

درس ۳

هم‌نهستی در اعداد صحیح و کاربردها

فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقی مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی مانده‌ها را نماینده یک مجموعه از اعداد در نظر بگیریم که باقی مانده تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد، داریم:

(مجموعه اعدادی را که باقی مانده تقسیم آنها بر عدد m ، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم)

$$A_0 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots, 16, \dots\} = [0]_4$$

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 1\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, \dots, 13, \dots, 21, \dots\} = [1]_4$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 2\} = \{\dots, -6, \dots, 2, 6, 10, \dots\} = [2]_4$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 3\} = \{\dots, -13, \dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} = [3]_4$$

- ۱ دو عضو دلخواه از مجموعه A را در نظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟
- ۲ از مجموعه A_1 دو عضو دلخواه را در نظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟
- ۳ نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلی برای هر دو عضو دلخواه از A_1 اثبات کنید.

$$a, b \in A_1 \Rightarrow \begin{cases} a = 4k_1 + 1 \\ b = 4k_2 + 1 \end{cases} \rightarrow a - b = (4k_1 + 1) - (4k_2 + 1)$$

$$\Rightarrow a - b = 4(k_1 - k_2) \Rightarrow 4 \mid a - b$$

- ۴ آیا درست است که بگویم اعضای مجموعه A_4 همگی بر عدد ۴، باقی مانده یکسان دارند؟ در مورد مجموعه A_3 چه می‌توان گفت؟ همگی بر عدد ۴ دارای باقیمانده یکسان ۳ هستند می‌دانیم مجموعه‌های A_0, A_1, A_2, A_3 یک افراز برای مجموعه \mathbb{Z} هستند و بنابراین هر دو عدد صحیح، مانند a و b ، یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند و یا هر کدام در یک مجموعه

$$۴ - ۸ = -۴ = ۴ \times (-۱)$$

$$\begin{aligned} a &= ۴k_1 \\ b &= ۴k_p \end{aligned} \Rightarrow a - b = ۴k_1 - ۴k_p = ۴(k_1 - k_p) = ۴k_p \Rightarrow ۴ \mid a - b$$

سوال ۱:

$$۵ - ۱۳ = -۸ = ۴ \times (-۲)$$

$$\begin{aligned} a &= ۴k_1 + ۱ \\ b &= ۴k_p + ۱ \end{aligned} \Rightarrow a - b = ۴k_1 \cancel{+ ۱} - ۴k_p \cancel{+ ۱} = ۴(k_1 - k_p) = ۴k_p \Rightarrow ۴ \mid a - b$$

سوال ۲:

واقع اند (A_1, A_2, A_3, A_4) اشتراکی با هم ندارند. چرا؟ و لذا اگر a و b هر دو در یک مجموعه از این چهار مجموعه باشند (باقی مانده تقسیم a بر b مساوی باشد یا اصطلاحاً a بر b 4 هم باقی مانده باشند) همواره $a - b$ بر 4 و اگر این طور نباشد $4 \nmid a - b$.

تعریف: برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b ، اگر $m \mid a - b$ ، می‌گوییم « a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانه m »؛ و می‌نویسیم $a \equiv b \pmod{m}$. تعریف رابطه هم‌نهشتی به پیمانه m ، به زبان ریاضی عبارت است از:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b \quad (m \in \mathbb{N})$$

مثال:
$$\begin{cases} ۱۲ \equiv ۲ \pmod{۵}, -۱۱ \equiv ۱ \pmod{۶} \\ -۲۹۵ \equiv -۵ \pmod{۱۰}, ۲۳ \equiv -۷ \pmod{۳} \end{cases}$$

قرارداد: مجموعه همه اعداد صحیح که باقی‌مانده تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی $A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$ را کلاس یا دسته هم‌نهشتی r به پیمانه m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم. برای استفاده از رابطه هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطه عاد کردن، ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی به‌راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + c \pmod{m} \\ a - c \equiv b - c \pmod{m} \end{cases}$$

ویژگی ۱: به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

اثبات:
$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid a + c - b - c$$

$$\Rightarrow m \mid (a + c) - (b + c) \Rightarrow (a + c) \equiv (b + c) \pmod{m}$$

مثال: با توجه به فعالیت قبل فرض کنیم، $۷ \equiv -۱ \pmod{۴}$ یا $(۷, -۱) \in A_۳$ در این صورت اگر ۵ واحد به دو طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم فاصله این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان ۸ که مضرب ۴ است باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، اعداد حاصل یعنی $۷ + ۵ = ۱۲$ و $-۱ + ۵ = ۴$ نیز در $A_۳$ قرار خواهند گرفت.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

ویژگی ۲: دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

اثبات:
$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a \cdot c - b \cdot c \Rightarrow m \mid c \cdot (a - b) \Rightarrow m \mid ac - bc$$

$$\Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

$$a \equiv b \Leftrightarrow a \pm c \equiv b \pm c$$

اثبات ویرگنی ۱:

$$a \equiv b \rightarrow m \mid a - b \rightarrow m \mid a + c - c - b \rightarrow m \mid (a + c) - (b + c) \rightarrow a + c \equiv b + c$$

$$a \equiv b \rightarrow m \mid a - b \rightarrow m \mid a - c + c - b \rightarrow m \mid (a - c) - (b - c) \rightarrow a - c \equiv b - c$$

$$a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc$$

اثبات ویرگنی ۲:

$$a \equiv b \rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{c \in \mathbb{Z}} m \mid c(a - b) \rightarrow m \mid ac - bc \rightarrow ac \equiv bc$$

$$ac \equiv bc \not\Rightarrow a \equiv b$$

قانون حذف در بهمنشی برقرار نیست

$$4 \times 2 \equiv 1 \times 2 \not\Rightarrow 4 \equiv 1$$

نکته ۲: اگر $ac \equiv bc$ در این صورت $a \equiv b$

نکته ۱: اگر $(m, c) = 1$, $ac \equiv bc$ آنگاه $a \equiv b$

تذکر: عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر $ac \equiv bc \pmod m$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \equiv b \pmod m$ (قانون حذف برای رابطه هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید.

$$a \equiv b \pmod m \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod m$$

ویژگی ۳: (دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند.) ($n \in \mathbb{N}$)

مثال: $(5 \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 5^3 \equiv 2^3 \pmod 3)$

اثبات: (از اتحاد $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم)

$$a \equiv b \pmod m \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow m \mid (a-b) \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})}_c \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod m$$

$$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod m$$

تذکر: می‌دانیم $5^2 \equiv 3^2 \pmod 4$ ولی $5 \not\equiv 3 \pmod 4$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که ...

طرفین یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان طبیعی دلخواه رساند ولی عکس این ویژگی الزاماً برقرار نیست

$$a \equiv b, c \equiv d \pmod m \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd \pmod m & (1) \\ a+c \equiv b+d \pmod m & (2) \\ a-c \equiv b-d \pmod m & (3) \end{cases}$$

ویژگی ۴: دو طرف دو رابطه هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا

در هم ضرب کرد.

$$(15 \equiv 10, 7 \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow 15 \times 7 \equiv 10 \times 2 \pmod 5, 15 \times 2 \equiv 10 \times 7 \pmod 5)$$

$$15 + 7 \equiv 10 + 2 \pmod 5 \Rightarrow 22 \equiv 12 \pmod 5$$

اثبات ①:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod m \Rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{\times c} m \mid ac - bc \\ c \equiv d \pmod m \Rightarrow m \mid c - d \xrightarrow{\times b} m \mid bc - db \end{array} \right\} + \Rightarrow m \mid (ac - bc) + (bc - db)$$

$$\Rightarrow m \mid ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd \pmod m$$

اثبات ② به عهده شما

تذکر مهم: اگر باقی‌مانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت $a \equiv r \pmod m$

$$a = mq + r \Rightarrow a \equiv r \pmod m$$

$$(179 = 11 \times 16 + 3 \Rightarrow 179 \equiv 3 \pmod{11})$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

اثبات ویرگی ۳:

از اتحاد $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{m \mid b \Rightarrow m \mid bc \ (c \in \mathbb{Z})} m \mid (a - b) \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})}_c \rightarrow m \mid a^n - b^n \rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

$$*) a^{p^{n+1}} + b^{p^{n+1}} = (a + b)(a^{p^n} - a^{p^{n-1}}b + \dots - ab^{p^{n-1}} + b^{p^n}) \Rightarrow a + b \mid a^{p^{n+1}} + b^{p^{n+1}}$$

$$**) a^{p^n} - b^{p^n} = (a^p)^n - (b^p)^n = (a^p - b^p) \left((a^p)^{n-1} + (a^p)^{n-2}b^p + \dots + a^p(b^p)^{n-2} + (b^p)^{n-1} \right)$$

$$\Rightarrow a^p - b^p \mid a^{p^n} - b^{p^n}$$

گروه تلگرامی فقط گسسته

اثبات ویرگنی ۴:

$$a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d \\ a - c \equiv b - d \end{cases}$$

$$a \equiv b \xrightarrow{m} m \mid a - b \xrightarrow{c \in \mathbb{Z}} m \mid c(a - b) \rightarrow m \mid ac - bc$$

$$c \equiv d \xrightarrow{m} m \mid c - d \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} m \mid b(c - d) \rightarrow m \mid bc - bd$$

$$\xrightarrow{a \mid b, a \mid c \rightarrow a \mid b + c} m \mid ac - \cancel{bc} + \cancel{bc} - bd \rightarrow m \mid ac - bd \rightarrow ac \equiv bd$$

$$\begin{aligned} a \equiv b &\xrightarrow{m} m \mid a - b \\ &\Rightarrow m \mid (a - b) + (c - d) \rightarrow m \mid (a + c) - (b + d) \rightarrow a + c \equiv b + d \\ c \equiv d &\xrightarrow{m} m \mid c - d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \equiv b &\xrightarrow{m} m \mid a - b \\ &\Rightarrow m \mid (a - b) - (c - d) \rightarrow m \mid (a - c) - (b - d) \rightarrow a - c \equiv b - d \\ c \equiv d &\xrightarrow{m} m \mid c - d \end{aligned}$$

زهرا شمسی

مدیریت بررسی: استاد عربیار محمدی

اثبات :

$$a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m \mid a - r \Rightarrow a \equiv r \pmod{m}$$

نتیجه ۱ : هرگاه بخواهیم کوچک ترین عدد نامنفی و هم نهشت با عدد a به پیمانه m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی مانده را به دست آوریم.

مثال: $296 \equiv ? \pmod{11} \rightarrow \dots \quad 296 = 11 \times 26 + 10 \rightarrow 296 \equiv 10 \pmod{11}$

نتیجه ۲ : اگر دو عدد a و b تقسیم بر عدد طبیعی m ، هم باقی مانده باشند در این صورت $a \equiv b \pmod{m}$.
مثال : باقی مانده تقسیم عدد $A = (27)^7 + 19$ را بر ۱۳ بیابید.

$$27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (27)^7 \equiv 1^7 \pmod{13} = 1 \quad \text{و} \quad 19 = 13 \times 1 + 6$$

$$\Rightarrow \underbrace{19}_{\equiv 6} \xrightarrow{\text{با توجه به ① و ②}} (27)^7 + 19 \equiv 1 + 6 \xrightarrow{\text{با توجه به ①}} A \equiv 7 \pmod{13} \Rightarrow r = 7$$

پس باقی مانده A بر ۱۳، برابر با ۷ می باشد.

مثال : باقی مانده تقسیم عدد $A = (1000)^{13} \times 12 + 10$ را بر ۷ بیابید.

$$1000 = 7 \times 142 + 6 \Rightarrow 1000 \equiv 6 \pmod{7} \quad \text{و} \quad 6 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 1000 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \equiv (-1)^{13} = -1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 \equiv (-1) \times 12 = -12 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv (-12) + 10 = -2 \pmod{7} \quad \text{و} \quad -2 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^{13} \times 12 + 10 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow r = 5$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + mt \equiv b + mk \\ a - mt \equiv b - mk \end{cases}$$

ویژگی ۵ : می توان به دو طرف یا یک طرف یک رابطه هم نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

طبق فرض: $a \equiv b \pmod{m}$ \pm $\Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk \pmod{m}$
می دانیم: $mt \equiv mk \pmod{m}$

مثال : می دانیم $7 \equiv 2 \pmod{5}$ اگر به سمت چپ رابطه $3 \times 5 = 15$ و به سمت راست آن $5 \times 5 = 25$ واحد اضافه کنیم خواهیم داشت $7 + 15 \equiv 2 + 25 \pmod{5}$ یا $22 \equiv 27 \pmod{5}$ که این رابطه برقرار است.

$$ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

ویژگی ۶: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم‌نهشتی را بر م‌م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم. (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)

نتیجه مهم: اگر $ac \equiv bc$ و $(c, m) = 1$ در این صورت $a \equiv b \pmod{m}$ در واقع قاعده حذف در هم‌نهشتی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

مثال: واضح است که $4 \times 6 \equiv 4 \times 3 \pmod{3}$ و چون $(4, 3) = 1$ پس $6 \equiv 3 \pmod{3}$.

فعالیت

همان‌طور که در دوره ابتدایی آموختید عددنویسی در مبنای 10 انجام می‌شود؛ که در آن ارزش مکانی ارقام، ده تا ده تا در نظر گرفته می‌شود (ده تا یکی می‌شود ده تا و ده تا ده تا تایی می‌شود صد تا و ده تا صد تایی می‌شود هزار تا و ...). بنابراین به راحتی می‌توانیم هر عدد را در مبنای ده بسط بدهیم. به عنوان مثال عدد 1397 را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$1397 = 1 \times 1000 + 3 \times 100 + 9 \times 10 + 7$$

$$\Rightarrow 1397 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10 + 7$$

۱ هر یک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط بدهید:

$$1388109 = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 0 \times 10 + 9$$

$$13571122 = 1 \times 10^7 + 3 \times 10^6 + 5 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 2$$

۲ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1358112$ را بر عدد 9 بیابید.

می‌دانیم $10 \equiv 1 \pmod{9}$ و بنابر ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی $10^n \equiv 1 \pmod{9}$ بنابراین: $5 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 1 \times 10^2$

$$A = 1 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + \dots + \dots + \dots + 1 \times 10 + 2$$

$$10^6 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 1 \times 10^6 \equiv 1$$

$$10^5 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 3 \times 10^5 \equiv 3$$

$$10^4 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow \dots \equiv \dots \quad 5 \times 10^4 \equiv 5$$

$$10^3 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 8 \times 10^3 \equiv 8$$

$$10^2 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 1 \times 10^2 \equiv 1$$

$$10 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 1 \times 10 \equiv 1$$

$$2 \equiv 2$$

$$A \equiv 1 + 3 + 5 + 8 + 1 + 1 + 2$$

با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها داریم:

باقی مانده تقسیم بر ۴: میدانیم $10^p \equiv 0 \xrightarrow{n \geq p} 10^n \equiv 0$ و $10 \equiv 2$

$$A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0} = \underbrace{10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \dots + 10^1a_1 + 10^0a_0}_{10^p \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_p} + a_1a_0} \equiv a_1a_0$$

پس باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۴ برابر است با باقیمانده دو رقم سمت راست آن عدد بر ۴

** باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۴، برابر باقیمانده $a_1a_0 \equiv 2a_1 + a_0$ تقسیم رقم یکان به علاوه دو برابر رقم $\overline{a_1a_0} = \underbrace{10a_1}_{10a_1 = 8a_1 + 2a_1} + a_0 \equiv 2a_1 + a_0$ است.

دو مکان آن عدد بر ۴

باقی مانده تقسیم بر ۸؛ میداریم گروه تلگرامی فقط گسسته

مدیر گروه: استاد ایمانلو

$$10 \equiv 2 \pmod{8} \quad 100 = 12 \times 8 + 4 \rightarrow 10^2 \equiv 4 \pmod{8} \quad 10^2 \equiv 4 \xrightarrow{\times 10} 10^3 \equiv 4 \cdot 0 \equiv 0 \pmod{8} \quad \xrightarrow{n \geq 3} 10^n \equiv 0 \pmod{8}$$

$$A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} = \underbrace{10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0}_{10^3 \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3}} + \underbrace{10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0}_{a_2 a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod{8}$$

پس باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۸ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع چهار رقم صدگان و دو برابر رقم دهگان و رقم یکان آن عدد بر ۸

$$\overline{a_2 a_1 a_0} = 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 \equiv 4a_2 + 2a_1 + a_0 \pmod{8}$$

زهرا شمسى

مدیریت بررسی: استاد عربیار محمدی

باقی ماندہ تقسیم بر ۶:

$$10 \equiv 4 \pmod{6} \quad 100 = 6 \times 16 + 4 \rightarrow 10^2 \equiv 4 \pmod{6} \rightarrow 10^n \equiv 4 \pmod{6}$$

$$A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0} = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \dots + 10^1a_1 + 10^0a_0 \equiv 4(a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1) + a_0 \pmod{6}$$

مثال:

$$13971355 \equiv 4(1+3+9+7+1+3+5) + 5 \equiv 4(29) + 5 \equiv 116 + 5 \equiv 121 \pmod{6}$$

گروه تلگرامی فقط گسسته
باقی مانده تقسیم بر ۷:

مدیر گروه: استاد ایمانلو

$$1 \equiv \mu \pmod{7} \quad | \dots = 7 \times | \mu + \mu \rightarrow | \dots \equiv \mu$$

$$| \dots \equiv \mu \xrightarrow{\times 10} | \dots \equiv \mu \equiv -1 \rightarrow | \dots \equiv (-1)^n$$

$$A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} = | \dots^{n-1} a_{n-1} + | \dots^{n-2} a_{n-2} + | \dots^{n-3} a_{n-3} + | \dots^{n-4} a_{n-4} + \dots + | \dots^1 a_1 + | \dots^0 a_0$$

$$\equiv \overline{a_{n-1} a_1 a_0} + | \dots^2 \overline{a_{n-2} a_2 a_0} + | \dots^3 \overline{a_{n-3} a_3 a_0} + \dots \equiv \overline{a_{n-1} a_1 a_0} - \overline{a_{n-2} a_2 a_0} + \overline{a_{n-3} a_3 a_0} - \dots$$

مثال:

$$13971355 \equiv 355 - 971 + 13 \equiv -603 \equiv -(600 + 10 + 3) \equiv -(6(\mu) + \mu + \mu) \equiv \mu$$

زهره شمسى
مدیریت بررسی: استاد عربیار محمدی

باقی ماندہ تقسیم بر ۱۳:

$$1000 = 76 \times 13 + 12 \rightarrow 10^3 \equiv -1$$

$$A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0} = |e^{n-1}a_{n-1} + |e^{n-2}a_{n-2} + |e^{n-3}a_{n-3} + |e^{n-4}a_{n-4} + \dots + |e^1a_1 + |e^0a_0$$

$$\equiv \overline{a_1a_0} + |e^2\overline{a_2a_1a_0} + |e^3\overline{a_3a_2a_1a_0} + \dots \equiv \overline{a_1a_0} - \overline{a_2a_1a_0} + \overline{a_3a_2a_1a_0} - \dots$$

$$\overline{13971355} \equiv \overline{355} - \overline{971} + \overline{13} \equiv -603 \equiv -(600 + 10 + 3) \equiv -(6(-4) - 10 + 3) \equiv 24 \equiv 11$$

اگر دقت کنید سمت راست هم نهشتیِ اخیر مجموع ارقام A است. بنابراین می‌توان گفت «باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

عدد n رقمی $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_2 a_1 a_0}$ را بسط دهید و در هم‌نهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان 10^k عدد ۱ را قرار دهید، سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلی بررسی کنید.

$$\begin{aligned} A &= 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + \dots + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 \\ &\Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0 \\ &\Rightarrow A \equiv \dots \end{aligned}$$

کار در کلاسی

۱ با توجه به اینکه $10^3 \equiv 1$ ، نتیجه می‌گیریم، $\forall k \in \mathbb{N}, 10^k \equiv 1$ ، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 5983248$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲ می‌دانیم که $10^1 \equiv -1$ ؛ بنابراین برای هر n زوج، $10^n \equiv 1$ و برای هر n فرد، $10^n \equiv -1$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانه ۱۱ و در بسط عدد $A = 4985327$ به جای توان‌های زوج عدد 10^k ، عدد یک و به جای توان‌های فرد عدد 10^k ، عدد (-1) قرار دهیم باقی‌مانده تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$\begin{aligned} A &= 4 \times 10^6 + 9 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + \dots + 2 \times 10^1 + 7 \\ &\Rightarrow A \equiv 4 \times 10^0 + 9 \times (-1) + 8 \times 10^0 + \dots + 2 \times (-1) + 7 \\ &\Rightarrow A \equiv 7 - 2 + 3 - 5 + 8 - 9 + 4 = 6 \Rightarrow r = 6 \end{aligned}$$

۳ می‌دانیم $10^2 \equiv 0$ و $10^5 \equiv 0$ و $10^8 \equiv 0$ در این صورت:

$$\forall k \in \mathbb{N}; 10^k \equiv 0 \text{ و } 10^k \equiv 0 \text{ و } 10^k \equiv 0$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A = \overline{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0}$ به جای توان‌های عدد 10^k (در هم‌نهشتی‌های به پیمانه ۲ و ۵ و 10^k) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A &= 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + a_0 \\ &\Rightarrow A \equiv 0 \times a_{n-1} + 0 \times a_{n-2} + \dots + 0 \times a_2 + 0 \times a_1 + a_0 \\ &\Rightarrow A \equiv a_0, A \equiv a_0, A \equiv a_0 \end{aligned}$$

نتیجه حاصل را برای یافتن باقی‌مانده تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و 10^k و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

$$598348 = 5 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 8$$

$$10^5 \equiv 1 \Rightarrow 5 \times 10^5 \equiv 5 \Rightarrow 5 \equiv 5$$

$$10^4 \equiv 1 \Rightarrow 9 \times 10^4 \equiv 9 \Rightarrow 9 \equiv 0$$

$$10^3 \equiv 1 \Rightarrow 8 \times 10^3 \equiv 8 \Rightarrow 8 \equiv 8$$

$$10^2 \equiv 1 \Rightarrow 3 \times 10^2 \equiv 3 \Rightarrow 3 \equiv 0$$

$$10 \equiv 1 \Rightarrow 4 \times 10 \equiv 4 \Rightarrow 4 \equiv 4$$

$$\underline{8 \equiv 8}$$

$$A \equiv 5 + 0 + 8 + 0 + 4 + 8 = 25 \Rightarrow 25 \equiv 5$$

باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۳ برابر است با باقی مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳

یکی از کاربردهای هم‌نهستی در تقویم‌نگاری و محاسبه روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده، مشخص شده است. به‌عنوان مثال: اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۲۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته خواهد بود؟ برای پاسخ دادن به سؤالاتی شبیه این سؤال فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

می‌دانیم هر روز از روزهای هفته، مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود. به‌عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این صورت $12+7=19$ فروردین و $19+7=26$ فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. در بحث تقویم و روزهای هفته دقت دارید که شش ماه اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال غیر از اسفند (که، به‌جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی ماه چند شنبه است؟ با توجه به مطالب مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز ... می‌رسیم.

حال اگر فاصله ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم ($19=28-9$) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون $19 \equiv 5^7$ لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول مقابل مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصله ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی $d=12+3 \times 30+29=131$

از طرفی $131 \equiv 0^7$ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ... پنجشنبه است، یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

۲ از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

معادله هم‌نهستی

تعریف: یک رابطه هم‌نهستی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \equiv b^m$ را یک معادله هم‌نهستی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادله هم‌نهستی پیدا کردن همه جواب‌هایی چون $x \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax \equiv b^m$. ($a, b \in \mathbb{Z}$)

۱- ۹ دی ماه روز بصیرت نام‌گذاری شده است.

معادله هم نهستی در حالت کلی بصورت $ax \equiv b \pmod{m}$ می باشد که شرط وجود جواب $(a, m) | b$

ویرگنی ثانی که در حل معادله هم نهستی مورد استفاده قرار می گیرد:

$$ac \equiv bc \pmod{m} \xrightarrow{(c, m) = d} a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a \pm mk \equiv b \pm mk'$$

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a - b = mk \rightarrow a = mk + b$$

به عنوان مثال، معادله $x \equiv 2 \pmod{3}$ را در نظر بگیرید. در این معادله x می تواند ۲ یا ۵ باشد. عدد بعدی که می تواند به جای x قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم تمام جواب های این معادله یا جواب های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف هم نهستی استفاده کنیم،

$$x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 3 \mid x - 2 \Rightarrow (x - 2) = 3k \Rightarrow x = 3k + 2$$

که اگر k را به ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب های $x_0 = 2$ و $x_0 = 5$ و $x_0 = 8$ را به دست می آوریم و برای هر $k \in \mathbb{Z}$ جوابی برای معادله به دست می آید. در معادله فوق ضریب x عدد یک است و اگر ضریب x عددی غیر از یک باشد برای دست یابی به جواب های عمومی معادله باید ضریب x را حذف کنیم که ویژگی های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می کنند. مثال: جواب های عمومی معادله $4x \equiv 17 \pmod{5}$ را به دست آورید.

$$4x \equiv 17 \pmod{5}, 17 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\begin{array}{l} \text{ویژگی ۵} \\ \Rightarrow 4x \equiv 2 + (2 \times 5) \end{array}$$

$$\Rightarrow 4x \equiv 12 \pmod{5} \Rightarrow \cancel{4}x \equiv \cancel{4} \times 3 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 3$$

$$(5 \mid x - 3) \Rightarrow x - 3 = 5k \Rightarrow x = 5k + 3$$

مثال: همه اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشند.

حل: اگر آن عدد را x فرض کنیم باید $7 \mid 3x - 13$ یا $3x \equiv 13 \pmod{7}$

$$3x \equiv 13 \pmod{7} \Rightarrow 3x \equiv 13 - 7 = 6 \pmod{7}$$

$$\begin{array}{l} (3, 7) = 1 \\ \Rightarrow \cancel{3}x \equiv \cancel{3} \times 2 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 2 \end{array}$$

قضیه: معادله هم نهستی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) \mid b$. این قضیه را بدون اثبات می پذیریم.

نتیجه: اگر $(a, m) = 1$ چون برای هر b ، همواره $b \mid b$ پس معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ همواره دارای جواب است.

مثال: معادله $6x \equiv 11 \pmod{9}$ دارای جواب نیست زیرا، $(6, 9) = 3$ و $3 \nmid 11$ و معادله $4x \equiv 18 \pmod{6}$ دارای جواب است. چرا؟

این معادله را حل کنید:

$$4x \equiv 18 \pmod{6} \Rightarrow 2 \times 2x \equiv 2 \times 9 \pmod{6}, (2, 6) = 2$$

$$\begin{array}{l} \text{ویژگی ۶} \\ \Rightarrow 2x \equiv 9 \pmod{6} \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 9 \pmod{6}$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 9 + 3 = 12 \pmod{6}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x \equiv \cancel{2} \times 6 \pmod{6} \Rightarrow x = 3k + 6$$

حل معادلات سیاله و کاربردهای آن

فعالیت

۱ آیا می‌توانید یک کیسه ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)
یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنه ۴ کیلویی و یک وزنه ۳ کیلویی است.

$$4 \times 4 + 1 \times 3 = 19$$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

$$1 \times 4 + 3 \times 5 = 19$$

در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادله $4x + 3y = 19$ هستید.

(x : تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به کار رفته و y : تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به کار رفته است)

۲ اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟

باید جواب‌هایی چون $x \in W$ و $y \in W$ بیابیم که $2x + 4y = 19$. چون مجموع دو عدد زوج همواره زوج است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

تعریف: هرگاه بخواهیم جواب‌های معادله $ax + by = c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $c \in \mathbb{Z}$ و b و a در این صورت معادله مذکور ($ax + by = c$) را یک معادله سیاله درجه اول یا خطی می‌نامیم.

تبدیل یک معادله سیاله به معادله هم‌نهستی

معادله سیاله $ax + by = c$ دارای دو مجهول است و به دو صورت می‌تواند به یک معادله هم‌نهستی (با مجهول x یا y) تبدیل

شود:

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = (-b)y \Rightarrow -b | ax - c \Rightarrow b | ax - c$$

$$\Rightarrow ax \equiv c \pmod{b} \quad (b > 0) \quad \text{یا} \quad ax \equiv c \pmod{-b} \quad (b < 0) \quad \text{یا} \quad ax \equiv c \pmod{|b|}$$

$$by \equiv c \pmod{-a} \quad \text{و} \quad by \equiv c \pmod{a}$$

و به طریق مشابه می‌توان نوشت:

تذکر: با توجه به قضیه قبل نتیجه می‌گیریم که «شرط لازم و کافی برای آنکه معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که، $c \in (a, b)$ »

کار در کلاس

۱ با تبدیل معادله سیاله $4x + 5y = 9$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله سیاله را بیابید.

$$\begin{aligned} 4x + 5y = 9 &\Rightarrow 4x \equiv 9 \pmod{5} \\ \Rightarrow 4x &\equiv 9 - 5 \cdot 1 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 4 \pmod{5} \\ \Rightarrow x &\equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 1 \\ \Rightarrow 4(5k + 1) + 5y &= 9 \\ \Rightarrow 20k + 4 + 5y &= 9 \\ \Rightarrow 20k + 5y &= 5 \\ \Rightarrow 4k + y = 1 &\Rightarrow y = -4k + 1 \end{aligned}$$

۲ در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد.

کافی است جواب‌های عمومی معادله $4x + 3y = 19$ را (برحسب k) بیابیم و به‌ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد حالت‌ها را شمارش کنیم:

$$\begin{aligned} 4x + 3y = 19 &\Rightarrow 4x \equiv 19 \pmod{3} \\ \Rightarrow 4x &\equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4x \equiv 1 + 3 \cdot 1 \pmod{3} \\ \Rightarrow 4x &\equiv 4 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3} \\ \Rightarrow 4(3k + 1) + 3y &= 19 \\ \Rightarrow 12k + 4 + 3y &= 19 \\ \Rightarrow 12k + 3y = 15 &\Rightarrow 4k + y = 5 \\ \Rightarrow y = -4k + 5 \end{aligned}$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \text{ و } k = \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

به‌ازای $k=2$ و بیشتر از آن $y < 0$ و به‌ازای $k=-1$ و کمتر از آن $x < 0$ که قابل قبول نمی‌باشند و لذا به دو صورت فوق می‌توان این کیسه ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

حل: اگر x و y را به ترتیب تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با تعداد

$$2000x + 5000y = 18000$$

$$2000x + 5000y = 18000$$

$$\Rightarrow 2x + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 18 \text{ و } 18 \equiv 3$$

$$\Rightarrow x \equiv 9 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 4$$

$$\Rightarrow 2(5k + 4) + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 8 + 5y = 18$$

$$\Rightarrow 10k + 5y = 10 \Rightarrow y = -2k + 2$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ و } k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{فقط به ازای } 1 \text{ و } 0 \text{ برای } x \text{ و } y \text{ جواب‌ها نامنفی هستند})$$

پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

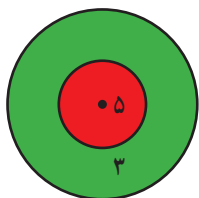
مثال: در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

حل: اگر تعداد چلو خورش قورمه‌سبزی و چلو خورش قیمه سفارش داده شده را به ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت:

$$x + y = 5 \Rightarrow x \equiv 5 \pmod{5} \Rightarrow x = k + 5$$

$$\Rightarrow k + 5 + y = 5 \Rightarrow y = -k$$

چون x و y اعدادی نامنفی هستند پس باید $k \in \{0, -1, -2, -3, -4, -5\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.



مثال: تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایره هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایره با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره بزرگ‌تر و خارج دایره کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همه تیرها به داخل دایره بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

حل: اگر x و y را به ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم:

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \equiv 42 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow 5x \equiv 42 + 3 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 9 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow x = 3k + 9$$

$$5(3k + 9) + 3y = 42$$

$$\Rightarrow 15k + 45 + 3y = 42$$

$$\Rightarrow 15k + 3y = -3 \Rightarrow y = -5k - 1$$

$$x, y \in W \Rightarrow k \in \{-1, -2, -3\} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=14 \end{cases}$$

($x=6$ و $y=4$ یعنی تیرانداز ۶ تیر را به دایره کوچک‌تر و ۴ تیر را به دایره بزرگ‌تر زده است).

تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم‌نهستی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟

۲ اگر $k \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است

$$k \equiv 0 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 1 \pmod{3} \text{ یا } k \equiv 2 \pmod{3}$$

(به عبارت دیگر، $k \in [0]_3$ یا $k \in [1]_3$ یا $k \in [2]_3$)

۳ اگر $a \equiv b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \equiv b$.

۴ فرض کنیم، $a \equiv b$ و $b \equiv c$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \equiv c$.

۵ ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \equiv b$.

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای ختام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \equiv a^n + b^n$.

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

۱۰ اگر دو عدد $(3a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکسان برابر داشته باشند رقم یکسان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد $1! + 2! + 3! + \dots + 500!$ را بر ۱۰ به دست آورید (رقم یکسان A را بیابید)

۱۲ جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را به دست آورید.

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

حل تمرینات صفحه ۳۰ و ۳۱:

$$139\lambda \equiv 1 + 3 + 9 + \lambda \equiv 13 \pmod{9} \rightarrow 139\lambda \in [13]_9$$

تمرین ۱:

مدير گروه استاد ايمانلو $k \equiv 0 \pmod{3} \rightarrow 3 | k \rightarrow k \equiv 0 \pmod{3} \rightarrow k \in [0]_3$

$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \nu) k = 3k' + 1 \rightarrow 3 | k - 1 \rightarrow k \equiv 1 \pmod{3} \rightarrow k \in [1]_3$

$\mu) k = 3k' + 2 \rightarrow 3 | k - 2 \rightarrow k \equiv 2 \pmod{3} \rightarrow k \in [2]_3$

تمرین ۲:

$k \equiv 0 \pmod{3}$

$\underline{\quad} q \rightarrow k = 3q \rightarrow k \equiv 0 \pmod{3}$

o

$k \equiv 1 \pmod{3}$

$\underline{\quad} q \rightarrow k = 3q + 1 \rightarrow k - 1 = 3q \rightarrow k \equiv 1 \pmod{3}$

l

$k \equiv 2 \pmod{3}$

$\underline{\quad} q \rightarrow k = 3q + 2 \rightarrow k - 2 = 3q \rightarrow k \equiv 2 \pmod{3}$

روش دوم:

زهرا شمسى

مدیریت بررسی: استاد عربیار محمدی

$$a \equiv_m b \rightarrow m|a-b, n|m \rightarrow n|a-b \rightarrow a \equiv_n b$$

تمرین ۳:

روش دوم:

$$n | m \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} m = nq \quad (1)$$

$$a \equiv_m b \rightarrow m|a-b \rightarrow a - b = mq' \xrightarrow[m=nq]{(1)} a - b = nqq' \xrightarrow{qq'=q''} a - b = nq'' \rightarrow a \equiv_n b$$

تمرین ۴:

$$\left. \begin{array}{l} d \mid m \\ m \mid a - b \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} d \mid a - b$$

$$\left. \begin{array}{l} d \mid n \\ n \mid b - c \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} d \mid b - c$$

$$\Rightarrow d \mid (a - b) + (b - c) \Rightarrow d \mid a - c \Rightarrow a \equiv c \pmod{d}$$

$$(m, n) = d \rightarrow \begin{array}{l} d \mid m \rightarrow m = dq \\ d \mid n \rightarrow n = dq' \end{array}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \xrightarrow[\text{ت. (م)}]{d \mid m} a \equiv b \pmod{d} \xrightarrow{\text{تعدی}} a \equiv c \pmod{d}$$

$$b \equiv c \pmod{n} \xrightarrow[\text{ت. (ن)}]{d \mid n} b \equiv c \pmod{d}$$

زهرا شمس‌آبادی

روش دوم:

مدیریت بررسی: استاد عربیار محمدی

تمرین ۵:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv r \pmod{m} \\ b \equiv r \pmod{m} \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

روش دوم:

$$a \equiv r \pmod{m} \rightarrow a = mq + r \quad (1)$$

$$b \equiv r \pmod{m} \rightarrow b = mq' + r$$

$$(1) - (2) \rightarrow a - b = mq - mq' + r - r \Rightarrow a - b = m(q - q') \Rightarrow a - b = mq'' \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

r

عکس تمرین ۵: «اگر $a \equiv b \pmod{m}$ باشد آنگاه باقی مانده های تقسیم دو عدد a, b بر m مساوی می شود»

حل: اگر $a - b = mk \vee a \equiv b \pmod{m}$ و بپذیریم a بر m مساوی r باشد نشان می دهیم که b بر m مساوی r است.

$$a - b = mk, a = mq + r, (0 < r < m) \rightarrow mq + r - b = mk \rightarrow b = m(\underbrace{q - k}_{q' \in \mathbb{Z}}) + r \rightarrow b = mq' + r (0 < r < m)$$

پس بپذیریم b بر m مساوی r است.

$$a \begin{array}{l} | \\ m \\ \hline q \end{array} \rightarrow a = mq + r \quad , 0 \leq r < m$$

$$b \begin{array}{l} | \\ m \\ \hline q' \end{array} \rightarrow b = mq' + r' \quad , 0 \leq r' < m$$

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow m \mid a - b \rightarrow m \mid (mq + r) - (mq' + r') \Rightarrow m \mid m(q - q') + r - r'$$

این رابطه وقتی برقرار است که $r - r'$ مضرب m باشد با توجه به اینکه هر دو از m کوچکتر می باشند تفاضلشان وقتی مضرب m است که

برابر صفر باشد $r - r' = 0$ آنگاه $r = r'$ یعنی a, b بر m هم باقی مانده اند یا باقی مانده مساوی دارند.

تمرین ۷: روش اول:

$$(a+b)^n \stackrel{ab}{\equiv} \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \stackrel{ab}{\equiv} \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{n} b^n \stackrel{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

روش دوم:

$$x \stackrel{m}{\equiv} x \Rightarrow (a+b)^n \stackrel{ab}{\equiv} (a+b)^n$$

$$(a+b)^n \stackrel{ab}{\equiv} \left[\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{0} b^n \right] + ab \left[\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} b + \dots + \binom{n}{n-1} b^{n-1} \right]$$

$$\Rightarrow (a+b)^n \stackrel{ab}{\equiv} [a^n + b^n] + ab(q) \Rightarrow (a+b)^n \stackrel{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

$$(a+b)^n \equiv a^n + b^n \Rightarrow (1+1)^{\Delta^1} \equiv 1^{\Delta^1} + 1^{\Delta^1} \Rightarrow \mu^{\Delta^1} \equiv 1^{\Delta^1} + 1^{\Delta^1}$$

$$\Rightarrow (\mu^{\Delta^1} - 1^{\Delta^1} - 1^{\Delta^1}) = 0 \Rightarrow \mu^{\Delta^1} = 2$$

$$\mu^1 \equiv 1 \xrightarrow{\times 2} \mu^2 \equiv 2 \xrightarrow{+1} \mu^3 \equiv 3 \xrightarrow{+1} \mu^4 \equiv 4 \xrightarrow{+1} \mu^5 \equiv 5 \xrightarrow{+1} \mu^6 \equiv 6 \xrightarrow{+1} \mu^7 \equiv 7 \xrightarrow{+1} \mu^8 \equiv 8 \xrightarrow{+1} \mu^9 \equiv 9 \xrightarrow{+1} \mu^{10} \equiv 10$$

تمرین ۹:

یا

$$\begin{cases} \mu^6 \equiv -5 \\ \mu^{\Delta^6} \equiv 9 \end{cases} \rightarrow \mu^6 \times \mu^{\Delta^6} \equiv -5 \times 9 = -45 \xrightarrow{+7} \mu^7 \equiv -45 + 7 = -38 \xrightarrow{+1} \mu^8 \equiv -38 + 1 = -37 \xrightarrow{+1} \mu^9 \equiv -37 + 1 = -36 \xrightarrow{+1} \mu^{10} \equiv -36 + 1 = -35$$

یا

$$\mu^7 \times 9 \equiv 9 \Rightarrow \mu^7 \times \mu^{\Delta^7} \times 9 \equiv \mu^{\Delta^7} \times 9 \Rightarrow \mu^{\Delta^7} \times 9 \equiv 1 \Rightarrow \mu^{\Delta^7} \times \mu^{\Delta^7} \times 9 \equiv \mu^{\Delta^7} \Rightarrow \mu^1 \times 9 \equiv 9 \quad (1) \xrightarrow{(1) \times 2} (\mu^1 \times 9) + (\mu^1 \times 9) \equiv 9 + 9 = 18$$

$$\mu^1 \times 9 \equiv 9 \quad (\mu)$$

گروه تلگرامی فقط گسسته
 تمرین ۱۱: می‌دانیم که $n!$ برای $n \geq 5$ همگی بر ۱۰ بخش پذیرند زیرا عامل ۵ و ۲ را دارند

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 50! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! + 0 + 0 + \dots + 0 \equiv 1 + 2 + 6 + 24 \equiv 33 \equiv 3 \pmod{10}$$

تمرین ۱۲:

معادله جواب دارد $vx + 5y = 11 \quad (v, 5) | 11 \rightarrow 1 | 11$

$$vx + 5y = 11 \rightarrow 5y \equiv 11 \pmod{v} \rightarrow 5y \equiv 11 - v \pmod{v} \rightarrow 5y \equiv 4 \pmod{v} \rightarrow 5y \equiv 4 + 3(v) \pmod{v}$$

$$5y \equiv 25 \pmod{v} \xrightarrow[\div 5]{(v, 5)=1} y \equiv 5 \pmod{v} \Rightarrow \boxed{y = vk + 5}$$

$$vx + 5(vk + 5) = 11 \rightarrow vx + 35k + 25 = 11 \rightarrow vx = -35k - 14 \rightarrow \boxed{x = 5k + 2}$$

$$vx + \Delta y = 11 \quad (v, \Delta) \mid 11 \rightarrow 1 \mid 11 \quad \text{معادله جواب دارو}$$

$$vx + \Delta y = 11 \rightarrow \Delta y \equiv 11 - v \rightarrow \Delta y \equiv 11 - v \rightarrow \Delta y \equiv 4 \rightarrow \Delta y \equiv 4 + 3(v) \rightarrow$$

$$\Delta y \equiv 4 \xrightarrow[\div \Delta]{(v, \Delta)=1} y \equiv 5 \Rightarrow \boxed{y = vk + 5}$$

$$vx + \Delta(vk + 5) = 11 \rightarrow vx + 3\Delta k + 2\Delta = 11 \rightarrow vx = -3\Delta k - 14 \rightarrow \boxed{x = -\Delta k - 2}$$

$$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29 \rightarrow 2x - 29 = -5y$$

$$(2, 5) = 1, \quad 1 \mid 29 \Rightarrow \boxed{\text{معادله جواب دارد}}$$

$$2x = 29 \rightarrow 2x \equiv 29 - 2\Delta \rightarrow 2x \equiv 3 \xrightarrow[\div 2]{(2, \Delta)=1} x \equiv 2 \Rightarrow \boxed{x = \Delta k + 2}$$

$$2(\Delta k + 2) + 5y = 29 \rightarrow 5y = -10k + 25 \rightarrow \boxed{y = -2k + 5}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta k + 2 \geq 0 \\ -2k + 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq \frac{-2}{\Delta} \\ k \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow k = 0, 1, 2 \quad \text{به سه طریق}$$

$$k = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \quad k = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \quad k = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 1 \end{cases}$$

۱۴ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به دست آورید.

الف) $423x \equiv 79 \pmod{11}$

ب) $8x \equiv 20 \pmod{12}$

ج) $51x \equiv 11 \pmod{6}$

۱۵ اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۶ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۷ همه اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

۱۸ به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۹ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

۲۰ شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز

کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد

و یا امتیازی ندارد)

$$423x \equiv 79 \pmod{11} \quad 423 = 11 \times 38 + 5$$

$$(423, 11) \mid 79 \rightarrow 1 \mid 79$$

تمرین ۱۴: الف)

$$5x \equiv 7 \pmod{11} \rightarrow 5x \equiv 7 + 3(11) \rightarrow 5x \equiv 35 \xrightarrow[\div 5]{(5, 11)=1} x \equiv 7 \pmod{11} \rightarrow x = 11k + 7$$

$$8x \equiv 20 \pmod{17}$$

$$(8, 17) \mid 20 \rightarrow 1 \mid 20$$

ب)

$$8x \equiv 20 \pmod{17} \rightarrow 8x \equiv 20 - 17 \rightarrow 8x \equiv 3 \xrightarrow[\div 8]{(8, 17)=1} x \equiv 1 \pmod{17} \rightarrow x = 17k + 1$$

$$51x \equiv 11 \pmod{6}$$

$$(51, 6) \mid 11 \rightarrow 3 \nmid 11$$

معادله جواب ندارد

ج)

تمرین ۱۵:

اسفندی بهمن دی آذر آبان مهر

$$۱۵۶ = ۲۹ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۷ = \text{تعداد روزها}$$

$$۱۵۶ \equiv ۲ \pmod{۷}$$

یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه	شنبه
۱	۲	۳	۴	۴	۵	۶

با توجه به اینکه $۱۵۶ \equiv ۲ \pmod{۷}$ می باشد پس ۷ اسفند سه شنبه است

تمرین ۱۶:

پنج شنبه	چهارشنبه	سه شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷

$$۱۲ \text{ بهمن چهارشنبه است. } -(۱۲ + ۴ \times ۳۰ + ۳۱) = -۱۶۳ \equiv -۲ \equiv ۵ \pmod{۷}$$

تمرین ۱۷:

$$\Delta a + 9 \equiv 0 \Rightarrow \Delta a \equiv -9 \Rightarrow \Delta a \equiv -1 \mid -9 \Rightarrow \Delta a \equiv -1 \mid 0 \Rightarrow a \equiv -1 \mid -9 \Rightarrow a \equiv -1 \mid 1 \Rightarrow a \equiv 0 \mid 1 \Rightarrow a = 1 \mid k + 7$$

تمرین ۱۸:

$$3x + 5y = 23$$

$$3x \equiv 23 \pmod{5} \rightarrow 3x \equiv 3 \pmod{5} \rightarrow 3x \equiv 3 \pmod{5} \xrightarrow{\cdot (\frac{2}{3})^{-1}} x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow \boxed{x = 5k + 1}$$

$$3(5k + 1) + 5y = 23 \rightarrow 5y = -15k + 20 \xrightarrow{\div 5} \boxed{y = -3k + 4}$$

$$k = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad k = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{پس جوابات:}$$

روش دوم:

$$3x + 5y = 23$$

$$3x \equiv 23 \pmod{5} \rightarrow 3x \equiv 3 \pmod{5} \xrightarrow{\cdot (\frac{2}{3})^{-1}} x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow \boxed{x = 5k + 1}$$

$$3(5k + 1) + 5y = 23 \rightarrow 5y = -15k + 20 \xrightarrow{\div 5} \boxed{y = -3k + 4}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5k + 1 \geq 0 \\ -3k + 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq -\frac{1}{5} \\ k \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow k = 0, 1$$

$$k = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad k = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$x + y = 9 \quad (1,1) = 1,1 | 9 \rightarrow \text{معادله جواب دارو}$$

$$x \equiv 9 \Rightarrow \boxed{x = k + 9} \quad k + 9 + y = 9 \rightarrow \boxed{y = -k}$$

$$k = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 0 \end{cases} \quad k = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -1 \end{cases} \quad k = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = -2 \end{cases} \quad k = 3 \rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = -3 \end{cases} \quad k = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$k = 5 \rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = -5 \end{cases} \quad k = 6 \rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = -6 \end{cases} \quad k = 7 \rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = -7 \end{cases} \quad k = 8 \rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = -8 \end{cases} \quad k = 9 \rightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = -9 \end{cases}$$

روش دیگر:

$$x + y = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = k & k \in \mathbb{Z} \\ y = 9 - x \Rightarrow y = 9 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ 9 - k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

معادله ۱۰ تا جواب دارو

$$7x + 9y = 73$$

$$7x \equiv 73 \rightarrow 7x \equiv 1 \rightarrow 7x \equiv 1 + 3(9) \rightarrow 7x \equiv 28 \xrightarrow[\div 7]{(7,9)=1} x \equiv 4 \Rightarrow \boxed{x = 9k + 4}$$

$$7(9k + 4) + 9y = 73 \rightarrow 9y = -63k + 45 \xrightarrow{\div 9} \boxed{y = -7k + 5}$$

$$k = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \quad k = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = -2 \end{cases} \quad k = 2 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 12 \end{cases}$$

۴ تا هفت امتیازی و ۵ تا ۹ امتیازی

غیر قابل قبول

غیر قابل قبول

روش دوم:

$$7x + 9y = 73$$

$$7x \equiv 73 \rightarrow 7x \equiv 91 = 7 \times 13 \rightarrow 7x \equiv 13 \rightarrow x \equiv 4 \Rightarrow \boxed{x = 9k + 4}$$

$$7(9k + 4) + 9y = 73 \rightarrow 9y = -63k + 45 \xrightarrow{\div 9} \boxed{y = -7k + 5}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9k + 4 \geq 0 \\ -7k + 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq \frac{-4}{9} \\ k \leq \frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow k = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$