	-4	-2	2	3

$\Leftarrow$

x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$	-3	-1	1	3

$$(x, y) \in f(x) \Rightarrow (y, x) \in f^{-1}(x)$$

---

۶) $f(x) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1$

$R_f = [1, +\infty)$

دامنه باید مجموعه‌ها $[2, +\infty)$ یا $(-\infty, 2]$ یا زیرمجموعه‌هایی از این دو مجموعه باشند.

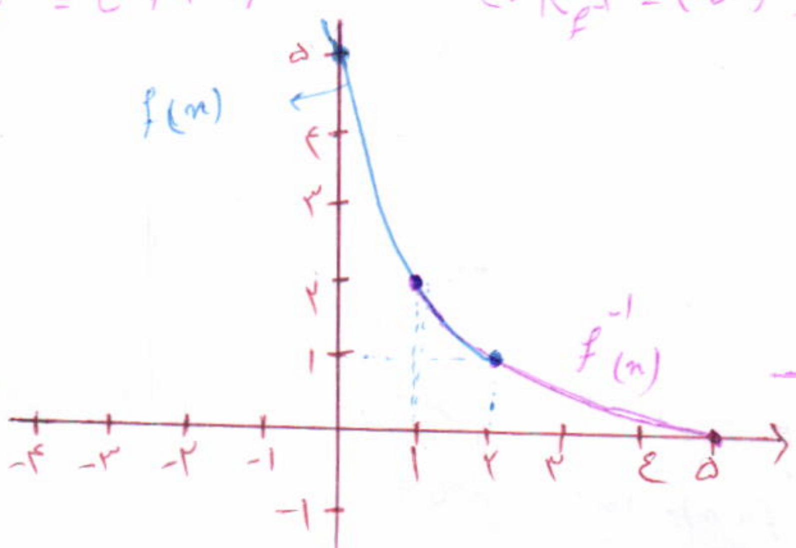
$y = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = (x-2)^2 \Rightarrow \pm\sqrt{y-1} = x - 2 \Rightarrow$

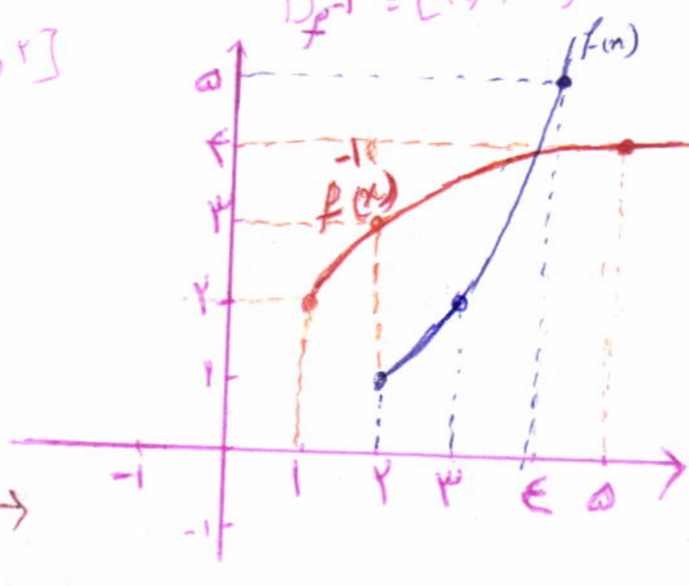
$$x = \pm\sqrt{y-1} + 2 \quad \begin{cases} \xrightarrow{x \geq 2} & y = +\sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow ①\ f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2 \\ \xrightarrow{x \leq 2} & y = -\sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow ②\ f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1} + 2 \end{cases}$$

① $R_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

② $R_{f^{-1}} = (-\infty, 2]$

$D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$





۲۹/۱

تمرین های صفحه ۲۹ فصل یک کتاب ریاضی(۳)

۱) الف) $f(x)=\frac{-8x+3}{2} \Rightarrow y=\frac{-8x+3}{2} \Rightarrow 2y=-8x+3 \Rightarrow 2y-3=-8x$

$\frac{2y-3}{-8}=x \Rightarrow \frac{-2y+3}{8}=x \Rightarrow \frac{-2x+3}{8}=y \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-2x+3}{8}$

ب) $g(x)=-5-\sqrt{3x+1} \Rightarrow y=-5-\sqrt{3x+1} \Rightarrow y+5=-\sqrt{3x+1} \Rightarrow$

$(y+5)^2=(-\sqrt{3x+1})^2 \Rightarrow (y+5)^2=3x+1 \Rightarrow (y+5)^2-1=3x \Rightarrow$

$\frac{(y+5)^2-1}{3}=x \Rightarrow \frac{(x+5)^2-1}{3}=\cancel{x}y \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{(x+5)^2-1}{3}$

گروه ریاضی دوره دوم استان خوزستان

۲) الف) $f(x)=-\frac{7}{2}x-3 \quad , \quad g(x)=-\frac{2x+6}{7}$

$f\circ g(x)=f(g(x))=-\frac{7}{2}\left(-\frac{2x+6}{7}\right)-3=x+3-3=x$

$g\circ f(x)=g(f(x))=-\frac{2\left(-\frac{7}{2}x-3\right)+6}{7}=-\frac{-7x-6+6}{7}=x$

$g\circ f(x)=f\circ g(x)=x \Rightarrow$ f و g وارون یکدیگرند

ب) $f(x)=-\sqrt{x-8} \qquad g(x)=8+x^2 \quad x\leq 0$

$f\circ g(x)=f(g(x))=-\sqrt{(8+x^2)-8}=-\sqrt{x^2}=-\underbrace{|x|}_{x\leq 0}=-(-x)=x$

$g\circ f(x)=g(f(x))=8+\left(-\sqrt{x-8}\right)^2=8+x-8=x$

$g\circ f(x)=f\circ g(x)=x \Rightarrow$ f و g وارون یکدیگرند

۳) $f(x)=\frac{9}{5}x+32 \Rightarrow y=\frac{9}{5}x+32 \Rightarrow y-32=\frac{9}{5}x \Rightarrow$

$(y-32)\frac{5}{9}=x \Rightarrow \frac{5}{9}y-\frac{160}{9}=x \Rightarrow \frac{5}{9}x-\frac{160}{9}=y \Rightarrow$

$f^{-1}(x)=\frac{5}{9}x-\frac{160}{9}$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(x)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می کند

۴) الف) $f(x)=|x| \Rightarrow \begin{cases} f(x)=|x| & x\geq 0 \\ f(x)=|x| & x\leq 0 \end{cases}$

(ب) $g^{-1}\circ f^{-1}(۵) = g^{-1}(f^{-1}(۵)) = g^{-1}(۶۴) = ۴$

$f(x)=۵ \Rightarrow \frac{۱}{۸}x-۳=۵ \Rightarrow \frac{۱}{۸}x=۸ \Rightarrow x=۶۴ \Rightarrow f^{-1}(۵)=۶۴$

$g(x)=۶۴ \Rightarrow x^{۳}=۶۴ \Rightarrow x=۴$

روش دوم (الف) $f\circ g(x)=\frac{۱}{۸}x^{۳}-۳ \Rightarrow y=\frac{۱}{۸}x^{۳}-۳ \Rightarrow y+۳=\frac{۱}{۸}x^{۳} \Rightarrow$

$۸y+۲۴=x^{۳} \Rightarrow \sqrt[۳]{۸y+۲۴}=x \Rightarrow \sqrt[۳]{۸x+۲۴}=y \Rightarrow (f\circ g)^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴}$

عکاس : بختیار رنجبری

روستای رهلی داغلار ــ آذربایجان شرقی

ادامه الف $\Rightarrow (f\circ g)^{-1}(۵)=\sqrt{۸(۵)+۲۴}=\sqrt{۶۴}=۴$

(ب) $f^{-1}(x)=۸x+۲۴$ $\quad f^{-1}\circ f^{-1}(x)=۸(۸x+۲۴)+۲۴=۶۴x+۲۱۶$

$f^{-1}\circ f^{-1}(۶)=۶۴(۶)+۲۱۶=۳۸۴+۲۱۶=۶۰۰$

(پ) $g(x)=x^{۳} \Rightarrow y=x^{۳} \Rightarrow \sqrt[۳]{y}=x \Rightarrow \sqrt[۳]{x}=y$

$g^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x}$, $f^{-1}(x)=۸x+۲۴$

$g^{-1}\circ f^{-1}(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=\sqrt[۳]{۸x+۲۴} \Rightarrow g^{-1}\circ f^{-1}(۵)=\sqrt[۳]{۸(۵)+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

$f\circ g^{-1}(x)=g^{-1}\circ f^{-1}(x)$

از این تمرین نتیجه می گیریم

تمرین

۱) ضابطهٔ تابع وارون توابع یک‌به‌یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

۲) در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳ \quad , \quad g(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸} \quad , \quad g(x)=۸+x^۲ \; ; x\leq ۰$

۳) رابطهٔ بین درجهٔ سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به‌صورت $f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ است که در آن x میزان درجهٔ سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجهٔ فارنهایت است. $f^{-۱}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

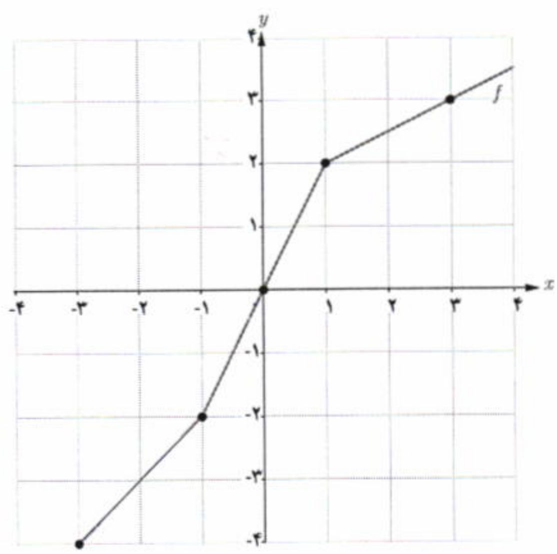
۴) توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنهٔ آنها به دو روش متفاوت توابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف) $f(x)=|x|$

ب) $g(x)=-x^۲$

پ) $h(x)=x^۲+۴x+۳$

۵) از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	...	...	...	...

۶) با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲-۴x+۵$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

$y=\frac{۱}{۸}x-۳ \Rightarrow y+۳=\frac{۱}{۸}x \Rightarrow ۸y+۲۴=x \Rightarrow ۸x+۲۴=y \Rightarrow f^{-۱}(x)=۸x+۲۴$

۷) اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

۲ روش حل می‌شود

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$ ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$ پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

روش اول

الف) $fog^{-۱}(۵) \Rightarrow fog(x)=۵ \qquad \frac{۱}{۸}x^۳-۳=۵ \Rightarrow \frac{۱}{۸}x^۳=۸ \Rightarrow x^۳=۶۴ \Rightarrow x=۴$

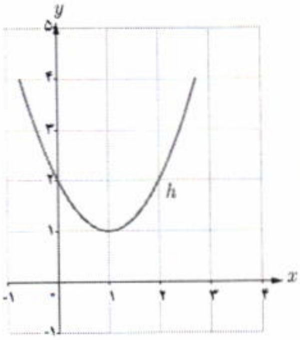
$fog^{-۱}(۵)=۴$

ب) $f^{-۱}of^{-۱}(۶)=f^{-۱}(f^{-۱}(۶))=f^{-۱}(۷۲)=۶۰۰$

بقیه صفحه بعد

$f(x)=۶ \Rightarrow \frac{۱}{۸}x-۳=۶ \Rightarrow \frac{۱}{۸}x=۹ \Rightarrow x=۷۲ \Rightarrow f^{-۱}(۶)=۷۲$

$f(x)=۷۲ \quad \frac{۱}{۸}x-۳=۷۲ \Rightarrow \frac{۱}{۸}x=۷۵ \Rightarrow x=۶۰۰$



مثال : نمودار تابع $h(x) = x^2 - 2x + 2$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

$h(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$

مثلاً دامنهٔ تابع h را به بازهٔ $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع h مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع k بازهٔ $[1, +\infty)$ است.

در تابع k، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم :

$k(x) = (x-1)^2 + 1$

$y = (x-1)^2 + 1$

$(x-1)^2 = y - 1$

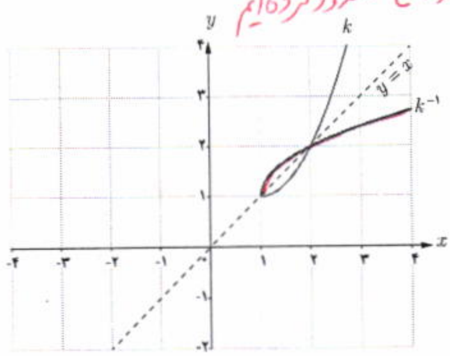
$x - 1 = \pm\sqrt{y-1}$

$x = \pm\sqrt{y-1} + 1$

$k^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$

جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟) چون دامنه h را به بازهٔ $[1, +\infty)$ محدود کرده‌ایم

نمودار توابع k و k^{-1} به‌صورت زیر است :



باغ ارم شیراز

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x+3}$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ f^{-1} را نیز به‌دست آورید.
تابع f یک‌به‌یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f = [-3, +\infty) \\ R_f = [0, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [-3, +\infty) \end{cases}$$

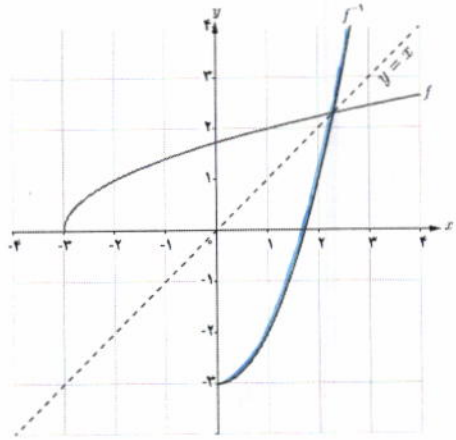
$y=\sqrt{x+3}$

$y^2 = x+3$

$x = y^2 - 3$

$f^{-1}(y) = y^2 - 3$

$f^{-1}(x) = x^2 - 3$



$* \; D_{g^{-1}} = [1, +\infty)$

$R_{g^{-1}} = [2, +\infty)$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

کار در کلاس

$D_f = R_f = \mathbb{R}$

ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

الف) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ $\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}x \xrightarrow{\times -2} -2y + 6 = x \Rightarrow -2x + 6 = y \Rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 6$

$D_g = [2, +\infty)$ ، $R_g = [1, +\infty)$ ؛ ب) $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ $\Rightarrow y = 1 + \sqrt{x-2} \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x-2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (y-1)^2 = x - 2 \Rightarrow (y-1)^2 + 2 = x \Rightarrow (x-1)^2 + 2 = y \Rightarrow g^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2$ *

$R_h = [1, +\infty)$ ؛ پ) $h(x) = x^2 + 1$

دامنه h را $[0, +\infty)$ یا $[-\infty, 0]$

$y = x^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^2 \xrightarrow{x \geq 0} \sqrt{y-1} = x \Rightarrow \sqrt{x-1} = y$ ، $h^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ $\begin{cases} D = [1, +\infty) \\ R_{h^{-1}} = [0, +\infty) \end{cases}$

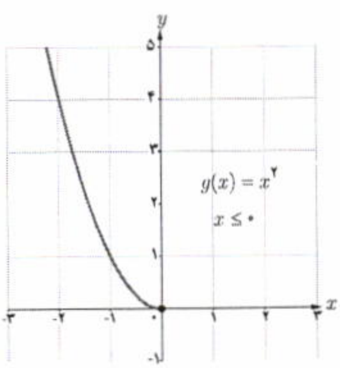
$\xrightarrow{x \leq 0} -\sqrt{y-1} = x \Rightarrow -\sqrt{x-1} = y$ ، $h^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$

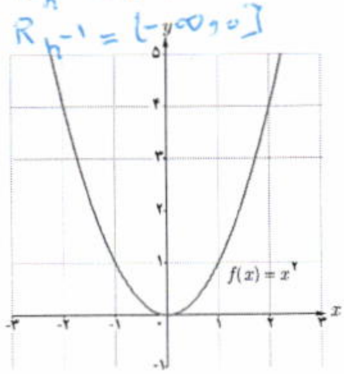
محدود کردن دامنه تابع

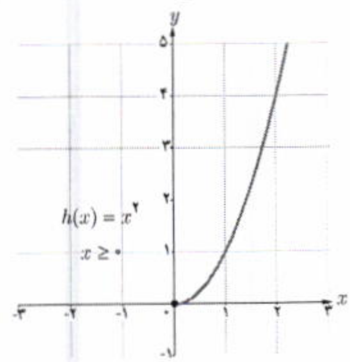
از سال قبل می‌دانیم که اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می‌توان تابعی یک‌به‌یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^2$ یک‌به‌یک نیست ولی با محدود کردن دامنهٔ تابع به بازهٔ $[0, +\infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ یا زیرمجموعه‌هایی از این دو بازه، تابعی یک‌به‌یک به‌دست می‌آید.

$D_{h^{-1}} = [1, +\infty)$

$R_{h^{-1}} = [-\infty, 0]$

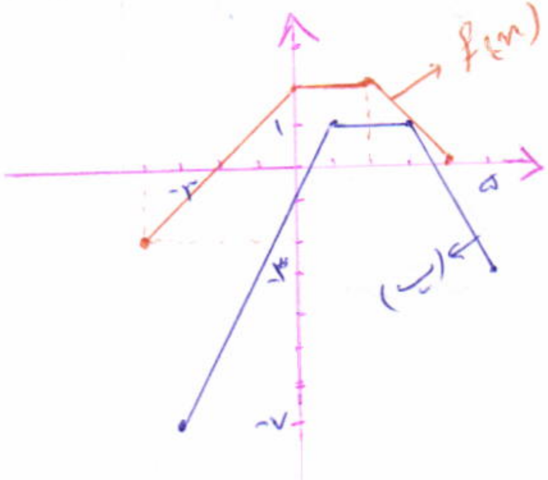






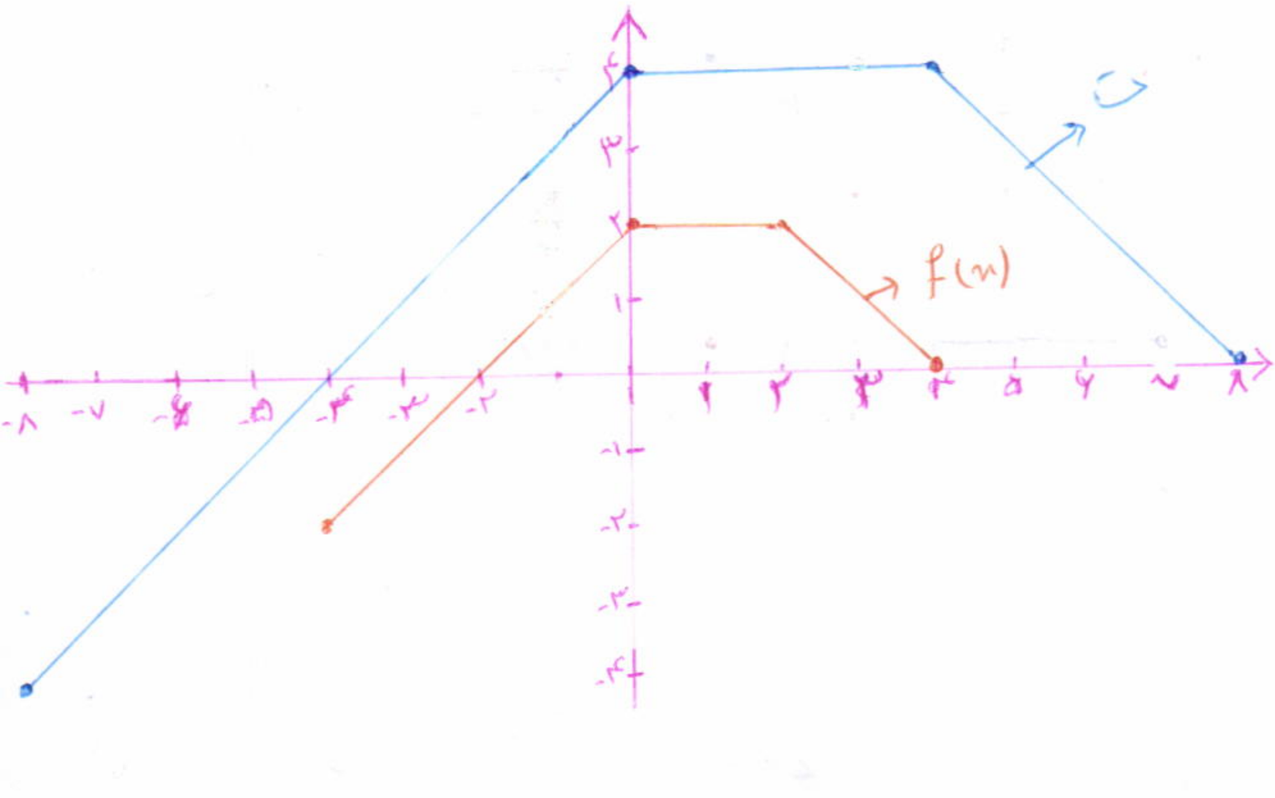
ب) $y = 2f(x-1) - 3$

$$y = \begin{cases} 2[-(x-1)+4] - 3 = -2x+7 & 3 \le x \le 5 \Leftarrow 2 \le x-1 \le 4 \\ 2(2) - 3 = 1 & 1 \le x < 3 \Leftarrow 0 < x-1 < 2 \\ 2((x-1)+2) - 3 = 2x-1 & -3 \le x \le 1 \Leftarrow -4 \le x-1 \le 0 \end{cases}$$



پ) $y = 2f(\frac{1}{2}x)$

$$y = \begin{cases} 2(-\frac{1}{2}x + 4) = -x+8 & 4 \le x \le 8 \Leftarrow 2 \le \frac{1}{2}x \le 4 \\ 2(2) = 4 & 0 \le x < 4 \Leftarrow 0 \le \frac{1}{2}x \le 2 \\ 2(+\frac{1}{2}x + 2) = x+4 & -8 \le x \le 0 \quad -4 \le \frac{1}{2}x \le 0 \end{cases}$$

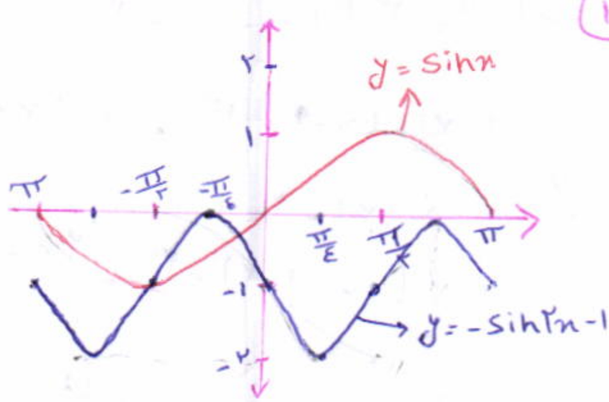


۲۳/۴

۱۱

$y = -\sin 2x - 1 \qquad [-\pi, \pi]$

$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
-1	-2	-1	0	-1	-2	-1	0	-1

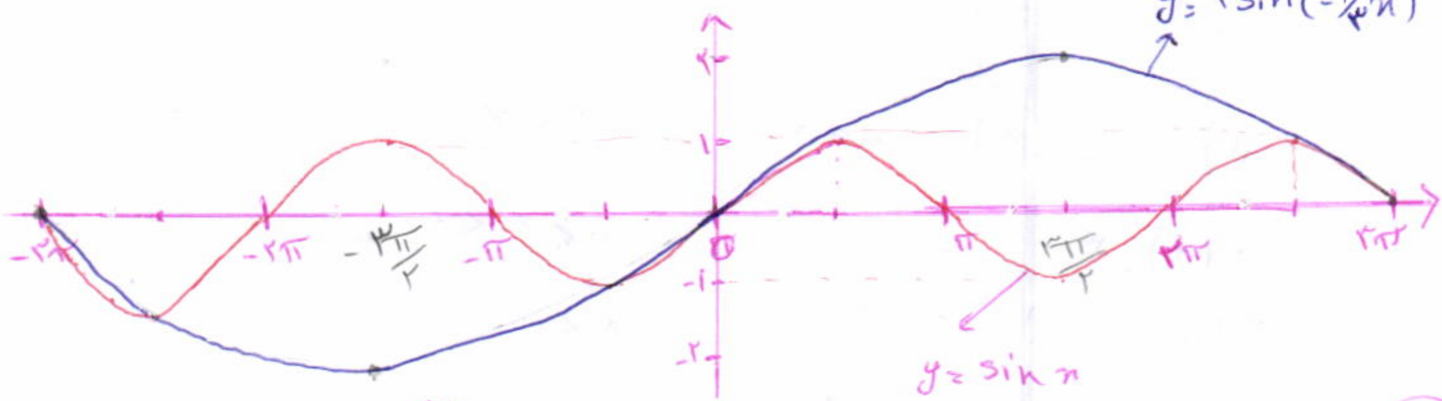


گروه ریاضی دوره‌ی دوم

استان خوزستان

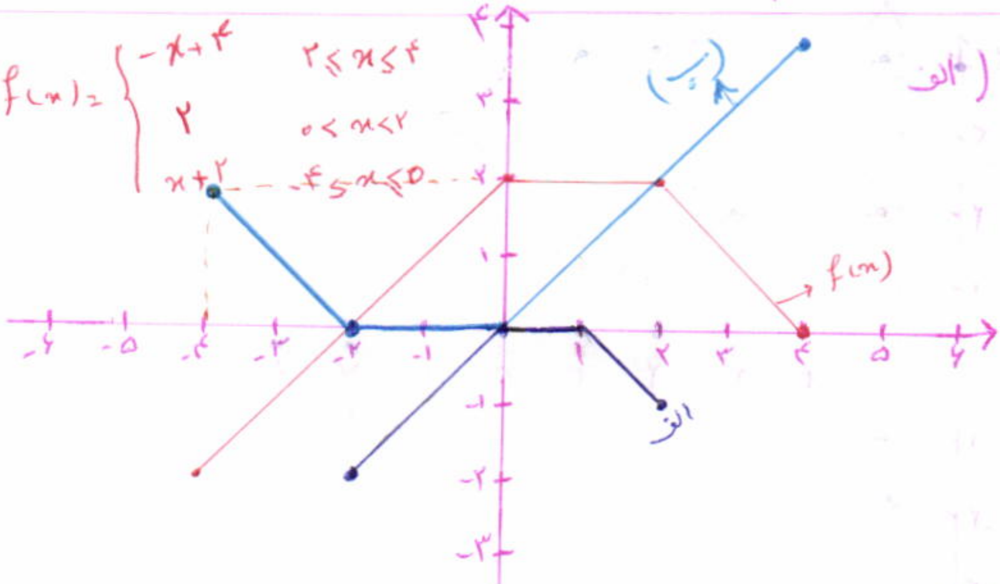
$y = 2\sin(-\frac{1}{3}x)$

x	-3π	$-\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π
$y = 2\sin(-\frac{1}{3}x)$	0	-2	0	2	0



۱۲

$$f(x) = \begin{cases} -x+4 & 2 \le x \le 4 \\ 2 & 0 < x < 2 \\ x+2 & -4 \le x \le 0 \end{cases}$$



الف) $y = \frac{1}{2} f(2x) - 1$

$\frac{1}{2}(-2x+4) - 1$

$$y = \begin{cases} -x+1 & 1 \le x \le 2 \Leftarrow 2 \le 2x \le 4 \\ 1 & 0 < x < 1 \Leftarrow 0 < 2x < 2 \\ x & -2 \le x \le 0 \Leftarrow -4 \le 2x \le 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}(2x+2) - 1$

ب) $y = -f(-x) + 2$

$$y = \begin{cases} -(-(-x)+4)+2 = -x-2 & -4 \le x \le -2 \Leftarrow 2 \le -x \le 4 \\ -(2)+2 = 0 & -2 < x < 0 \Leftarrow 0 < -x < 2 \\ -(-x+2)+2 = x & 0 \le x \le 4 \Leftarrow -4 \le -x \le 0 \end{cases}$$