

درس اول : تعمیم توان رسانی

آشنایی با مفهوم تابع نمایی به عنوان یکی از انواع توابع در ریاضیات ، برای درک و فهم بسیاری مفاهیم دیگر در ریاضیات و فیزیک و از جمله شدت زلزله، شدت صدا، قدمت یک شیء و ... لازم و ضروری است. در اینجا ضمن یادآوری آن موضوعات تکمیلی دیگری را معرفی می کنیم.

قسمت اول : یادآوری قوانین توان رسانی و ریشه گیری

در سال های قبل ، با توان های طبیعی، صحیح و گویای اعداد حقیقی و قوانین آنها آشنا شده اید. در اینجا چند رابطه در مورد توان و ریشه گیری را جهت یادآوری معرفی می کنیم.

۱ : توان صفر

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

مثال: $5^0 = 1$

۲ : توان یک

$$a^1 = a$$

مثال: $5^1 = 5$

۳ : توان منفی

$$\begin{cases} a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ a \neq 0 \end{cases}$$

مثال: $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

۴ : توان کسری

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

اگر n زوج باشد، باید $a \geq 0$ باشد.

مثال: $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

۵: توان توان

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

مثال: $(5^3)^2 = 5^{3 \times 2} = 5^6$

۶: ضرب اعداد تواندار با پایه های مساوی

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال: $5^7 \times 5^2 = 5^{7+2} = 5^9$

۷: ضرب اعداد تواندار با توان های مساوی

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

مثال: $5^7 \times 6^7 = 30^7$

۸: تقسیم اعداد تواندار با پایه های مساوی

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

مثال: $5^7 \div 5^3 = 5^{7-3} = 5^4$

۹: تقسیم اعداد تواندار با توان های مساوی

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

مثال: $15^7 \div 5^7 = 3^7$

۱۰: هرگاه دو عدد تواندار مساوی، پایه های مساوی داشته باشند، توان های آنها نیز مساویند.

$$\begin{cases} a^m = a^n \rightarrow m = n \\ a \neq 0, 1, -1 \end{cases}$$

مثال: $5^x = 5^3 \rightarrow x = 3$

تمرین ۱: در تساوی های مقابل مقدار x را حساب کنید.

الف) $2^x = 32$

ج) $9^x = 27$

ب) $3^x \times 3^4 = 243$

د) $3^{x-1} = \frac{1}{81}$

حل:

الف) $2^x = 32 \rightarrow 2^x = 2^5 \rightarrow x = 5$

ب) $3^x \times 3^4 = 243 \rightarrow 3^{x+4} = 3^5 \rightarrow x+4=5 \rightarrow x=1$

ج) $9^x = 27 \rightarrow (3^2)^x = 3^3 \rightarrow 3^{2x} = 3^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

د) $3^{x-1} = \frac{1}{81} \rightarrow 3^{x-1} = \frac{1}{3^4} \rightarrow 3^{x-1} = 3^{-4} \rightarrow x-1 = -4 \rightarrow x = -4+1 = -3$

تمرین برای حل:

۲: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $3^{2x-3} = 81$

ت) $2^{3n-2} = \frac{1}{32}$

ح) $(\frac{3}{5})^{x+1} = \frac{25}{9}$

ب) $4^{2x-1} = 8^{x+1}$

ث) $9^x = 3 \cdot x^2 - 4x$

خ) $4^{3x+2} = \frac{1}{64^3}$

پ) $5^{3n-1} = 125^{2n+1}$

ج) $9^{3y-3} = 27^{y+1}$

قسمت دوم : تعمیم قوانین توان رسانی

قوانین توان رسانی برای توان های حقیقی نیز برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک و y و x دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم.

$$۱) a^0 = 1$$

$$۶) a^x \times a^y = a^{x+y}$$

$$۲) a^1 = a$$

$$۷) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$۳) 1^x = 1$$

$$۸) a^x \times b^x = (ab)^x$$

$$۴) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$۹) \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$۵) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$۱۰) a^x = a^y \rightarrow x = y$$

تمرین ۳: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$((\sqrt{2})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}}$$

حل :

$$((\sqrt{2})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{36}} = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$$

تمرین ۴: حاصل عبارت $\frac{4\sqrt{3} \times 2\sqrt{75}}{2\sqrt{12} \times 8\sqrt{3}}$ را به ساده ترین شکل بنویسید.

حل :

$$\frac{4\sqrt{3} \times 2\sqrt{75}}{2\sqrt{12} \times 8\sqrt{3}} = \frac{2^2\sqrt{3} \times 2^2\sqrt{3}}{2^2\sqrt{3} \times 2^3\sqrt{3}} = \frac{2^2\sqrt{3}}{2^5\sqrt{3}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

تمرین ۵: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۱) ((\sqrt{10})^{2-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}} =$$

$$۳) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\sqrt{2}+1} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} =$$

$$۲) ((\sqrt[3]{5})^{3-\sqrt{3}})^{3+\sqrt{3}} =$$

$$۴) (2 - \sqrt[3]{7})^{\pi} (4 + 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})^{\pi} =$$

تمرین ۶: مقدار x را از معادله ی زیر به دست آورید.

$$x^{\sqrt{2}} + 1 = 5$$

حل:

$$x^{\sqrt{2}} + 1 = 5 \rightarrow x^{\sqrt{2}} = 4 \rightarrow (x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (4)^{\sqrt{2}} \rightarrow x^2 = 2^2\sqrt{2} \rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

تمرین ۵: مقدار x را از معادله ی زیر به دست آورید.

$$x^{\sqrt{2}} + 1 = 5$$

حل:

$$x^{\sqrt{2}} + 1 = 5 \rightarrow x^{\sqrt{2}} = 4 \rightarrow (x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (4)^{\sqrt{2}} \rightarrow x^2 = 2^2\sqrt{2} \rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس دوم : لگاریتم و معادلات لگاریتمی

جان نپر ریاضیدان اسکاتلندی (تولد ۱۵۵۰ و وفات ۱۶۱۷) مفهوم لگاریتم را پایه گذاری کرد. لگاریتم برای ساده کردن محاسبات ابداع شد و به عنوان بزرگترین پیشرفت علم حساب در قرن های ۱۶ و ۱۷ محسوب می شود. در این درس مفهوم لگاریتم را معرفی می کنیم و با خواص آن آشنا می شویم.

قسمت اول : مفهوم لگاریتم

لگاریتم عدد مثبت b در مبنای عدد مثبت و مخالف یک a ، عددی مانند x است که اگر a به توان x برسد، حاصل برابر b می شود.

$$\log_a^b = x \leftrightarrow a^x = b$$

$$\begin{cases} a, b > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$2^3 = 8 \rightarrow \log_2^8 = 3 \quad \text{برای مثال:}$$

((نماد \log_a^b را بخوانید، لگاریتم b در مبنای a))

تمرین ۱: تساوی های زیر را به صورت لگاریتم بنویسید.

$$\text{الف) } 7^3 = 343 \quad \text{ب) } 2^{-3} = \frac{1}{8} \quad \text{ج) } \sqrt[3]{64} = 4$$

حل:

$$\text{الف) } 7^3 = 343 \rightarrow \log_7^{343} = 3$$

$$\text{ب) } 2^{-3} = \frac{1}{8} \rightarrow \log_2^{\frac{1}{8}} = -3$$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{64} = 4 \rightarrow 64^{\frac{1}{3}} = 4 \rightarrow \log_{64}^4 = \frac{1}{3}$$

تمرین ۲: تساوی های زیر را به صورت توانی بنویسید.

$$\text{الف) } \log_2^{64} = 6 \quad \text{ب) } \log_2^{\sqrt{8}} = \frac{3}{2} \quad \text{ج) } \log_{10}^{1000} = -3$$

حل:

الف) $\log_2^{64} = 6 \rightarrow 2^6 = 64$

ب) $\log_2^{\sqrt{8}} = \frac{3}{2} \rightarrow 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$

ج) $\log_{10}^{0.001} = -3 \rightarrow 10^{-3} = 0.001$

تمرین ۳: در هر مورد مقدار x را پیدا کنید.

الف) $\log_3^{81} = x$

ب) $\log_2^x = 3$

ج) $\log_x^{64} = 2$

حل:

الف) $\log_3^{81} = x \rightarrow 3^x = 81 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow x = 4$

ب) $\log_2^x = 3 \rightarrow 2^3 = x \rightarrow x = 8$

ج) $\log_x^{64} = 2 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = \sqrt{64} \rightarrow x = 8$

تمرین ۴: مقدار x را از تساوی زیر محاسبه کنید.

$$\log_7^{49} = 2x - 1$$

حل:

$$\log_7^{49} = 2x - 1 \rightarrow 7^{2x-1} = 49 \rightarrow 7^{2x-1} = 7^2 \rightarrow 2x - 1 = 2 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

تمرین ۵: لگاریتم های زیر را محاسبه کنید.

الف) \log_2^{256}

ج) \log_7^7

ب) \log_4^{256}

د) \log_3^1

حل:

الف) $\log_2^{256} = x \rightarrow 2^x = 256 \rightarrow 2^x = 2^8 \rightarrow x = 8$

ب) $\log_4^{256} = y \rightarrow 4^y = 256 \rightarrow 4^y = 4^4 \rightarrow y = 4$

$$\text{ج) } \log_V^V = z \rightarrow V^z = V \rightarrow V^z = V^1 \rightarrow z = 1$$

$$\text{د) } \log_3^1 = t \rightarrow 3^t = 1 \rightarrow 3^t = 3^0 \rightarrow t = 0$$

نتیجه:

۱: لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک در مبنای خودش برابر یک است.

$$\begin{cases} \log_a^a = 1 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

۲: لگاریتم یک در هر مبنای مثبت و مخالف یک صفر است.

$$\begin{cases} \log_a^1 = 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

تمرین ۶: نشان دهید که تساوی زیر درست است.

$$\log_6^4 + \log_6^9 = 2$$

حل: قرار می دهیم $\log_6^4 = x$ و $\log_6^9 = y$ و نشان می دهیم که $x + y = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \log_6^4 = x \rightarrow 6^x = 4 \\ \log_6^9 = y \rightarrow 6^y = 9 \end{array} \right\} \rightarrow 6^x \times 6^y = 4 \times 9 \rightarrow 6^{x+y} = 36$$

$$\rightarrow 6^{x+y} = 6^2 \rightarrow x + y = 2$$

تذکر ۱: لگاریتم صفر نامعین است.

$$\log_a^0 = \text{نامعین}$$

تذکر ۲: لگاریتم، روی اعداد منفی، تعریف نمی شود.

تذکر ۳: اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد، لگاریتم را **لگاریتم اعشاری** می نامند. معمولاً در لگاریتم

اعشاری مبنای ۱۰ نوشته نمی شود.

$$\log_{10}^a = \log a$$

تذکر ۴: یکی از اعداد گنگ که کاربرد های زیادی در صنعت و اقتصاد و بازرگانی دارد، عددی معروف به عدد نپرین می باشد. این عدد به افتخار لئونارد اویلر را با e نمایش می دهند و مقدار تقریبی آن تا دو رقم اعشار $۲/۷۱$ می باشد.

اگر مبنای لگاریتم عدد نپرین باشد، لگاریتم را **لگاریتم طبیعی** می نامند. معمولاً مبنای e نوشته نمی شود. حال به دلیل اینکه این لگاریتم با لگاریتم اعشاری اشتباه نشود، \log را به صورت L_n می نویسند.

$$\log_e^a = L_n a$$

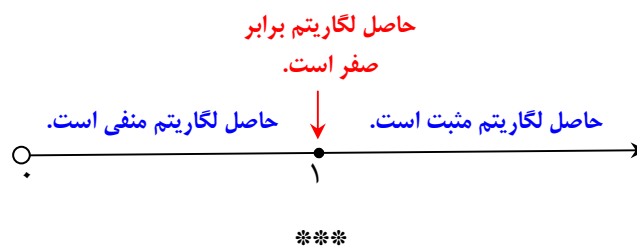
واضح است که :

$$L_n e = \log_e^e = ۱$$

$$L_n ۱ = \log_e^1 = ۰$$

تذکر ۵: ماشین های حساب ، فقط لگاریتم اعشاری و لگاریتم طبیعی را محاسبه می کنند. برای محاسبه ی لگاریتم در مبنای های دیگر به کمک ماشین حساب می توان از فرمولی به نام فرمول تغییر مبنای استفاده نمود. این فرمول در ادامه، گفته می شود.

تذکر ۶: لگاریتم اعداد مثبت کمتر از یک، منفی است. لگاریتم یک برابر صفر و لگاریتم اعداد بزرگتر از یک ، مثبت است.



قسمت دوم : روابط لگاریتمی

با توجه به تعریف لگاریتم ، روابط زیر را به راحتی می توان بیان کرد.

۱: جمع لگاریتم ها در یک مبنای

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

برای مثال :

$$\log_7^3 + \log_7^5 = \log_7^{3 \times 5} = \log_7^{15}$$

این رابطه برای مجموع چند لگاریتم در یک مبنا نیز برقرار است.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

برای مثال:

$$\log_{10}^2 + \log_{10}^5 + \log_{10}^{10} = \log_{10}^{2 \times 5 \times 10} = \log_{10}^{100} = 2$$

۲: تفریق لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a - \log_x^b = \log_x^{\frac{a}{b}}$$

مثال:

$$\log_7^{20} - \log_7^5 = \log_7^{20 \div 5} = \log_7^4$$

۳: لگاریتم عدد تواندار

$$\log_x^{a^n} = n \log_x^a$$

مثال:

$$\log_2^{32} = \log_2^{2^5} = 5 \log_2^2 = 5 \times 1 = 5$$

۴: لگاریتم مبنای تواندار

$$\log_{x^m}^a = \frac{1}{m} \log_x^a$$

مثال:

$$\log_{1000}^3 = \log_{10^3}^3 = \frac{1}{3} \log_{10}^3 = \frac{1}{3}$$

الف) $\log_{x^n}^{a^n} = \log_x^a$

ب) $\log_x^{a^n} = \log_{\sqrt[n]{x}}^a$

نتیجه:

۵: تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}$$

مثال : فرض کنید که می خواهیم مبنای لگاریتم \log_3^4 را به ۵ تبدیل کنیم. در این صورت

$$\log_3^4 = \frac{\log_5^4}{\log_5^3}$$

۶: دو لگاریتم مساوی با مبنای برابر

$$\log_x^a = \log_x^b \rightarrow a = b$$

مثال :

$$\log_3^a = \log_3^8 \rightarrow a = 8$$

تمرین ۷: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log 5 + \log 20$

۴) $2 \log 5 + \log 4$

۲) $\log_7^{10} - \log_7^{10}$

۵) $6 \log_4^2 - \frac{1}{2} \log_2^{64}$

۳) $\log_6^4 + \log_6^9$

۶) $\log_7^8 + \log_7^5 - \log_7^{10}$

حل:

۱) $\log 5 + \log 20 = \log 5 \times 20 = \log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2 \times 1 = 2$

۲) $\log_7^{10} - \log_7^{10} = \log_7^{10 \div 10} = \log_7^1 = 1$

۳) $\log_6^4 + \log_6^9 = \log_6^{4 \times 9} = \log_6^{36} = \log_6^{6^2} = 2 \log_6^6 = 2 \times 1 = 2$

۴) $2 \log 5 + \log 4 = \log 5^2 + \log 4 = \log 25 + \log 4 = \log 25 \times 4 = \log 100$

$= \log 10^2 = 2 \log 10 = 2 \times 1 = 2$

۵) $6 \log_4^2 - \frac{1}{2} \log_2^{64} = \log_4^{2^6} - \log_{2^2}^{64} = \log_4^{64} - \log_4^{64} = \log_4^{64 \div 64} = \log_4^1 = 0$

۶) $\log_7^8 + \log_7^5 - \log_7^{10} = \log_7^{(8 \times 5) \div 10} = \log_7^4 = \log_7^{2^2} = 2 \log_7^2 = 2 \times 1 = 2$

تمرین ۸: عبارت های زیر را طوری بنویسید که فقط یک لگاریتم داشته باشند.

$$۱) \log_V^{\Delta} - \log_V^{\Upsilon}$$

$$۴) \log a - \log b - \log c + \log d$$

$$۲) \frac{\log \Delta}{\log \Upsilon}$$

$$۵) ۲ \log x - ۳ \log y - ۴ \log c$$

$$۳) \Delta \log a - ۲ \log b + ۳ \log c$$

$$۶) ۲ L_n a + ۳ L_n b$$

حل:

$$۱) \log_V^{\Delta} - \log_V^{\Upsilon} = \log_V^{\Delta \div \Upsilon} = \log_V^{\frac{\Delta}{\Upsilon}}$$

$$۲) \frac{\log \Delta}{\log \Upsilon} = \log_{\Upsilon}^{\Delta}$$

$$۳) \Delta \log a - ۲ \log b + ۳ \log c = \log a^{\Delta} - \log b^{\Upsilon} + \log c^{\Upsilon} = \log \frac{a^{\Delta} c^{\Upsilon}}{b^{\Upsilon}}$$

$$۴) \log a - \log b - \log c + \log d = \log \frac{ad}{bc}$$

$$۵) ۲ \log x - ۳ \log y - ۴ \log c = \log x^{\Upsilon} - \log y^{\Upsilon} - \log c^{\Upsilon} = \log \frac{x^{\Upsilon}}{y^{\Upsilon} c^{\Upsilon}}$$

$$۶) ۲ L_n a + ۳ L_n b = L_n a^{\Upsilon} + L_n b^{\Upsilon} = L_n a^{\Upsilon} b^{\Upsilon}$$

تمرین ۹: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۱) \log_{\Delta}^{\Upsilon \Delta}$$

$$۳) \log_{\Upsilon}^{\sqrt{\Upsilon \Upsilon}}$$

$$۵) \log ۱۰۰$$

$$۲) \log_{\Upsilon}^{\Upsilon \Upsilon}$$

$$۴) \log_{\Upsilon}^{\frac{\Delta}{\sqrt{\Upsilon}}}$$

$$۶) \log \sqrt{۱۰۰۰}$$

حل:

$$۱) \log_{\Delta}^{\Upsilon \Delta} = \log_{\Delta}^{\Delta^{\Upsilon}} = \Upsilon \log_{\Delta}^{\Delta} = \Upsilon \times ۱ = \Upsilon$$

$$۲) \log_{\Upsilon}^{\Upsilon \Upsilon} = \log_{\Upsilon}^{\Upsilon^{\Upsilon}} = \Upsilon \times \frac{1}{\Upsilon} \log_{\Upsilon}^{\Upsilon} = \frac{\Upsilon}{\Upsilon} \times ۱ = \frac{\Upsilon}{\Upsilon}$$

$$۳) \log_{\Upsilon}^{\sqrt{\Upsilon \Upsilon}} = \log_{\Upsilon}^{\sqrt{\Upsilon^{\Upsilon}}} = \log_{\Upsilon}^{\Upsilon^{\frac{\Upsilon}{2}}} = \frac{\Upsilon}{2} \log_{\Upsilon}^{\Upsilon} = \frac{\Upsilon}{2} \times ۱ = \frac{\Upsilon}{2}$$

$$۴) \log_{\sqrt[3]{4}}^8 = \log_{\sqrt[3]{2^2}}^{2^3} = \log_{\frac{2}{2^3}}^{2^3} = 3 \times \frac{3}{2} \log_2^2 = \frac{9}{2} \times 1 = \frac{9}{2}$$

$$۵) \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2 \times 1 = 2$$

$$۶) \log \sqrt{1000} = \log \sqrt{10^3} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_{10} 10 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

تمرین ۱۰: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ لگاریتم‌های زیر را بر حسب a و b به دست آورید.

۱) $\log 81$

۵) $\log 72$

۹) \log_3^2

۲) $\log 32$

۶) $\log 5$

۱۰) \log_{81}^{32}

۳) $\log 6$

۷) $\log 75$

۴) $\log 12$

۸) \log_2^3

حل:

$$۱) \log 81 = \log 3^4 = 4 \log 3 = 4b$$

$$۲) \log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5a$$

$$۳) \log 6 = \log 2 \times 3 = \log 2 + \log 3 = a + b$$

$$۴) \log 12 = \log 2^2 \times 3 = \log 2^2 + \log 3 = 2 \log 2 + \log 3 = 2a + b$$

$$۵) \log 72 = \log 2^3 \times 3^2 = \log 2^3 + \log 3^2 = 3 \log 2 + 2 \log 3 = 3a + 2b$$

$$۶) \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$$

$$۷) \log 75 = \log 3 \times 5^2 = \log 3 + \log 5^2 = \log 3 + 2 \log 5 = b + 2(1 - a)$$

$$= b + 2 - 2a$$

$$۸) \log_2^3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{b}{a}$$

نتیجه : $\log 5 = 1 - \log 2$

$$۹) \log_3^2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{a}{b}$$

$$۱۰) \log_{81}^{32} = \log_{3^4}^{2^5} = 5 \times \frac{1}{4} \log_3^2 = \frac{5}{4} \times \frac{a}{b} = \frac{5a}{4b}$$

تمرین ۱۱: اگر $\log 2 = 0/3010$ و $\log 7 = 0/8450$ حاصل لگاریتم های زیر را به دست آورید.

۱) $\log 8$ ۶) $\log 56$

۲) $\log 49$ ۷) $\log 5$

۳) $\log 14$ ۸) $\log 25$

حل :

۱) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3(0/3010) = 0/9030$

۲) $\log 49 = \log 7^2 = 2 \log 7 = 2(0/8450) = 0/1690$

۳) $\log 14 = \log 2 \times 7 = \log 2 + \log 7 = 0/3010 + 0/8450 = 0/1156$

۶) $\log 56 = \log 2^3 \times 7 = \log 2^3 + \log 7 = 3 \log 2 + \log 7 = 3(0/3010) + (0/8450)$
 $= 0/9030 + 0/8450 = 0/1748$

۷) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - (0/3010) = 0/6990$

۸) $\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 2(0/6990) = 0/1398$

تمرین ۱۲: معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\log_5^x + \log_5^3 = \log_5^{12}$ ۴) $\log^{x+3} + \log^x = 1$

۲) $3 \log x = \log 8$ ۵) $\log_2^{4x} - \log_2^{x-3} = 3$

۳) $2 \log x + \log 3 = \log 27$ ۶) $\log^{1-x} - \log^2 = \log 5$

¹ . توجه کنید که بنابر تعریف لگاریتم، جوابی از یک معادله ی لگاریتمی، قابل قبول است که به ازای آن لگاریتم صفر یا

لگاریتم عدد منفی، پیش نیاید.

حل:

$$۱) \log_{\delta}^x + \log_{\delta}^3 = \log_{\delta}^{12} \rightarrow \log_{\delta}^{3x} = \log_{\delta}^{12} \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$$

$$۲) 3 \log x = \log 8 \rightarrow \log x^3 = \log 8 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$۳) 2 \log x + \log 3 = \log 27 \rightarrow \log x^2 + \log 3 = \log 27 \rightarrow \log 3x^2 = \log 27$$

$$\rightarrow 3x^2 = 27 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

که ریشه‌ی $x = -3$ غیر قابل قبول است.

$$۴) \log^{x+3} + \log^x = 1 \rightarrow \log^{x(x+3)} = \log^{10} \rightarrow x^2 + 3x = 10 \rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\rightarrow (x+5)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+5=0 \rightarrow x=-5 \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases}$$

که ریشه‌ی $x = -5$ غیر قابل قبول است.

$$\log_{\frac{4}{3}}^{4x} - \log_{\frac{4}{3}}^{x-3} = 3 \rightarrow \log_{\frac{4}{3}}^{x-3} = 3 \log_{\frac{4}{3}}^2 \rightarrow \log_{\frac{4}{3}}^{x-3} = \log_{\frac{4}{3}}^{2^3} \rightarrow \log_{\frac{4}{3}}^{x-3} = \log_{\frac{4}{3}}^8$$

$$\rightarrow \frac{4x}{x-3} = 8 \rightarrow 4x = 8(x-3) \rightarrow 4x = 8x - 24 \rightarrow 4x - 8x = -24$$

$$\rightarrow -4x = -24 \rightarrow x = \frac{-24}{-4} = 6$$

$$۶) \log^{1-x} - \log^2 = \log^5 \rightarrow \log^{\frac{1-x}{2}} = \log^5 \rightarrow \frac{1-x}{2} = 5 \rightarrow 1-x = 10 \rightarrow x = -9$$

تمرین ۱۳: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$L_n(x-3) = 2$$

حل:

$$L_n(x-3) = 2 \rightarrow x-3 = e^2 \rightarrow x = 3 + e^2$$

تمرین برای حل :

۱۴: درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

الف: لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

ب: لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی شود.

پ: $a > b > 0$ آنگاه $\log_{1.}^a < \log_{1.}^b$.

۱۵: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log 25 + \log 4$

۴) $3 \log 5 + \log 8$

۲) $\log_{8}^{40} - \log_{8}^5$

۵) $\log_{9}^3 - \frac{1}{2} \log_{3}^{81}$

۳) $\log_{12}^{16} + \log_{12}^9$

۶) $\log_{7}^8 - \log_{7}^5 + \log_{7}^{20}$

۱۶: لگاریتم های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

۱) $\log_{5}^{18} - \log_{5}^3$

۴) $\log a + \log b - \log c - \log d$

۲) $\frac{\log_{2}^y}{\log_{2}^5}$

۵) $2 \log x - 5 \log y - 3 \log c$

۳) $5 \log p + 2 \log q + 3 \log r$

۱۷: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) \log_{125}^{25}

۴) \log_{81}^{27}

۷) $\log_{\frac{1}{20}}^{400}$

۲) \log_{8}^{32}

۵) $\log_{\sqrt{5}}^{25}$

۳) $\log_{5}^{\sqrt{125}}$

۶) $\log_{\sqrt{3}}^{729}$

۱۸: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ و $\log 7 = c$ لگاریتم های زیر را بر حسب a و b و c به دست آورید.

۱) $\log 49$

۵) $\log 42$

۹) \log_{7}^2

۲) $\log 128$

۶) $\log 5$

۱۰) \log_{81}^{49}

۳) $\log 21$

۷) $\log 576$

۴) $\log 28$

۸) \log_{7}^y

قسمت سوم : اثبات روابط لگاریتمی

در اینجا روابط لگاریتمی را که پیش از این بیان کرده ایم، اثبات می کنیم.

۱: جمع لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ و $\log_x^b = \beta$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow b = x^\beta$$

$$\Rightarrow a.b = x^\alpha . x^\beta \rightarrow a.b = x^{\alpha+\beta} \rightarrow \log_x^{a.b} = \alpha + \beta \rightarrow \log_x^{a.b} = \log_x^a + \log_x^b$$

توجه : اثبات تعمیم این رابطه ی به مجموع چند لگاریتم در یک مبنا نیز به همین صورت انجام می گیرد.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

دانش آموزان عزیز می توانند، این تساوی را خود اثبات کنند.

۲: تفریق لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a - \log_x^b = \log_x^{\frac{a}{b}}$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ و $\log_x^b = \beta$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow b = x^\beta$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \rightarrow \frac{a}{b} = x^{\alpha-\beta} \rightarrow \log_x^{\frac{a}{b}} = \alpha - \beta \rightarrow \log_x^{\frac{a}{b}} = \log_x^a - \log_x^b$$

تمرین ۲۸: به کمک رابطه ی فوق ثابت کنید که $\log_x^{\frac{1}{a}} = -\log_x^a$

۳: لگاریتم عدد تواندار

$$\log_x a^n = n \log_x a$$

اثبات: فرض می‌کنیم که $\log_x a = \alpha$ پس:

$$\log_x a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow (a)^n = (x^\alpha)^n \rightarrow a^n = x^{n\alpha} \rightarrow \log_x a^n = n\alpha \rightarrow \log_x a^n = n \log_x a$$

۴: لگاریتم مبنای تواندار

$$\log_{x^m} a = \frac{1}{m} \log_x a$$

اثبات: فرض می‌کنیم که $\log_x a = \alpha$ پس:

$$\log_x a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow a = (x^m)^{\frac{\alpha}{m}} \rightarrow a = (x^m)^{\frac{\alpha}{m}} \rightarrow \log_{x^m} a = \frac{\alpha}{m}$$

$$\rightarrow \log_{x^m} a = \frac{1}{m} (\alpha) \rightarrow \log_{x^m} a = \frac{1}{m} (\log_x a)$$

۵: توان لگاریتمی

$$x^{\log_x a} = a$$

فرض کنیم که $\log_x a = \alpha$ پس $x^\alpha = a$ و این یعنی $x^{\log_x a} = a$

۶: تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_b a \times \log_x b = \log_x a$$

فرض می‌کنیم که

$$\log_b^a = \alpha \rightarrow b^\alpha = a \quad (۱)$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow x^\beta = b \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) می توان نتیجه گرفت :

$$(x^\beta)^\alpha = a \rightarrow x^{\alpha\beta} = a \rightarrow \alpha\beta = \log_x^a$$

پس :

$$\log_b^a \times \log_x^b = \log_x^a$$

نتیجه :

$$\log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}$$

تمرین برای حل :

۲۹ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

$$۱) \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$۲) a^{\log^b} = b^{\log^a}$$

$$۳) \log_{b^n}^{a^n} = \log_b^a$$

۳۰ : حاصل عبارت های زیر را بیابید.

$$۱) \log_3^{18} \times \log_{18}^3$$

$$۲) \frac{1}{\log_{18}^3} - \frac{1}{\log_3^3}$$

۳۱ : حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف) } ۲ \log_{10}^2 + \log_{10}^{25} =$$

$$\text{ب) } \log_4^3 \times \log_3^{16} =$$

$$\text{ج) } ۳ \log_{10}^{\sqrt[3]{4}} + \log_{10}^{25} =$$

$$\text{د) } \log_8^{\frac{1}{32}} =$$

$$\text{ه) } ۲ \log_2^5 - \log_2^3 =$$

۳۲ : اگر $\log_3^5 = b$ و $\log_3^2 = a$ باشد، مقدار \log_3^1 را بیابید.

۳۳: مقدار x از معادله‌ی $\log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\sqrt{3}} x - 2 \log_3 x = \frac{1}{3}$ به دست آورید.

۳۴: جواب معادله‌ی $\log_4 \log_3 \log_2^x = 0$ را تعیین کنید.

۳۵: اگر $a^2 + b^2 = 6ab$ ، آنگاه ثابت کنید که $\log_{\frac{a-b}{2}} = \frac{\log a + \log b}{2}$

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس سوم : تابع نمایی و تابع لگاریتمی

در این درس با توابع نمایی و لگاریتمی آشنا می شویم. شناخت این توابع جهت مدل سازی بسیاری از پدیده های طبیعی می تواند مفید باشد.

قسمت اول : تابع نمایی

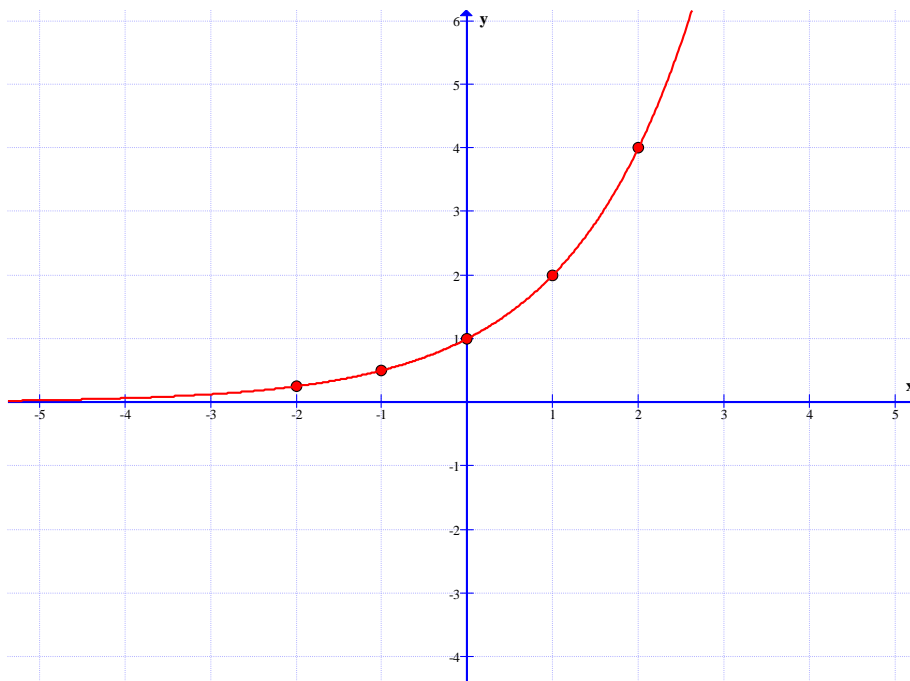
هر تابع به صورت $f(x) = a^x$ به شرط اینکه $a > 0$ و $a \neq 1$ را تابع نمایی می نامند.

مانند تابع $f(x) = 3^x$

تمرین ۱ : نمودار تابع $f(x) = 2^x$ را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

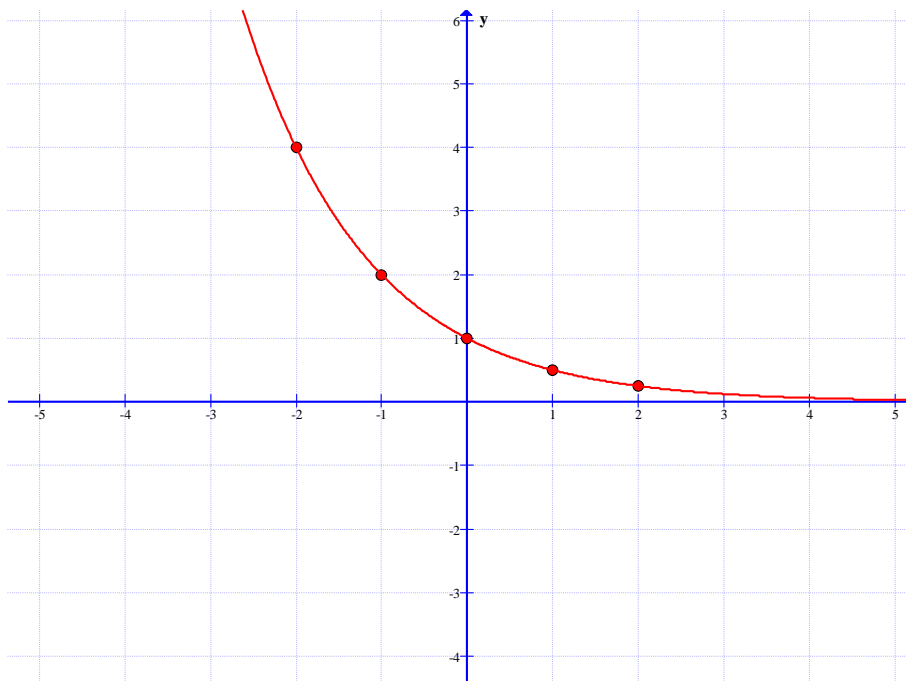
| | | | | | |
|-----|---------------|---------------|---|---|---|
| x | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |
| y | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | ۱ | ۲ | ۴ |



تمرین ۲: نمودار تابع $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید.

حل: ابتدا چند نقطه ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

| | | | | | |
|-----|----|----|---|---------------|---------------|
| x | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |
| y | ۴ | ۲ | ۱ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |



توجه: هر تابع با ضابطه ی $f(x) = ka^x$ که در آن $(k \neq 0, a > 0, a \neq 1)$ با تابع نمایی رفتاری مشابه

دارند و به همین دلیل می گویند، این توابع **رفتار نمایی** دارند. برای مثال، توابع $f(x) = 3 \times 2^x$ و

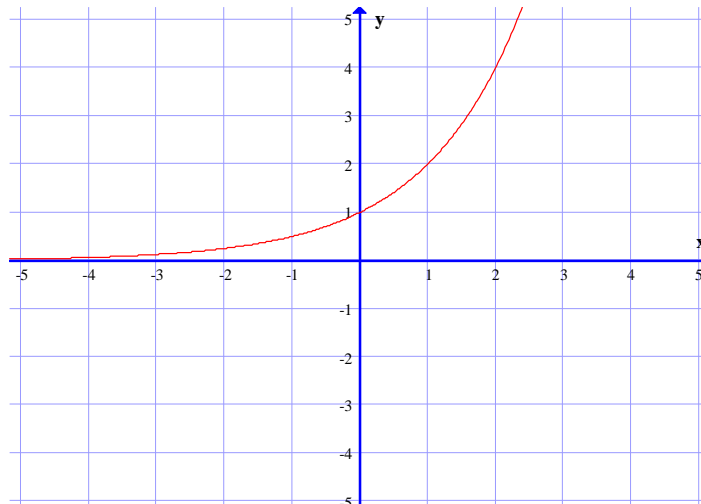
$g(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}$ رفتار نمایی دارند.

خواص تابع نمایی

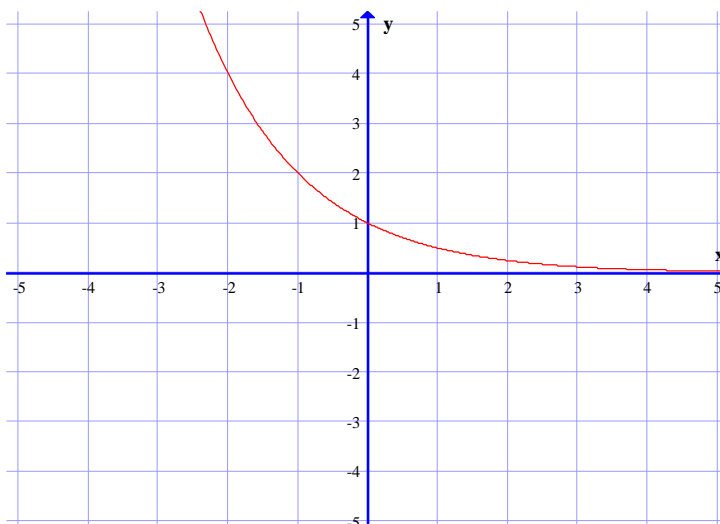
هر تابع نمایی به صورت $y = a^x$ دارای ویژگی های زیر است.

ویژگی اول :

اگر $a > 1$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره صعودی (افزایشی) است. یعنی با افزایش مقدار x ، مقادیر f افزایش می یابند.



همچنین اگر $0 < a < 1$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره نزولی (کاهشی) می باشد. یعنی با افزایش مقدار x ، مقادیر f کاهش می یابند.



اگر پایه ی تابع نمایی عدد نپرین ($e = ۲/۷۱$) باشد. تابع، را تابع نمایی طبیعی می نامند.

ویژگی دوم : هر تابع نمایی $y = a^x$ محور عرض ها را در نقطه ی $(۰, ۱)$ قطع می کند.

ویژگی سوّم: دامنه‌ی تابع نمایی $y = a^x$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است.

تمرین برای حل:

۳: تابع $y = (\sqrt{3})^x$ محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۴: تابع $y = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۵: نمودار تابع $y = x^2$ در چند نقطه نمودار تابع $y = 2^x$ را قطع می‌کند؟

۶: کدام یک از توابع زیر، یک تابع نمایی است؟

الف) $f(x) = x^3$ ب) $f(x) = (2x)^x$

ج) $f(x) = (\sqrt{2})^x$ د) $f(x) = (\sqrt{x})^3$

۷: در تابع $f(x) = a^x$

الف: اگر $a > 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر f می‌یابند.

ب: اگر $0 < a < 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر f می‌یابند.

ج: به ازای هر مقدار مثبت و مخالف یک a تابعی است.

۸: محل برخورد نمودار تابع $f(x) = 3^{2x+1}$ با محور عرض‌ها را به دست آورید.

۹: نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 1 + 2^x$

ب) $f(x) = 2^{x+1}$

ج) $f(x) = 2^{x-2}$

قسمت دوم : تابع لگاریتمی

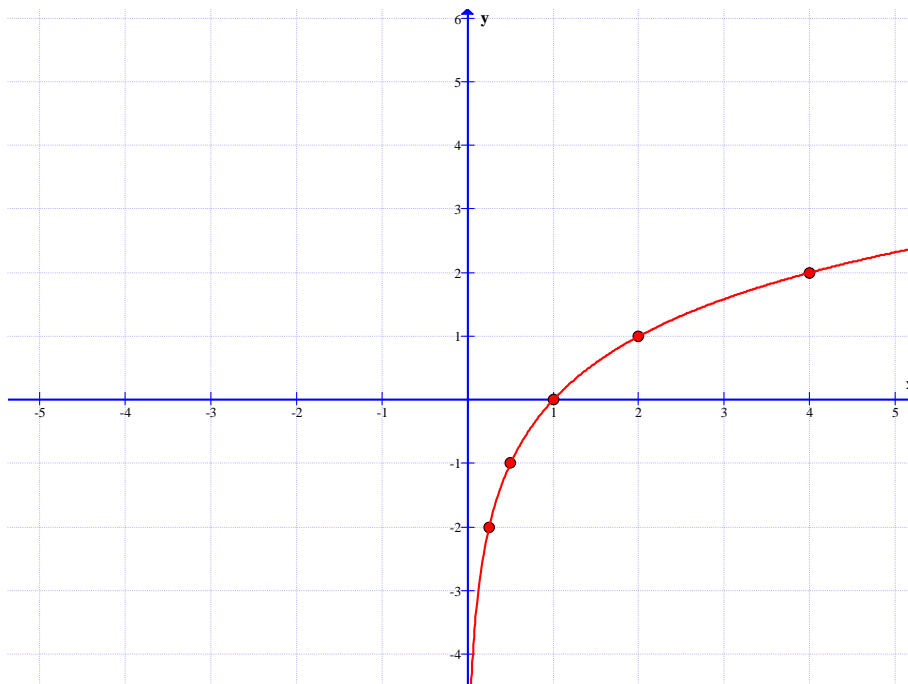
هر تابع به صورت $y = \log_a^x$ (به شرط اینکه $a > 0$ و $a \neq 1$ و $x > 0$) را یک تابع لگاریتمی می نامند.
مثال :

$$y = \log_4^x$$

تمرین ۱۰ : نمودار تابع $f(x) = \log_4^x$ را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

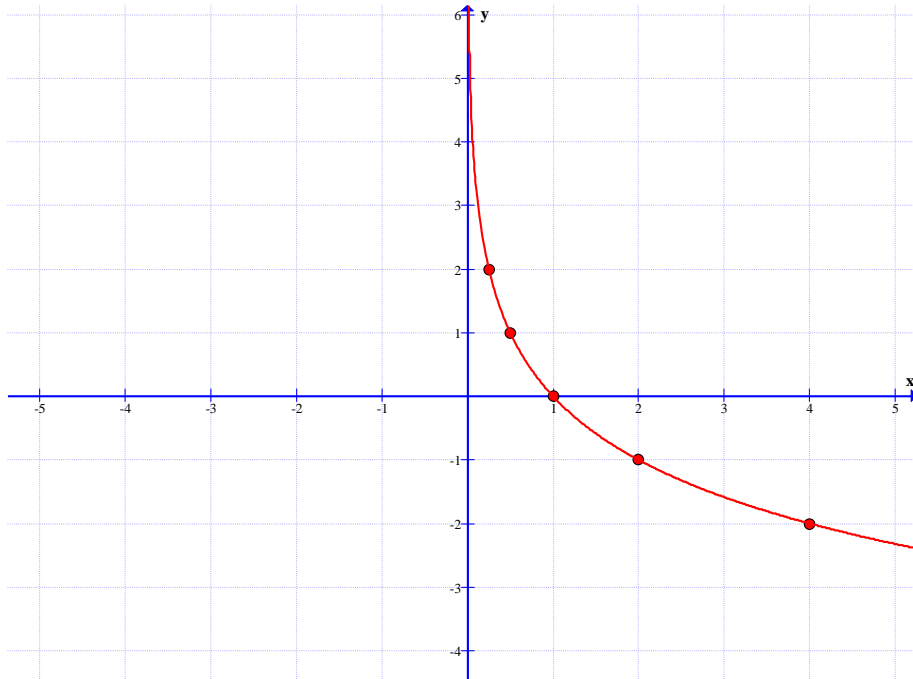
| | | | | | |
|-----|---------------|---------------|---|---|---|
| x | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | ۱ | ۲ | ۴ |
| y | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |



تمرین ۱۱ : نمودار تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}^x$ را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

| | | | | | |
|-----|---------------|---------------|---|----|----|
| x | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | ۱ | ۲ | ۴ |
| y | ۲ | ۱ | ۰ | -۱ | -۲ |

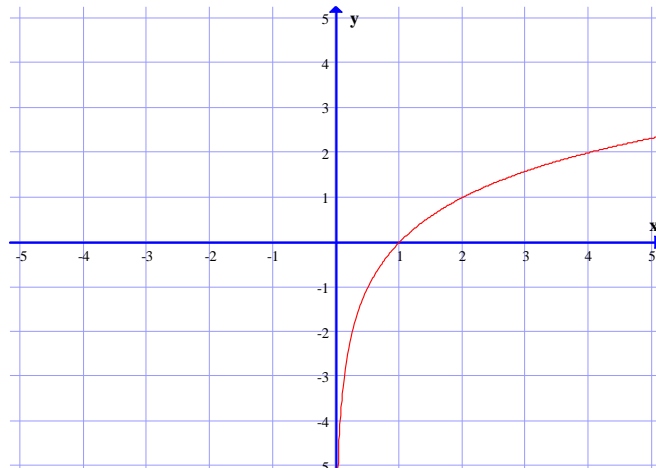


خواص تابع لگاریتمی

هر تابع لگاریتمی به صورت $y = \log_a x$ دارای ویژگی های زیر است.

ویژگی اول :

اگر $a > 1$ باشد، تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره صعودی (افزایشی) است. یعنی با افزایش مقدار x ، مقادیر f افزایش می یابند.

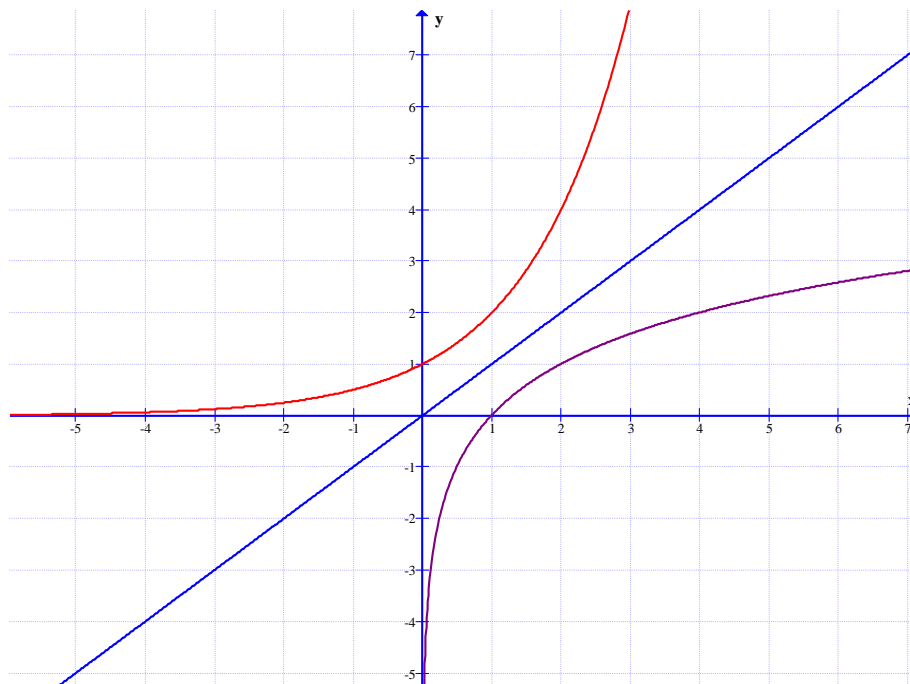


توجه ۱: تابع نمایی $y = a^x$ یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد. معکوس آن یک تابع لگاریتمی به صورت زیر است.

$$y = \log_a^x$$

لذا نمودار تابع نمایی $y = a^x$ و معکوس آن یعنی $y = \log_a^x$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه اند.

در زیر نمودار تابع $f(x) = 2^x$ و معکوس آن یعنی $g(x) = \log_2^x$ را مشاهده می کنید.



بنابراین اگر نقطه‌ی (b,c) روی تابع $y = a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه نقطه‌ی (c,b) روی نمودار $y = \log_a^x$ قرار دارد.

توجه ۲:

الف: اگر $a > 1$ با توجه به صعودی بودن دو تابع $f(x) = a^x$ و $f(x) = \log_a^x$ می توان نوشت:
 $a^x > a^y \rightarrow x > y$

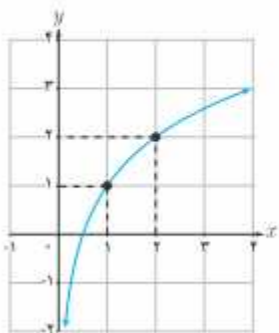
$$\log_a^x > \log_a^y \rightarrow x > y$$

ب: اگر $a > 1$ با توجه به نزولی بودن دو تابع $f(x) = a^x$ و $f(x) = \log_a^x$ می توان نوشت:
 $a^x > a^y \rightarrow x < y$

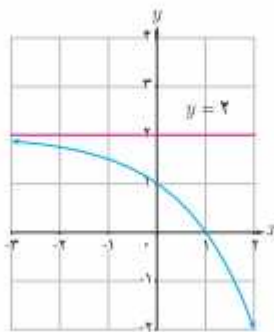
$$\log_a^x > \log_a^y \rightarrow x < y$$

تمرین ۱۷ : مشخص کنید، هر یک از نمودار های زیر به کدام یک از ضابطه های زیر تعلق دارد؟

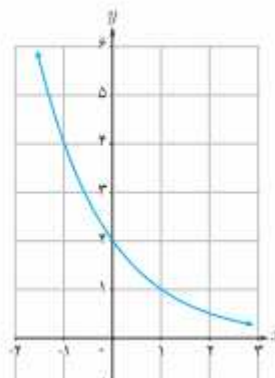
ب) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$



ب) $y = \log_2(x+1)$



الف) $y = -2^x + 2$



تمرین ۱۸ : خط $y = 27$ نمودار تابع $y = 3^x$ را در چه نقطه ای قطع می کند؟

تمرین ۱۹ : خط $y = 10$ نمودار تابع $y = (0.1)^x$ را در چه نقطه ای قطع می کند؟

تمرین ۲۰ : تعیین کنید که خط $y = \sqrt{7}$ ، نمودار تابع $y = 2^x$ را بین کدام دو عدد صحیح قطع می کند؟

تمرین برای حل :

۲۱ : درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید.

الف : دامنه ی توابع $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی اند.

ب : محل تقاطع نمودار تابع $y = 6^x$ با محور طولها نقطه ی $(6, 0)$ است.

پ : نقطه ی $(\frac{1}{3}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطه ی $y = 5^x$ قرار دارد.

۲۲ : اگر $f(x) = 3 - 2 \log_4 \left(\frac{x}{5} - 5\right)$ مقدار $f(42)$ را به دست آورید.

۲۳ : فرض کنیم که $f(x) = 4^x + 2$

الف : مقدار $f(-1)$ را به دست آورید. ب : اگر $f(x) = 66$ مقدار x چقدر است؟

ج : معکوس این تابع را بنویسید.

۲۴ : نقاط تقاطع دو تابع $y = \log_3^{x-1}$ و $y = 3$ را به دست آورید.

۲۵ : معادله ی $2x = 2^x$ را به هندسی (ترسیم توابع دو طرف تساوی) حل کنید.

۲۶ : نامعادله ی $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-4} > 2^{3x-7}$ را حل کنید.

قسمت سوم: حل چند مسئله‌ی کاربردی توابع نمایی و لگاریتمی

در این به دو مسئله‌ی کاربردی توابع نمایی و لگاریتمی اشاره می‌کنیم.

الف: مسائل مربوط به رشد باکتری

هر تابع به صورت $f(x) = ka^x$ (برای مقادیر مثبت و مخالف یک a) رفتار نمایی دارد. این تابع در بسیاری از مسائل اقتصاد و مهندسی کاربرد دارد.

تمرین ۲۷: یک نوع باکتری در دستگاه گوارش انسان زندگی می‌کند و تکثیر آن به صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می‌شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازه‌ی هر توده باکتری از t ساعت از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$p(t) = 100 \times 2^{2t} \quad (0 \leq t \leq 16)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری‌ها از بین نروند، تعداد باکتری‌ها در یک توده، پس از ۳ ساعت را به دست آورید.

حل:

$$p(3) = 100 \times 2^{2(3)} = 100 \times 64 = 6400$$

ب: مسائل مربوط به قدرت زلزله

زمانی زلزله به وقوع می‌پیوندد که انرژی از زمین آزاد شود. بین شدت نسبی زلزله (قدرت آن) بر حسب ریشتر و میزان انرژی آزاد شده از آن بر حسب ارگ (Erg) رابطه‌ی زیر وجود دارد.

$$\log E = 11/8 + 1/5M$$

که در آن M قدرت زلزله بر حسب ریشتر و E انرژی آزاد شده بر حسب ارگ می‌باشد^۱.

تمرین ۲۸: مقدار انرژی آزاد شده توسط زلزله‌ای به قدرت ۶/۶ ریشتر را به دست آورید.

^۱ ارگ یکای انرژی در دستگاه واحدهای سانتیمتر-گرم-ثانیه (CGS) است. ارگ برابر با کار انجام گرفته در بالا بردن جرمی برابر با یک هزارم گرم تا ارتفاع یک سانتیمتر است.

$$1 \text{ ژول} = 10^7 \text{ ارگ}$$

$$1 \text{ ارگ} = 10^{-7} \text{ ژول}$$

حل :

$$\log E = 11/8 + 1/5M = 11/8 + 1/5(6/6) = 21/7$$

$$\rightarrow \log E = 21/7 \rightarrow E = 10^{21/7} \text{ Erg}$$

تمرین ۲۹ : شدت زلزله ی ۱۳۶۹ رودبار ۷/۲ ریشتر گزارش شده است. مقدار تقریبی انرژی آزاد شده ی آن را بر حسب ارگ پیدا کنید.

حل:

$$\log E = 11/8 + 1/5M = 11/8 + 1/5(7/2) = 22/6$$

$$\rightarrow \log E = 22/6 \rightarrow E = 10^{22/6} \text{ Erg}$$

تمرین برای حل :

۳۰ : در دی ماه ۱۳۸۲ در شهرستان بم زلزله ای با قدرت ۶/۳ ریشتر به وقوع پیوست، محاسبه کنید که این زلزله چند ارگ انرژی آزاد کرده است؟

۳۱ : در آبان ماه ۱۳۹۶ در شهرستان کرمانشاه زلزله ای با قدرت ۷/۱ ریشتر به وقوع پیوست، محاسبه کنید که این زلزله چند ارگ انرژی آزاد کرده است؟

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان