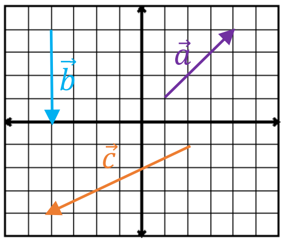
**درسنامه و نکات کلیدی** — **فصل پنجم** — **پایه هشتم**

**مسعود زیرکاری** — **(بردار و مختصات)** — **ناحیه یک زاهدان**

**بردار :** خط راست جهت داری است. برای نام گذاری بردار از دو حرف بزرگ انگلیسی یا یک حرف کوچک انگلیسی استفاده می شود.

**مختصات بردار :** برای به دست آوردن مختصات یک بردار از ابتدا طول (جهت افقی) سپس عرض (جهت عمودی) را به‌دست می آوریم.

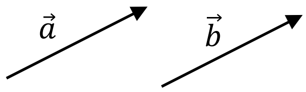
**مثال :** مختصات بردارهای زیر را بنویسید.



$$\vec{c} = \begin{bmatrix} -۶ \\ -۳ \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۴ \end{bmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

**دو بردار مساوی (هم سنگ) :** دو بردار در صورتی مساویند که : هم جهت و هم اندازه و موازی (هم راستا) باشند.

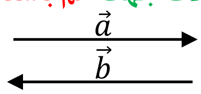
**مانند :** $\vec{a} = \vec{b}$





**دو بردار قرینه :** دو بردار در صورتی قرینه هم هستند که : هم اندازه و موازی ولی خلاف جهت هم باشند.

**مانند :**



**نکته :** حاصل جمع هر بردار با قرینه اش برابر با بردار صفر است : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{o}$

**جمع مختصاتی بردارها :** عددهای طول با طول و عددهای عرض با عرض جمع می شوند :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z \\ y + t \end{bmatrix}$$

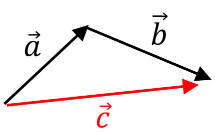
**مثال :** حاصل مختصات مقابل را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ -۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۸ \\ -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ + ۳ - ۸ \\ -۶ + ۲ - ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۹ \end{bmatrix}$$

**جمع بردارها (برآیند بردارها) :** برای جمع دو بردار از دو روش استفاده می شود :

**۱) روش مثلثی :** اگر دو بردار پشت سر هم باشند از این روش استفاده می شود و در این روش برای برآیند بردارها از ابتدا بردار اولی به انتها بردار دومی رسم می شود.

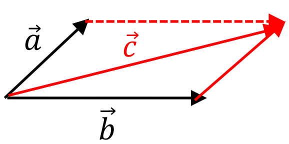
**مانند :**



$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ : تساوی جبری

**۲) روش متوازی الاضلاع :** اگر دو بردار پشت سر هم نباشند از انتهای یکی از دو بردار مساوی بردار بعدی رسم کرده تا دو بردار پشت سرهم شوند و در آخر از ابتدا دو بردار به انتهای بردار جدید رسم می کنیم. (قطر متوازی الاضلاع بردار برآیند است)

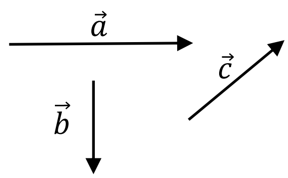
**مانند :**

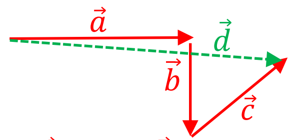


$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ : تساوی جبری

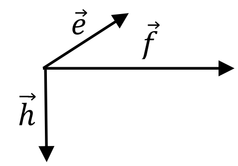
**مثال :** حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.

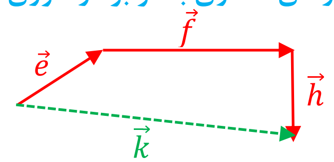
(بردارهای مساوی با هر بردار طوری رسم می کنیم که بردارها پشت سرهم باشند) :




تساوی جبری : $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$

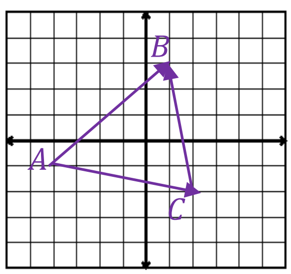



تساوی جبری : $\vec{e}+\vec{f}+\vec{h}=\vec{k}$

**مثال :** برای شکل زیر یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.

(در شکل دو بردار را طوری مشخص می کنیم که پشت سر هم باشند)




جمع برداری : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

جمع مختصاتی : $\begin{bmatrix}۶\\-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱\\۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\۴\end{bmatrix}$

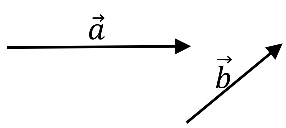


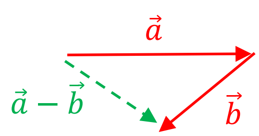
**تفریق دو بردار :** اگر بردار اول را با قرینه ی بردار دوم جمع کنیم ، تفریق دو بردار حاصل می شود : $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

**نکته :** در روش هندسی تفریق دو بردار ، می توان قرینه ی بردار دوّمی را پشت سر بردار اوّلی رسم کرد.

**مثال :** با توجه به بردارهای داده شده ، بردار $\vec{a}-\vec{b}$ را رسم کنید.

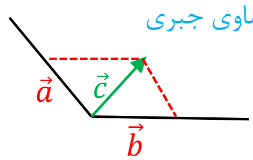
(از انتهای بردار $\vec{a}$ قرینه ی بردار $\vec{b}$ را رسم می کنیم)



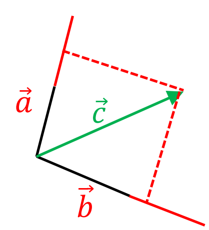




**تجزیه بردارها :** اگر بردار حاصل جمع را داشته باشیم از انتها آن بردار به موازات دو محور رسم کرده هر جا محور یا امتداد محور را قطع کرد انتهای دو بردار به دست می آید.

**مثال :** بردار $\vec{c}$ را در امتداد های رسم شده تجزیه کنید.




تساوی جبری : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$




تساوی جبری : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

**ضرب عدد در بردار :** در ضرب عدد در بردار آن عدد هم در طول و هم در عرض ضرب می شود : $k\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx\\ky\end{bmatrix}$

**مثال :** حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۲\begin{bmatrix}۴\\-۱\end{bmatrix}-۳\begin{bmatrix}۱\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸\\-۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳\\۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\۱۰\end{bmatrix}$$

$$-۵\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۵\\-۱۰\end{bmatrix}$$

**مثال :** اگر $\vec{a}=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}$ باشد. مختصات بردار $\vec{c}=۳\vec{a}-\vec{b}$ را به دست آورید.

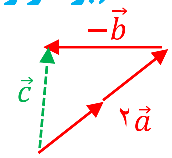
$$\vec{c}=۳\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\۹\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷\\۵\end{bmatrix}$$

**درسنامه و نکات کلیدی** **فصل پنجم** **پایه هشتم**

**مسعود زیرکاری** **(بردار و مختصات)** **ناحیه یک زاهدان**

**مثال :** بردار خواسته شده را رسم کنید.

$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$



$2\vec{a}$ (۲ برابر بردار $\vec{a}$ در همان جهت)

$-\vec{b}$ (۱ برابر بردار $\vec{b}$ درخلاف جهت)

**نکته :** دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}$ در صورتی موازی هستند که :

نماد موازی بودن

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{t}$ **یا** $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$

**مثال :** دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ x \end{bmatrix}$ موازیند. مقدار $x$ را به دست آورید.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{2}{-8} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{5 \times -8}{2} = -20$$

**نکته :** دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}$ در صورتی بر هم عمود هستند که :

نماد عمود بودن

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow xz + yt = 0$

**مثال :** دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ بر هم عمود هستند. مقدار $y$ را به دست آورید.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow -4 \times 6 = y \times 3 \Rightarrow 3y = -24 \Rightarrow y = -8$$

**معادله مختصاتی :** برای حل معادلات مختصاتی همانند معادلات معمولی عمل می کنیم :

۱) مجهول ها در سمت چپ و مختصات ها را به سمت راست منتقل می کنیم.



۲) حاصل مجهول ها و مختصات ها را به دست می آوریم.

۳) طول و عرض مختصات را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم.

**نکته :** در حل معادله مختصاتی عدد های معلوم یا مجهول از یک طرف تساوی به طرف دیگر منتقل شود علامت آن ها قرینه می شود.

**مثال :** معادلات مختصاتی زیر را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow -2\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 8 \div -2 \\ 4 \div -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$5\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \div 5 \\ 10 \div 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + 2x \Rightarrow \overset{\vec{x}}{\cancel{3\vec{x} - 2\vec{x}}} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**بردارهای واحد مختصات :** به دو بردار $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (واحد طول) و $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (واحد عرض) بردارهای واحد مختصات می گویند.

**نکته :** برای تبدیل یک بردار به بردار واحد مختصات کافی است عدد طول مختصات را ضریب $\vec{i}$ و عدد عرض مختصات را ضریب $\vec{j}$ قرار دهیم.

**درسنامه و نکات کلیدی** — **فصل پنجم** — **پایه هشتم**

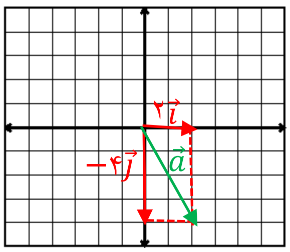
**مسعود زیرکاری** — **(بردار و مختصات)** — **ناحیه یک زاهدان**

**مثال :** بردارهای زیر را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 4\vec{i} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} = -5\vec{j} \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$$

**مثال :** مختصات بردار $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ را نوشته سپس بردار $\vec{a}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$




**مثال :** اگر $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ باشد. مختصات بردار $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$ را بنویسید.

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

**مثال :** معادلات مختصاتی زیر را حل کنید.

$$2\vec{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j} \Longrightarrow 2\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \div 2 \\ 2 \div 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} + 3\vec{i} = 2\vec{x} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \overset{-\vec{x}}{\cancel{\vec{x} - 2\vec{x}}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -6 \div -1 \\ 6 \div -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$