درس اوّل : معادلات درجه ی دوّم و روش های حل آنها

در سال های قبل با معادله‌ی درجه‌ی اوّل و روش حل آن آشنا شده اید. در این درس معادله‌ی درجه‌ی دوّم را معرفی و روش های حل آن را بیان می کنیم.

قسمت اوّل : معادله‌ی درجه‌ی دوّم

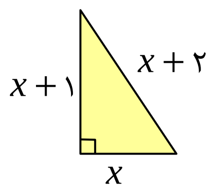
هر معادله که پس از ساده کردن به صورت $ax^{۲}+bx+c=۰$ (که در آن $a\neq ۰$ باشد.) درآید، را معادله ی درجه‌ی دوّم می نامند. در این معادله c و b و a را ضرایب معادله می گویند.

تمرین ۱ : نشان دهید که معادله‌ی زیر یک معادله ی درجه‌ی دوّم است. سپس ضرایب آن را تعیین کنید.

$$(۲x+۱)^{۲}=(۳-۲x)^{۲}+۵(x-۱)(x+۱)$$

تمرین۲ : نشان دهید که برای پاسخ به این سئوال که،« کدام اعداد صحیح متوالی می توانند اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشند؟ » از معادله ی درجه دوّم استفاده می شود. این معادله را بنویسید.

حل : چون اضلاع مثلث قائم الزاویه، متوالی می باشند، لذا آنها را x و $x+۱$ و $x+۲$ قرار می دهیم. چون طول ضلع مثلث، مثبت است، لذا $x+۲$ وتر است. همچنین طبق قضیه‌ی فیثاغورس می توان نوشت:



$$x^{۲}+(x+۱)^{۲}=(x+۲)^{۲}$$
$$\rightarrow x^{۲}+x^{۲}+۲x+۱=x^{۲}+۴x+۴$$
$$\rightarrow x^{۲}-۲x-۳=۰$$

***

قسمت دوّم : روش های حل معادله ی درجه‌ی دوّم

منظور از حل یک معادله‌ی درجه‌ی دوّم تعیین ریشه[1] های آن است. برای حل یک معادله‌ی درجه‌ی دوم روش های مختلفی وجود دارد. در اینجا ، دو روش متداول را به طور خلاصه توضیح می دهیم.

روش اوّل: تجزیه

می دانیم که اگر حاصل ضرب دو عدد صفر باشد. حداقل یکی از آنها صفر است.

---

1. ریشه ، عددی است که به ازای آن معادله برقرار باشد.

$$A\times B=۰\to\begin{cases}A=۰\\B=۰\end{cases}$$

بر این اساس اگر تمام جملات معادله را به طرف اوّل منتقل کنیم و سپس در صورت امکان به کمک یکی از روش های تجزیه عبارت طرف اوّل را تجزیه نماییم. با استفاده از الگوی فوق می توان ریشه های معادله را تعیین کرد.

تمرین۳ : معادله‌ی $x^{۲}-۳x=-۲$ را حل کنید.

حل : پس از منتقل کردن تمام جملات به طرف اوّل معادله، به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک عبارت طرف اول را تجزیه می کنیم.

$$x^{۲}-۳x=-۲\to x^{۲}-۳x+۲=۰\to(x-۱)(x-۲)=۰$$

پس داریم:

$$\begin{cases}x-۱=۰\to x=۱\\x-۲=۰\to x=۲\end{cases}$$

تمرین۴ : معادله های زیر را به کمک تجزیه حل نمایید.

۱) $۵x^{۲}+۳۰x=۰$ ۳) $۲۵t^{۲}+۱۰t+۱=۰$ ۵) $۴k^{۲}-۹=۰$

۲) $m^{۲}-۳۶=۰$ ۴) $x^{۲}-۱۱x+۳۰=۰$ ۶) $۷x^{۲}+۵x-۲=۰$

تمرین۵ : معادله‌ی درجه‌ی دوّمی بنویسید که ریشه های آن ۳ و ۱- باشند.

حل:

$$\begin{cases}x=-۱\to x+۱=۰\\x=۳\to x-۳=۰\end{cases}\to(x+۱)(x-۳)=۰\to x^{۲}-۲x-۳=۰$$

***

روش دوّم: مربع کامل کردن

واضح است که برای هر عدد حقیقی A و هر عدد حقیقی و غیر منفی B می توان نوشت:

$$A^{۲}=B\to A=\pm\sqrt{B}\to\begin{cases}A=+\sqrt{B}\\A=-\sqrt{B}\end{cases}$$

توجه : اگر عدد B یک عدد منفی باشد. تساوی نادرست است. (چرا ؟)

بر این اساس می توان معادلات درجه‌ی دوّمی که یک طرف آنها مربع کامل باشد را حل کرد.

تمرین۶ : در هر مورد مقدار x را بیابید.

۱) $x^{۲}=۲۵$

۲) $(x-۳)^{۲}=۱۶$

۳) $(x+۲)^{۲}=۰$

۴) $(۲x-۱)^{۲}=۸$

۵) $(x+۵)^{۲}=-۹$

حل :

۱)

$$x^{۲}=۲۵\rightarrow x=\pm\sqrt{۲۵}\rightarrow\begin{cases}x=+۵\\x=-۵\end{cases}$$

۲)

$$(x-۳)^{۲}=۱۶\rightarrow x-۳=\pm\sqrt{۱۶}\rightarrow\begin{cases}x-۳=۴\rightarrow x=۷\\x-۳=-۴\rightarrow x=-۱\end{cases}$$

۳)

$$(x+۲)^{۲}=۰\rightarrow x+۲=۰\rightarrow x=-۲$$

۴)

$$(۲x-۱)^{۲}=۸\rightarrow ۲x-۱=\pm\sqrt{۸}\rightarrow\begin{cases}۲x-۱=۲\sqrt{۲}\rightarrow x=\dfrac{۱+۲\sqrt{۲}}{۲}\\[2mm]۲x-۱=-۲\sqrt{۲}\rightarrow x=\dfrac{۱-۲\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}$$

۵) تساوی درست نیست. لذا نمی توان مقداری برای x با این شرایط پیدا کرد.

بر این اساس اگر با انجام عملیاتی ، شرایطی فراهم شود که طرف اوّل معادله مربع باشد، می توان به کمک الگوی فوق ریشه های معادله را تعیین کرد.

تمرین ۷ : معادله‌ی $x^{۲}=۶x+۷$ را حل کنید.

حل :

$$x^۲=۶x+۷\rightarrow x^۲-۶x=۷\xrightarrow{+۹}x^۲-۶x+۹=۷+۹\rightarrow (x-۳)^۲=۱۶$$

$$\rightarrow x-۳=\pm۴\rightarrow\begin{cases} x-۳=۴\rightarrow x=۷\\ x-۳=-۴\rightarrow x=-۱\end{cases}$$

تمرین ۸ : معادله‌ی $۴x^۲-۱۲x+۵=۰$ را حل کنید.

حل :

$$۴x^۲-۱۲x+۵=۰\xrightarrow{+۹}۴x^۲-۱۲x+۹=-۵+۹\rightarrow (۲x-۳)^۲=۴\rightarrow ۲x-۳=\pm۲$$

$$\rightarrow\begin{cases} ۲x-۳=۲\rightarrow ۲x=۵\rightarrow x=\frac{۵}{۲}\\ ۲x-۳=-۲\rightarrow ۲x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

توجه : برای هر معادله به صورت $x^۲+px=q$ می توان با اضافه کردن مقدار $(\frac{p}{۲})^۲$ به دو طرف تساوی، طرف اوّل را به مربع کامل تبدیل کرد.

$$x^۲+px=q\xrightarrow{+(\frac{p}{۲})^۲}x^۲+px+(\frac{p}{۲})^۲=q+(\frac{p}{۲})^۲\rightarrow (x+\frac{p}{۲})^۲=\frac{p^۲+۴q}{۴}$$

حال اگر مقدار $\frac{p^۲+۴q}{۴}$ منفی نباشد، معادله دارای جواب است. در این صورت می توان نوشت:

$$x+\frac{p}{۲}=\pm\sqrt{\frac{p^۲+۴q}{۴}}\rightarrow x=-\frac{p}{۲}\pm\sqrt{\frac{p^۲+۴q}{۴}}\rightarrow x=\frac{-p\pm\sqrt{p^۲+۴q}}{۲}$$

تمرین۹ : معادله‌ی $x^۲-۳x+۲=۰$ را حل کنید.

حل :

$$x^۲-۳x+۲=۰\rightarrow x^۲-۳x=-۲\xrightarrow{+(\frac{-۳}{۲})^۲=\frac{۹}{۴}}x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}=-۲+\frac{۹}{۴}\rightarrow (x-\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$\rightarrow x-\frac{۳}{۲}=\pm\frac{۱}{۲}\rightarrow\begin{cases}x-\frac{۳}{۲}=+\frac{۱}{۲}\rightarrow x=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=۲\\ x-\frac{۳}{۲}=-\frac{۱}{۲}\rightarrow x=\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}=۱\end{cases}$$

تمرین ۱۰ : ریشه های معادله‌ی زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$x^{۲}+۶x+۱۲=۰$$

حل :

$$x^{۲}+۶x+۱۲=۰\rightarrow x^{۲}+۶x=-۱۲$$

$$\xrightarrow{+(\frac{۶}{۲})^{۲}=۹}x^{۲}+۶x+۹=-۱۲+۹\rightarrow(x+۳)^{۲}=-۳$$

و لذا معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

***

تمرین برای حل :

۱۱ : معادله های زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

۱) $x^{۲}-۱۲x-۶۴=۰$

۲) $k^{۲}+۶k-۱۶=۰$

۳) $x^{۲}+۴x=۸$

۴) $m^{۲}-۳m+۵=۰$

۵) $۲x^{۲}-x-۱۰=۰$

۶) $۲۵t^{۲}=-۴۰t-۱۶$

***

حل معادله‌ی درجه‌ی دوّم در حالت کلی (روش کلاسیک)

با توجه به آنچه که در روش دوّم یعنی مربع کامل کردن بحث شد ، می توان هر معادله‌ی درجه دوّم به شکل

$$ax^{۲}+bx+c=۰$$

را به روش زیر حل کرد.

$$ax^{۲}+bx+c=۰\xrightarrow{\div a}\frac{ax^{۲}}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{۰}{a}\rightarrow x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰$$

$$\to x^{۲}+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}\xrightarrow{\div(\frac{b}{a}\div ۲)^{۲}=\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}}x^{۲}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}=-\frac{c}{a}+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}$$

$$\to (x+\frac{b}{۲a})^{۲}=-\frac{۴ac}{۴a^{۲}}+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}\to (x+\frac{b}{۲a})^{۲}=\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}\to x+\frac{b}{۲a}=\pm\sqrt{\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}}$$

$$\to x+\frac{b}{۲a}=\pm\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}\to x=-\frac{b}{۲a}\pm\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}\to x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

حال اگر عبارت $b^{۲}-۴ac$ را برابر Δ قرار دهیم و آنرا **مبین معادله** بنامیم، واضح است که در صورتی معادله دارای جواب است که Δ منفی نباشد.

بطور کلی در این روش مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم.

۱) با نوشتن معادله به صورت استاندارد، ضرایب معادله یعنی c و b و a را مشخص می کنیم. (ضریب $x^{۲}$ را a، ضریب x را b و عدد ثابت را c می گیریم.)

۲) مبین معادله یعنی $\Delta=b^{۲}-۴ac$ را محاسبه می کنیم.

۳) با توجه به علامت Δ تعداد و مقدار ریشه ها را به کمک حالت های زیر تعیین می کنیم.

اگر $\Delta>۰$ باشد، معادله دارای دو ریشه است. مقدار این ریشه ها را از تساوی های زیر محاسبه می کنیم.

$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\quad \text{و} \quad x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر $\Delta=۰$ باشد، معادله دارای فقط یک ریشه (ریشه‌ی مضاعف[۲]) است. مقدار این ریشه را از تساوی زیر محاسبه می کنیم.

$$x=\frac{-b}{۲a}$$

اگر $\Delta<۰$ باشد، معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

***

[2]. ریشه ی مکرر مرتبه ی دوّم

تمرین۱۲: معادله های زیر را حل کنید.

۱) $۲x^{۲}-۵x+۲=۰$ ‏ ۲) $۲۵t^{۲}=-۴۰t-۱۶$ ‏ ۳) $m^{۲}-۳m+۵=۰$

حل :

۱)

$a=۲$ و $b=-۵$ و $c=۲$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۵)^{۲}-۴(۲)(۲)=۲۵-۱۶=۹$$

لذا معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است.

$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۵)+\sqrt{۹}}{۲(۲)}=\frac{۵+۳}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

$$x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۵)-\sqrt{۹}}{۲(۲)}=\frac{۵-۳}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۲) ابتدا با مرتب کردن جملات ، معادله را به صورت کلی (استاندارد) می نویسیم.

$$۲۵t^{۲}=-۴۰t-۱۶\rightarrow ۲۵t^{۲}+۴۰t+۱۶=۰$$

$a=۲۵$ و $b=۴۰$ و $c=۱۶$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۴۰)^{۲}-۴(۲۵)(۱۶)=۱۶۰۰-۱۶۰۰=۰$$

لذا معادله دارای یک ریشه (ریشه‌ی مضاعف) است.

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴۰}{۲(۲۵)}=\frac{-۴۰}{۵۰}=-\frac{۴}{۵}$$

۳)

$$m^{۲}-۳m+۵=۰$$

$a=۱$ و $b=-۳$ و $c=۵$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۳)^{۲}-۴(۱)(۵)=۹-۲۰=-۱۱$$

لذا معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

***

تمرین۱۳ : مقدار m را طوری بیابید که معادله‌ی زیر ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

$$2x^2-5x+m=0$$

حل :

$a=2$ و $b=-5$ و $c=m$

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(2)(m)=25-8m$$

$$\Delta<0\rightarrow 25-8m<0\rightarrow m>\frac{-25}{-8}\rightarrow m>\frac{25}{8}$$

تمرین۱۴ : معادله های زیر را حل کنید.

$$nx^2-(m+n^2)x+mn=0 \qquad , \quad n\neq 0$$

حل : واضح است که $a=n$ و $b=-(m+n^2)$ و $c=mn$ پس:

$$\Delta=b^2-4ac=[-(m+n^2)]^2-4(n)(mn)=m^2+2mn^2+n^4-4mn^2$$

$$=m^2-2mn^2+n^4=(m-n^2)^2$$

لذا $\Delta\geq 0$ یعنی معادله دو ریشه‌ی حقیقی یا ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(m+n^2)\pm(m-n^2)}{2n}$$

$$\rightarrow\left\langle\begin{array}{l} x_1=\dfrac{m+n^2+m-n^2}{2n}=\dfrac{2m}{2n}=\dfrac{m}{n}\\ x_2=\dfrac{m+n^2-m+n^2}{2n}=\dfrac{2n^2}{2n}=n\end{array}\right.$$

حل چند تمرین کاربردی :

۱۵ : دانش آموزان کلاس از دبیر حسابان، سنش را پرسیدند. پاسخ داد : ۲۱ سال بعد، سن من توان دوّم سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. تعیین کنید که این دبیر چند سال سن دارد؟

حل : سن دبیر را x فرض می کنیم. در این صورت :

$$x+21=(x-21)^2\rightarrow x^2-42x+441=x+21$$

$$\rightarrow x^{۲}-۴۳x+۴۲۰=۰ \xrightarrow{\Delta=(-۴۳)^{۲}-۴(۱)(۴۲۰)=۱۸۴۹-۱۶۸۰=۱۶۹} \begin{cases} x_{۱}=\frac{۴۳+۱۳}{۲}=۲۸ \\ x_{۲}=\frac{۴۳-۱۳}{۲}=۱۵ \end{cases}$$

ریشه‌ی $x=۱۵$ قابل قبول نیست، زیرا دبیر صحبت از ۲۱ سال پیش می کند. لذا سن او کمتر از ۲۱ نیست.

۱۶: از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر ، می خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

حل : اگر طول این مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم. در این صورت می توان نوشت:

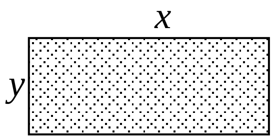
محیط $۲(x+y)=۵۰ \rightarrow x+y=۲۵ \rightarrow y=۲۵-x$

مساحت $xy=۱۴۴ \rightarrow x(۲۵-x)=۱۴۴ \rightarrow x^{۲}-۲۵x+۱۴۴=۰$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۲۵)^{۲}-۴(۱)(۱۴۴)=۶۲۵-۵۷۶=۴۹$$

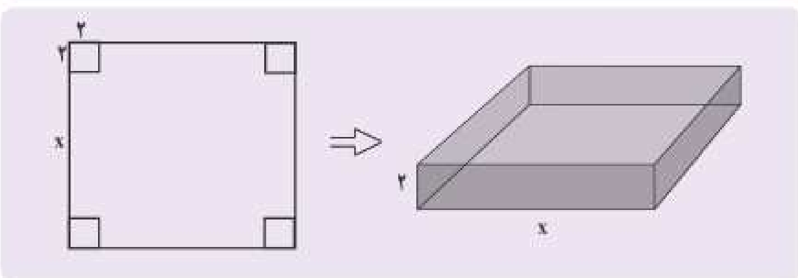
$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۲۵+۷}{۲}=\frac{۳۲}{۲}=۱۶$$

$$x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۲۵-۷}{۲}=\frac{۱۸}{۲}=۹$$



واضح است که اگر طول مستطیل ۱۶ باشد، عرض آن ۹ می شود. بنابر این در هر حالت یک مستطیل با این مشخصات وجود دارد.

۱۷ : با یک دستگاه برش ، یک صفحه ی مقوایی به شکل مربع را برش می زنیم. سپس چهار مربع کوچک در گوشه های آن جدا می کنیم. بعد با تا زدن لبه ها ، یک جعبه می سازیم. اگر مربع های جدا شده به ضلع ۲ سانتی متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه ، ۲۰۰ سانتی متر مکعب باشد، طول اضلاع مقواهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل : از مقوایی که در شکل بالا رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی متر جدا می کنیم تا جعبه ای که سمت راست رسم شده است به دست آید. حجم این جعبه عبارت است از :

$$\text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = (x)(x)(۲) = ۲x^{۲}$$

از طرفی طبق مسئله حجم جعبه برابر ۲۰۰ سانتی متر مکعب می باشد. پس می توان نوشت:

$$۲x^{۲} = ۲۰۰ \rightarrow x^{۲} = ۱۰۰ \rightarrow x = \pm ۱۰$$

توجه داشته باشید که چون x طول ضلع مکعب است، پس نمی تواند منفی باشد ، پس فقط جواب $x = ۱۰$ قابل قبول است . لذا جواب مسئله یعنی ضلع مقوا می شود.

$$x + ۲ + ۲ = ۱۰ + ۲ + ۲ = ۱۴$$

۱۸ : مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

حل : این دو عدد را x و $x + ۲$ قرار می دهیم. پس می توان نوشت:

$$x^{۲} + (x + ۲)^{۲} = ۲۹۰$$

$$x^{۲} + x^{۲} + ۴x + ۴ = ۲۹۰ \rightarrow ۲x^{۲} + ۴x - ۲۸۶ = ۰ \rightarrow x^{۲} + ۲x - ۱۴۳ = ۰$$

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (۲)^{۲} - ۴(۱)(-۱۴۳) = ۵۷۶$$

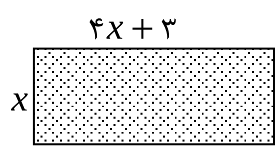
$$x_{۱} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۲ + ۲۴}{۲} = \frac{۲۲}{۲} = ۱۱$$

$$x_{۲} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۲ - ۲۴}{۲} = \frac{-۲۶}{۲} = -۱۳$$

پس این اعداد می توانند ۱۱ و ۱۳ یا ۱۳- و ۱۱- باشند.

۱۹ : طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

حل : عرض مستطیل را برابر x قرار می دهیم. در این صورت داریم.



$$x(۴x + ۳) = ۴۵$$

$$۴x^{۲} + ۳x - ۴۵ = ۰$$

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (۳)^{۲} - ۴(۴)(-۴۵) = ۹ + ۷۲۰ = ۷۲۹$$

$$x_{۱} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۳+۲۷}{۸} = \frac{۲۴}{۸} = ۳$$

$$x_{۲} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۳-۲۷}{۸} = \frac{-۳۰}{۸} = -۳/۷۵ \quad \text{غ ق ق}$$

پس اندازه‌ی عرض مستطیل برابر ۳ سانتی متر می باشد و لذا اندازه‌ی طول آن ۱۵می شود.

۲۰ : اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است.

حل : اگر سن برادر بزرگ را x و سن برادر کوچک را y فرض کنیم. در این صورت داریم.

$$x - y = ۴$$

لذا :

$$x = y + ۴$$

از طرفی چون در چهار سال دیگر ، سن هر یک ۴ سال اضافه می شود. لذا حاصل ضرب سن چهار سال دیگر آنها می شود $(x+۴)(y+۴)$. پس طبق مسئله می توان نوشت :

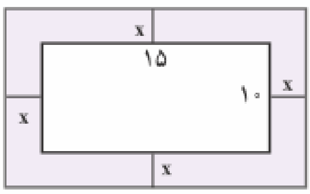
$$(x+۴)(y+۴) = ۶۰$$

در نتیجه :

$$(x+۴)x = ۶۰ \rightarrow x^{۲} + ۴x - ۶۰ = ۰ \rightarrow (x-۶)(x+۱۰) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = -۱۰ \\ x = ۶ \end{cases}$$

و چون سن نمی تواند عدد منفی باشد، لذا $x = ۶$ (سن برادر بزرگ) قابل قبول است. پس سن برادر کوچک $y = ۶ - ۴ = ۲$ می شود.

۲۱ : یک عکس به اندازه‌ی۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب را پیدا کنید.



حل : با توجه به شکل، واضح است که ابعاد قاب

برابر $۱۵+۲x$ و$۱۰+۲x$می باشند. پس مساحت آن می شود.

$$(۱۵+۲x)(۱۰+۲x) = ۳۰۰$$

پس :

$$(۱۵+۲x)(۱۰+۲x)=۳۰۰ \rightarrow ۴x^۲+۵۰x+۱۵۰=۳۰۰ \rightarrow ۴x^۲+۵۰x-۱۵۰=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} ۲x^۲+۲۵x-۷۵=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(۲۵)^۲-۴(۲)(-۷۵)=۶۲۵+۶۰۰=۱۲۲۵$$

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲۵+۳۵}{۴}=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵$$

$$x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲۵-۳۵}{۴}=\frac{-۶۰}{۴}=-۱۵ \quad \text{غ ق ق}$$

لذا ابعاد این قاب می شود :

طول $۱۵+۲x=۱۵+۲(۲/۵)=۲۰$

عرض $۱۰+۲x=۱۰+۲(۲/۵)=۱۵$

۲۲ : در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم های تیمگـان، تنهـا یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم های این تیمگان را به دست آورید.

حل : تعداد بازی های بین n تیم برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است. لذا می توان نوشت:

$$\frac{n(n-۱)}{۲}=۴۵$$

$$\rightarrow n^۲-n-۹۰=۰ \rightarrow (n-۱۰)(n+۹)=۰ \rightarrow \begin{cases} n=۱۰ \\ n=-۹ \end{cases}$$

و چون تعداد بازی ها ، یک عدد طبیعی است لذا $n=۱۰$ قابل قبول است.

***

تمرین برای حل:

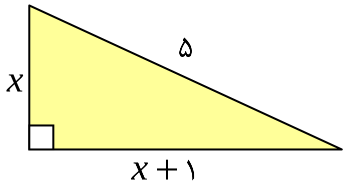
۲۳: تعیین کنید که هر کدام از معادله های زیر ریشه دارند یا نه، درصورت وجود، تعداد آنها را نیز تعیین کنید.

ج) $x^۲+۲x=-۱$ ب) $t^۲+۴t=-۱$ الف) $۵x^۲+۴x+۱=۰$

۲۴ : دو برابر یک عدد به علاوه‌ی عدد چهار، مساوی با مجذور همان عدد است. آن عدد را پیدا کنید.

۲۵ : به کمک تشکیل معادله و حل آن یک عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب اعداد طبیعی قبل و بعد از آن ۲۴ باشد.

۲۶ : با توجه به شکل زیر مقدار x را بدست آورید.



۲۷ : مساحت باغچه‌ای مستطیل شکل ۳۲۰ متر مربع است.اگر طول این باغچه ۴ متر بیشتر از عرض آن باشد، طول و عرض باغچه را پیدا کنید.

۲۸ : دو عدد صحیح متوالی پیدا کنید که مجموع مربعات آنها ۶۱ باشد.

۲۹ : دو عدد زوج متوالی پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۷۲۸ باشد.

۳۰ : تفاضل دو عدد صحیح ۴ است و مجموع مربعات آنها ۱۳۶ است. آن دو عدد را حساب کنید.

۳۱ : طول ضلع مربعی را پیدا کنید که عدد مربوط به مساحت آن با عدد مربوط به محیط آن برابر باشند.

۳۲ : مقدار m را طوری بیابید که معادله‌ی $x^۲ - (m+۲)x + ۲m = ۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

۳۳ : مقدار k را طوری پیدا کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد.

$$x^۲ - x - ۲k = ۰$$

۳۴ : مقدار m را طوری پیدا کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد.

$$(m-۱)x^۲ - ۲mx + m + ۲ = ۰$$

۳۵ : معادله های زیر را حل کنید.

۱) $۳r^۲ - ۷r + ۲ = ۰$

۲) $p^۲ + ۹ = ۶p$

۳) $k^۲ + ۵ = ۰$

۴) $\frac{۱}{۳}t^۲ - \frac{۱}{۲}t - \frac{۳}{۲} = ۰$

۵) $k^۲x^۲ + ۸kx + ۷ = ۰ \quad , \quad k \neq ۰$

۶) $4m^2x^2 + 2mx - 2 = 0 \quad , \quad m \neq 0$

۷) $x^2 - (k+2)x + 2k = 0$

۸) $mnx^2 - (m^2 + n^2)x + mn = 0 \quad , \quad mn \neq 0$

***

تهیه کننده: جابرعامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

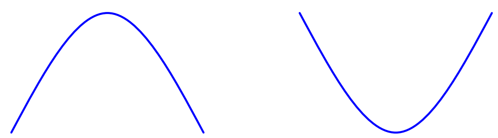
سایت : www.mathtower.ir کانال تلگرام : @amerimath

درس دوّم : سهمی

در این درس با نمودار هایی موسوم به سهمی آشنا می شویم. آشنایی با سهمی و معادله‌ی آن و درک خواص آن منجر به درک مفاهیم دیگری در ریاضیات می گردد.

قسمت اوّل : معرفی سهمی

هر معادله به شکل $(a \neq 0)$ $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ یک سهمی می نامند. نمودار سهمی ، یک منحنی غیر مستقیم بوده و همواره به یکی از حالت های زیر است.



برای رسم نمودار سهمی به ترتیب زیر عمل می کنیم.

الف : ابتدا ریشه‌ی عبارتی که توان دوّم دارد را تعیین می کنیم. سپس جدولی تنظیم می کنیم و با انتخاب یک نقطه با طول بیشتر از این ریشه و نقطه‌ی دیگر با طول کمتر از ریشه‌ی بدست آمده، حداقل سه نقطه در جدول تعیین می کنیم.

ب : نقاط به دست آمده را در دستگاه محور های مختصات تعیین نموده و نمودار را رسم می کنیم.

توجه : در صورت لزوم معادله‌ی داده شده را به صورت اتحاد مربع تبدیل می کنیم.

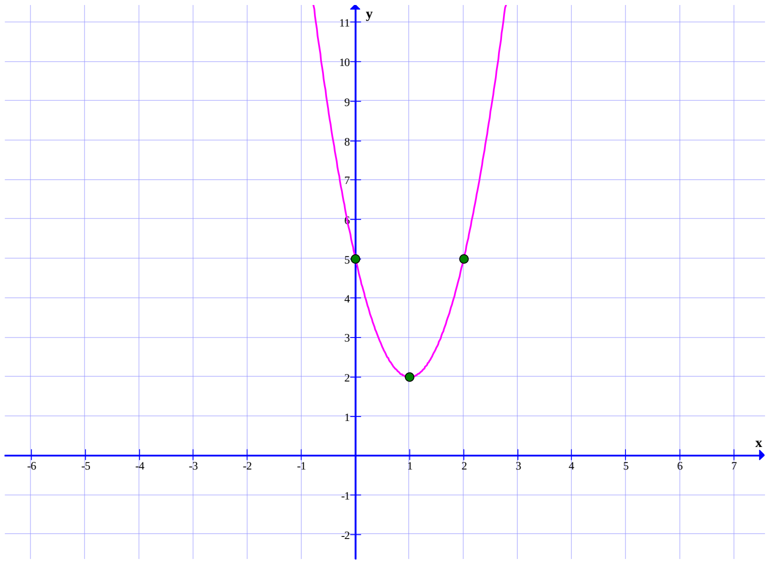
مثال : نمودار سهمی به معادله‌ی $y = 3(x-1)^2 + 2$ را رسم کنید.

حل : ابتدا ریشه‌ی عبارت دارای توان دوّم را تعیین می کنیم.

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

سپس دو نقطه را چنان انتخاب می کنیم که طول یکی بیشتر و طول دیگری کمتر از طول این نقطه باشند. با تعیین عرض این نقاط و یافتن آنها در دستگاه مختصات نمودار سهمی بدست می آید.

x	۰	۱	۲
y	۵	۲	۵



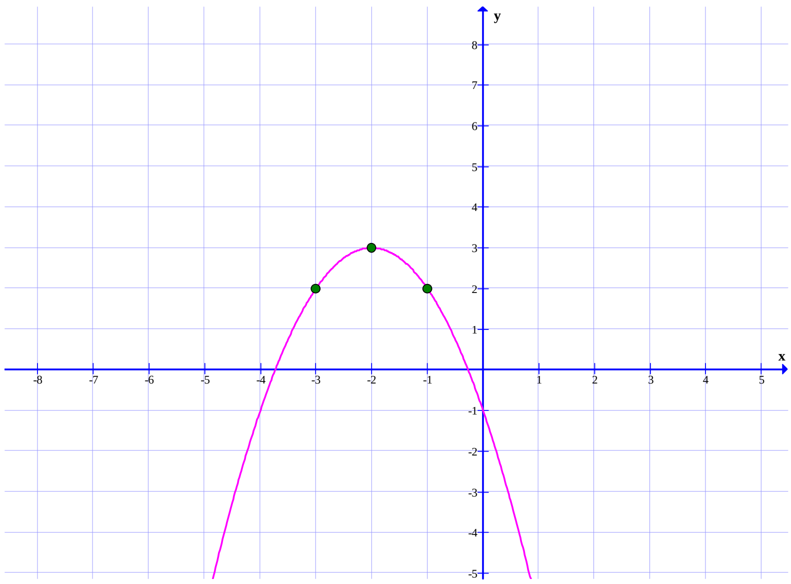
مثال : نمودار سهمی به معادله‌ی $y=-(x+۲)^۲+۳$ را رسم کنید.

حل : ابتدا ریشه‌ی عبارت دارای توان دوّم را تعیین می کنیم.

$x+۲=۰ \rightarrow x=-۲$

سپس دو نقطه را چنان انتخاب می کنیم که طول یکی بیشتر و طول دیگری کمتر از طول این نقطه باشند. با تعیین عرض این نقاط و یافتن آنها در دستگاه مختصات نمودار سهمی بدست می آید.

x	-۳	-۲	-۱
y	۲	۳	۲



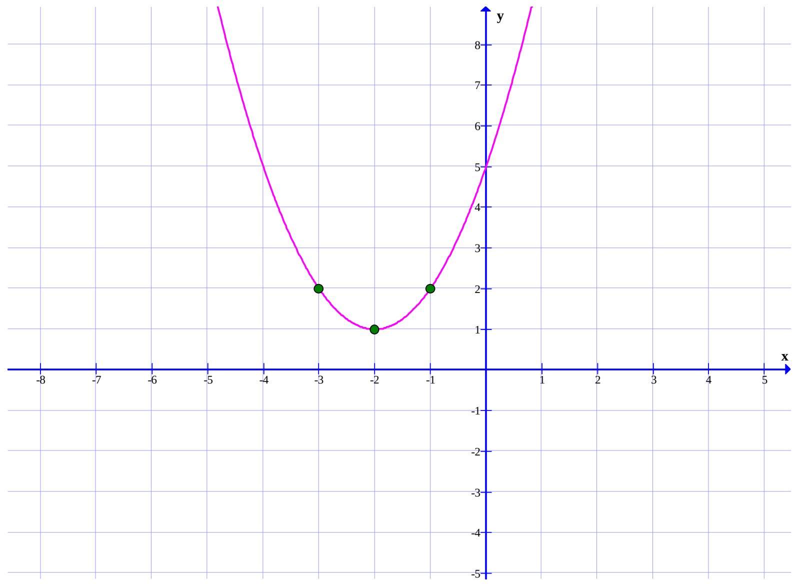
مثال : نمودار سهمی به معادله‌ی $y = x^{۲} + ۴x + ۵$ را رسم کنید.

حل : ابتدا معادله را به صورت استاندارد، تبدیل می کنیم.

$$y = x^{۲} + ۴x + ۴ + ۱ \rightarrow y = (x+۲)^{۲} + ۱$$

سپس مانند تمرین های قبل عمل می کنیم.

x	-۳	-۲	-۱
y	۲	۱	۲



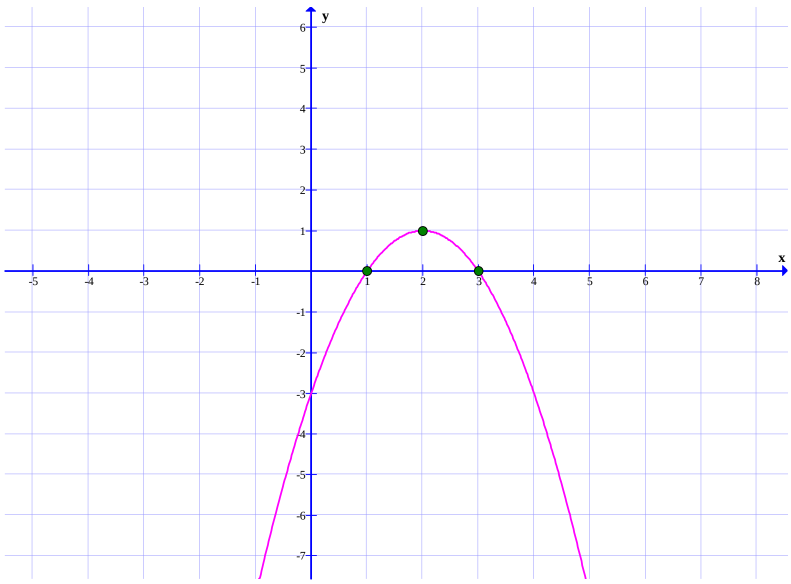
مثال : نمودار سهمی به معادله‌ی $y = -x^{۲} + ۴x - ۳$ را رسم کنید.

حل : ابتدا معادله را به صورت استاندارد، تبدیل می کنیم.

$$y = -x^{۲} + ۴x - ۳ \rightarrow y = -(x^{۲} - ۴x + ۳) = -(x^{۲} - ۴x + ۴ - ۱) = -(x-۲)^{۲} + ۱$$

سپس مانند تمرین های قبل عمل می کنیم.

x	۱	۲	۳
y	۰	۱	۰

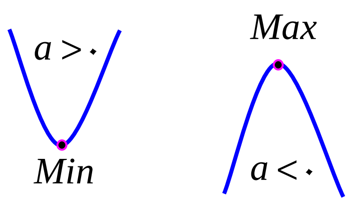


***

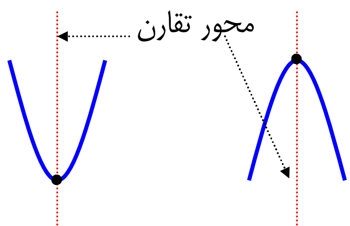
قسمت دوّم : ویژگی های سهمی

نمودار هر سهمی به صورت $y = a(x-\alpha)^{۲} + \beta$ ، یا دارای بالاترین یا پایین ترین نقطه می باشد کـه آن را رأس سهمی می نامند. به سهولت معلوم است که مختصات این نقطه به شکل (α,β) می باشد.

الف : اگر $a > ۰$ باشد، نمودار سهمی رو به بالا (دارای می نیمم) و اگر $a < ۰$ باشد، نمودار سهمی رو به پایین (دارای ماکزیمم) است.



ب : نمودار سهمی دارای یک محور تقارن است که معادله ی آن بصورت $x = \alpha$ مـی باشـد و لـذا همـواره موازی محور y ها است.



برای رسم نمودار سهمی کافی است که علاوه بر رأس سهمی دو نقطه را چنان انتخاب کنیم که طـول یکـی بیشتر و طول دیگری کمتر از طول رأس سهمی باشد.

توجه : اگر معادله‌ی سهمی به صورت $y=ax^{2}+bx+c$ باشد، در این صورت به روش زیر می توان آن را به شکل $y=a(x-\alpha)^{2}+\beta$ تبدیل کرد.

$$y=ax^{2}+bx+c=a(x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

$$=a(x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{2}}{4a^{2}}-\frac{b^{2}}{4a^{2}}+\frac{c}{a})$$

$$=a((x+\frac{b}{2a})^{2}+\frac{-b^{2}+4ac}{4a^{2}})=a(x+\frac{b}{2a})^{2}+\frac{-b^{2}+4ac}{4a}$$

$$=a(x+\frac{b}{2a})^{2}-\frac{b^{2}-4ac}{4a}$$

در این صورت $x=\frac{-b}{2a}$ طول و $y_{0}=-\frac{b^{2}-4ac}{4a}$ عرض رأس سهمی است.[1] همچنین معادله‌ی محور تقارن آن بصورت $x=\frac{-b}{2a}$ می باشد. با این شرایط می توان برای رسم نمودار سهمی بدون تبدیل به مربع کامل کردن از این فرمول ها استفاده کرد.

مثال : نمودار سهمی $y=x^{2}-6x+7$ زیر را رسم کنید.

حل : ابتدا طول نقطه‌ی رأس سهمی را تعیین می کنیم.

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-6)}{2}=3$$

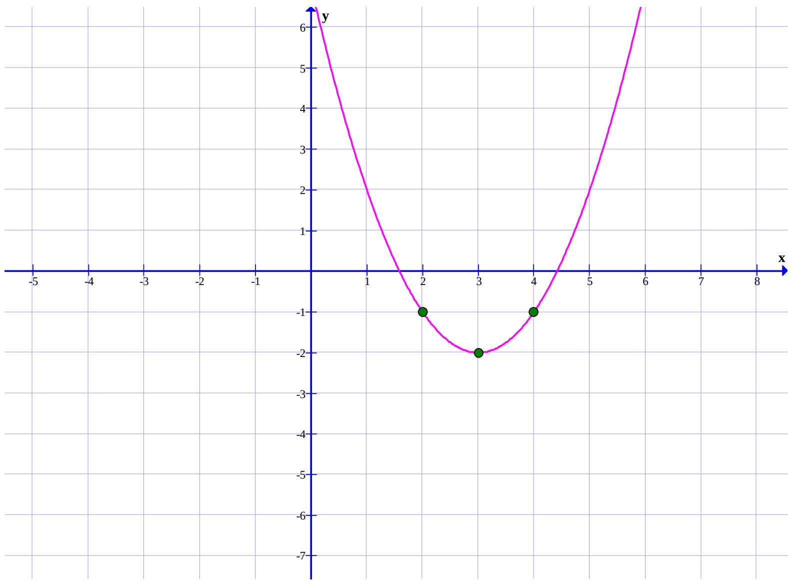
سپس جدول زیر را تشکیل می دهیم.

x	۲	۳	۴
y	۱-	۲-	۱-

و در نهایت نمودار سهمی را ترسیم می کنیم.

---

[1] . می توان از رابطه‌ی $x_{0}=\frac{-b}{2a}$ ابتدا طول و سپس با جایگزینی طول بدست آمده در معادله، عرض رأس سهمی را به دست آورد.



مثال: سهمی به معادله‌ی $y=۲x^{۲}-۸x+۱$ داده شده است.

الف : مختصات رأس سهمی را بدست آورید.

ب : تعیین کنید که رأس سهمی نقطه‌ی Min است یا Max .

ج : معادله‌ی محور تقارن سهمی را بنویسید.

حل:

$$y=۲x^{۲}-۸x+۱ \quad \rightarrow a=۲ \ \ , \ \ b=-۸ \ \ , \ \ c=۱$$

طول رأس سهمی $\quad x_{\circ}=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{+۸}{۲(۲)}=\dfrac{۸}{۴}=۲$

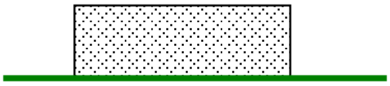
عرض رأس سهمی $\quad y_{\circ}=۲(۲)^{۲}-۸(۲)+۱=۸-۱۶+۱=-۷$

مختصات رأس سهمی $\quad S(۲,-۷)$

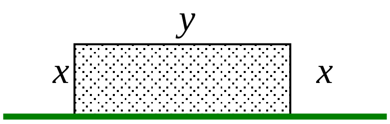
چون a مثبت است، پس رأس سهمی نقطه‌ی Min نمودار آن می باشد.

معادله ی محور تقارن $\quad x=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{+۸}{۲(۲)}=\dfrac{۸}{۴}=۲ \rightarrow x=۲$

مثال : بیشترین مساحت قطعه زمینی مستطیل شکل در کنـار دریـا که می توان آن را فقط با ۱۲۰ متر، نرده محصور کرد، چقدر است؟



حل :



$y+۲x=۱۲۰ \rightarrow y=۱۲۰-۲x$

$S=xy$ مساحت مستطیل

$S=x(۱۲۰-۲x) \rightarrow S(x)=۱۲۰x-۲x^۲$

معادله‌ی به دست آمده ، یک سهمی است و در آن $a=-۲<۰$ می باشـد. پـس معادلـه‌ی سـهمی، دارای بیشترین مقدار است. بیشترین مقدار را به روش زیر تعیین می کنیم.

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲۰}{۲(-۲)}=۳۰$$

$$S_{Max}=۱۲۰(۳۰)-۲(۳۰)^۲=۳۶۰۰-۱۸۰۰=۱۸۰۰\ m^۲$$

توجه : مقدار مساحت را پس از تعیین مقدار x نیز می توان به شکل زیر به دست آورد.

$$y=۱۲۰-۲(۳۰)=۶۰$$

$$S=xy=(۳۰)(۶۰)=۱۸۰۰\ m^۲$$

***

تمرین برای حل :

۱ : نمودار معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $y=-(x-۱)^۲+۱$

ب) $y=-x^۲+۴x$

ج) $y=x^۲-۲x-۳$

د) $y=-۴x^۲+۸x+۱$

۲ : سهمی به معادله‌ی $y=-۳x^۲+۶x$ داده شده است.

الف : مختصات رأس سهمی را بدست آورید.

ب : تعیین کنید که رأس سهمی نقطه‌ی Min است یا Max .

ج : معادله‌ی محور تقارن سهمی را بنویسید.

۳ : مقدار m را چنان بیابید که $x=۲$ طول رأس سهمی به معادله‌ی $y=mx^{۲}+(m-۱)x+۱$ باشد.

۴ : کمترین مقدار سهمی به معادله‌ی $y=۳x^{۲}-۱۲x+۵$ را تعیین کنید.

۵ : بیشترین مقدار سهمی به معادله‌ی $y=-x^{۲}+۴x+۱$ را محاسبه کنید.

۶ : عدد ۱۰ را به دو قسمت چنان تبدیل کنید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

۷ : اگر $۳x+۵y=۱۵۰$ مقدار y و x را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

۸ : اگر $(-۲,۵)$ و $(۰,۵)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله‌ی خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

۹ : اگر نمودار یک سهمی محور y ها را در نقطه ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاطی به طـول ۱- و ۲ قطع کرده باشد.

الف : معادله‌ی سهمی را بنویسید. ب : نمودار سهمی را رسم کنید.

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath

درس سوّم : تعیین علامت

در این درس با یکی از مفاهیم کاربردی ریاضی تحت عنوان تعیین علامت عبارت های جبری آشنا می شوید. درک این مفهوم و آشنایی با روش های تعیین علامت ، می تواند کمک های مؤثری در شناخت و درک دیگر مفاهیم ریاضی از جمله حل نامعادلات داشته باشد.

قسمت اوّل : مفهوم تعیین علامت

منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری این است که تعیین کنیم، عبارت داده شده در چه فاصله ای مثبت، در چه فاصله ای منفی و به ازای چه عدد یا اعدادی صفر می شود.

برای مثال عبارت $p=-۳x+۶$ به ازای هر عدد بزرگتر از ۲ منفی ، به ازای هر عدد کمتر از ۲ مثبت و به ازای ۲ صفر می شود. به جدول زیر دقت کنید.

x	$x<۲$	$x=۲$	$x>۲$
$p=-۳x+۶$	$+$	$\circ$	$-$

قسمت دوّم : روش های تعیین علامت

روش تعیین علامت دو جمله ای درجه‌ی اوّل

برای تعیین علامت عبارت دو جمله ای درجه‌ی اوّل به شکل $ax+b$ به ترتیب زیر عمل می کنیم.

ابتدا عبارت داده شده را برابر صفر قرار می دهیم و ریشه‌ی معادله‌ی بدست آمده را تعیین کرده و از جدول زیر به عنوان الگو استفاده می کنیم.

x	$-\infty$	$x_\circ$	$+\infty$
$p=ax+b$	مخالف علامت a	$\circ$	موافق علامت a

تمرین ۱ : عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p=-۳x+۶$$

حل :

$-۳x+۶=۰ \rightarrow x=۲$

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
$p=-۳x+۶$		$+$	۰	$-$	

تمرین برای حل :

۲ : هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$۱)\ p=۵x+۲۰$

$۲)\ p=-\frac{۱}{۲}x+۷$

$۳)\ p=۴-\frac{۱}{۳}x$

$۴)\ p=\frac{۴x-۲}{۵}$

تذکر ۱ : اگر عبارتی به صورت حاصل ضرب یا تقسیمی از دو یا چند عبارت دو جمله ای درجه‌ی اوّل باشد، برای تعیین علامت آن به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱ : ریشه های هر یک از عوامل آن را تعیین می کنیم.

۲ : جدولی تنظیم می کنیم و در سطر اوّل آن ریشه های هر یک از عوامل را از کوچک به بزرگ می نویسیم.

۳ : در هر سطر دیگر جدول علامت هر عامل را تعیین می کنیم.

۴ : در نهایت علامت تمام عوامل را ضرب می کنیم. (توجه داشته باشید که حاصل یک عبارت جبری به ازای ریشه های صورت برابر صفر می باشد ولی به ازای ریشه های مخرج یک عبارت جبری تعریف نشده (نامعین) است.

تمرین ۳ : عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p=(x-۱)(۶-۲x)$$

حل:

$x-۱=۰ \rightarrow x=۱$

$۶-۲x=۰ \to x=۳$

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$x-۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$۶-۲x$		$+$		$+$	۰	$-$	
$p=(x-۱)(۶-۲x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

تمرین۴ : عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A=\dfrac{x-۱}{۵-۲x}$ ب) $B=x^{۳}(۲x-۶)^{۲}(۷-x)$

تذکر۲ : اگر عبارتی به دو یا چند عبارت درجه‌ی اوّل قابل تجزیه باشد. پس از تجزیه‌ی آن به عبارت های درجه‌ی اوّل به روش فوق تعیین علامت می شود.

تمرین۵ : عبارت $p=\dfrac{۴-x^{۲}}{x+۳}$ را تعیین علامت کنید.

حل:

$$p=\frac{۴-x^{۲}}{x+۳}=\frac{(۲-x)(۲+x)}{x+۳}$$

$۲-x=۰ \to x=۲$

$۲+x=۰ \to x=-۲$

$x+۳=۰ \to x=-۳$

x	$-\infty$		-۳		-۲		۲		$+\infty$
$۲-x$		$+$		$+$		$+$	۰	$-$	
$۲+x$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x+۳$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$p=\dfrac{۴-x^{۲}}{x+۳}$		$+$	نامعین	$-$	۰	$+$	۰	$-$	

تمرین برای حل :

۶ : هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$۱)\ A=\dfrac{(۳-x)(۱-x)}{(۲-x)(۱-۲x)}$

$۲)\ B=x^{۳}-۷x^{۲}+۶x$

$۳)\ C=(x-۱)(x^{۲}-۱۰x+۲۵)$

$۴)\ D=\dfrac{۷x^{۲}+۶x}{|-۲x+۱|}=$

$۵)\ E=\dfrac{x-۵}{x^{۳}-۴x}$

$۶)\ F=\dfrac{۳x+۶}{۹x-x^{۳}}$

***

روش تعیین علامت سه جمله ای درجه‌ی دوّم

برای تعیین علامت یک عبارت سه جمله ای درجه‌ی دوّم به شکل $ax^{۲}+bx+c$ به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱ : عبارت داده شده را برابر صفر قرار می دهیم.

۲ : با توجه به وجود یا عدم وجود ریشه و یا تعداد ریشه ها، از یکی از جدول های زیر استفاده می کنیم.

الف : اگر معادله دو ریشه داشته باشد.

x	$-\infty$		$x_۱$		$x_۲$		$+\infty$
$p=ax^{۲}+bx+c$		موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	

ب : اگر معادله یک ریشه (ریشه‌ی مضاعف) داشته باشد.

x	$-\infty$		$x_۰$		$+\infty$
$p=ax^{۲}+bx+c$		موافق علامت a	۰	موافق علامت a	

ج : اگر معادله ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

x	$-\infty$			$+\infty$
$p=ax^{۲}+bx+c$		موافق علامت a	موافق علامت a	

تمرین ۷ : هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$۱)\ p=-x^{۲}+x+۲$ $\qquad$ $۲)\ p=x^{۲}-۶x+۹$ $\qquad$ $۳)\ p=x^{۲}-x+۳$

حل :

۱)

$$-x^{۲}+x+۲=۰\xrightarrow{\Delta=b^{۲}-۴ac=۱+۸=۹}\begin{cases}x_{۱}=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-۱+۳}{-۲}=-۱\\[2mm] x_{۲}=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-۱-۳}{-۲}=۲\end{cases}$$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
$p=-x^{۲}+x+۲$		$-$	0	$+$	0	$-$	

۲)

$$x^{۲}-۶x+۹=۰\xrightarrow{\Delta=b^{۲}-۴ac=۳۶-۳۶=۰}x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۶}{۲}=۳$$

x	$-\infty$		۳		$+\infty$
$p=x^{۲}-۶x+۹$		$+$	0	$+$	

۳)

$x^{۲}-x+۳=۰\xrightarrow{\Delta=b^{۲}-۴ac=۱-۱۲=-۱۱}$ معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

x	$-\infty$			$+\infty$
$p=x^{۲}-x+۳$		$+$	$+$	

تمرین برای حل :

۸ : هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$۱)\ p = ۳x^{۲} - ۴x + ۱$

$۲)\ p = ۶ - ۴t^{۲}$

$۳)\ p = ۱ + k + k^{۲}$

$۴)\ p = -۲۵ + ۱۰x - x^{۲}$

$۵)\ p = \dfrac{۳ - x^{۲}}{(۱ - x)(x^{۲} - ۵x + ۶)}$

$۶)\ p = \dfrac{۳x^{۲} - ۴x - ۴}{۱ - x}$

$۷)\ p = \dfrac{۳x^{۲} - ۵x^{۳}}{x - ۲}$

$۸)\ P = \dfrac{-۵}{۹x - x^{۳}}$

نتیجه : با توجه به آنچه که برای تعیین علامت عبارت درجه‌ی دوّم $P = ax^{۲} + bx + c$ گفته شد، مـی توان نتیجه گرفت که

الف : شرط اینکه عبارت $P = ax^{۲} + bx + c$ همواره مثبت باشد، این است که

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a > ۰ \end{cases}$$

ب : شرط اینکه عبارت $P = ax^{۲} + bx + c$ همواره منفی باشد، این است که

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a < ۰ \end{cases}$$

تمرین ۹ : نشان دهید که عبارت $P = -۵x^{۲} + x - ۳$ همواره منفی است.

تمرین ۱۰ : نشان دهید که عبارت $P = x^{۲} + ۲x + ۳$ همواره مثبت است.

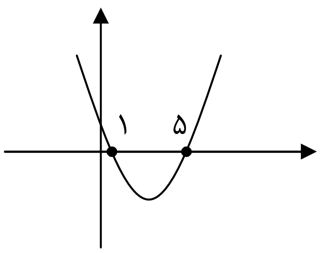
تمرین ۱۱ : مقدار m را طوری بیابید که عبارت $P = (m - ۱)x^{۲} + ۳x + ۱$ همواره مثبت باشد.

***

قسمت سوّم : رابطه‌ی بین علامت یک عبارت جبری و نمودار آن

می دانیم که هر نقطه که روی محور طول ها قرار دارد، عرض آن برابر صفر است. بر این اساس مـی تـوان نتیجه گرفت که اگر نمودار یک عبارت محور طول ها را قطع کند، مقدار آن عبارت در آن نقطه برابر صفر می شود. لذا طول نقطه ی برخورد نمودار هر عبارت ، برابر ریشه ی معادله‌ی نظیر آن خواهد بود. همچنین واضح است که اگر نمودار عبارتی در یک فاصله بالای محور طول ها قرار گیرد، آن عبارت مثبت و اگر پایین محور طول ها قرار گیرد، آن عبارت منفی خواهد شد.

برای مثال متناظر با نمودار مقابل می توان جدول زیر را تنظیم کرد.

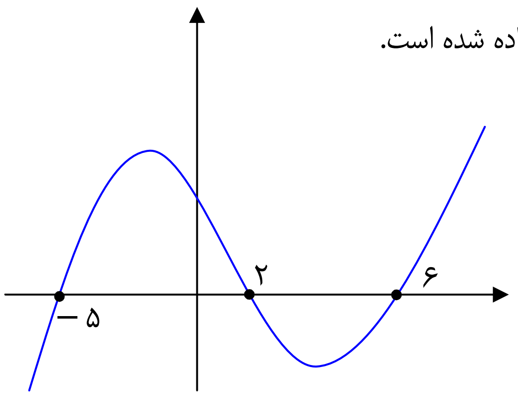


x	$-\infty$		۱		۵		$+\infty$
y		+	۰	−	۰	+	

تمرین ۱۲ : نمودار معادله $y=P$ به صورت زیر داده شده است.

الف : ریشه های معادله‌ی $P=0$ را بنویسید.

ب : جدول تعیین علامت $y=P$ را رسم کنید.

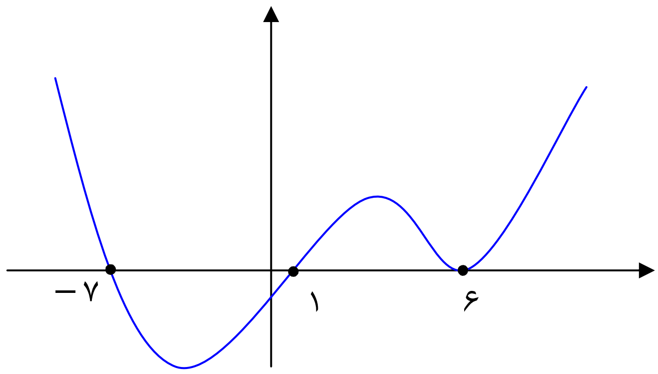


توجه : اگر در نقطه ای نمودار عبارت $y=P$ بر محور طول ها مماس شود، گویند معادله‌ی $P=0$ در آن نقطه دارای ریشه‌ی مضاعف است.

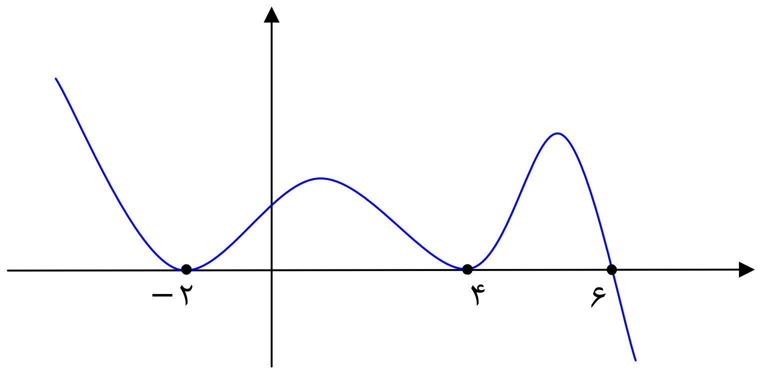
تمرین ۱۳ : نمودار معادله‌ی $y = P$ به صورت زیر داده شده است.

الف : ریشه های معادله‌ی $P = ۰$ را بنویسید. کدام ریشه مضاعف است؟

ب : جدول تعیین علامت $y = P$ را رسم کنید.



تمرین ۱۴ : با توجه با نمودار زیر تعیین کنید که معادله‌ی $y = ۰$ چند ریشه‌ی مضاعف دارد؟ آنها را بنویسید.



تمرین ۱۵ : مقدار k را طوری بیابید که نمودار معادله‌ی $y = -x^۲ + x - k$ همواره در زیر محور x ها قرار گیرد؟

تمرین ۱۶ : مقدار k را طوری بیابید که نمودار معادله‌ی $y = ۲k\,x^۲ - x + ۱$ همواره در بالای محور x ها قرار گیرد؟

تمرین ۱۷ : مقدار m را طوری بیابید که نمودار معادله‌ی $y = (m - ۱)x^۲ + x - ۱$ همواره در زیر محور x ها قرار گیرد؟

***

قسمت چهارم : روش سریع تعیین علامت عبارت های جبری (بدون استفاده از جدول)

برای این کار به ترتیب زیر عمل کنید.

۱ : عبارت داده شده را تجزیه کنید و ریشه های هر یک از عوامل را تعیین کنید.

۲ : ریشه ها را روی محور اعداد حقیقی درج کنید.

۳ : یک عدد غیر از ریشه های بدست آمده را انتخاب و در عبارت جبری داده شده، جایگزین کرده و علامت عدد حاصل را تعیین کنید.

۴ : علامت عدد حاصل را در قسمتی از محور که عدد انتخابی در آن است، قرار دهید.

۵ : با عبور از ریشه های ساده علامت ها را تغییر دهید و با عبور از ریشه ی مضاعف علامت را تغییر ندهید.

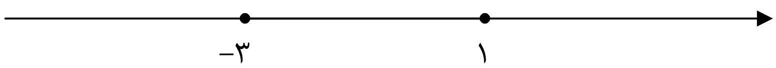
توجه کنید که یک عبارت کسری به ازای ریشه های مخرج آن نامعین است.

مثال ۱ : عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p=(x-۱)(۶+۲x)$$

حل :

$$p=(x-۱)(۶+۲x)=۰\rightarrow x=۱ \ \ or \ \ x=-۳$$

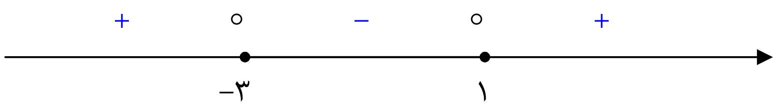


اکنون عددی غیر از ریشه های فوق انتخاب می کنیم و آن را در عبارت داده شده جایگزین می کنیم.

مثلاً : $x=۰$

$$\rightarrow p\big|_{x=۰}=(۰-۱)(۶+۲(۰))=-۱\times ۶=-۶$$

پس علامت این عبارت در فاصله‌ی $(-۳,۱)$ منفی است. با تغییر این علامت ، پس از عبور از ریشه ها علامت دیگر فاصله ها نیز تعیین می شود. توجه داشته باشید که این دو ریشه ساده هستند.



مثال۲ : عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p=\frac{۴x^{۲}-x^{۴}}{x+۳}$$

حل :

$$p=\frac{x^{۲}(۴-x^{۲})}{x+۳}=\frac{x^{۲}(۲-x)(۲+x)}{x+۳}$$

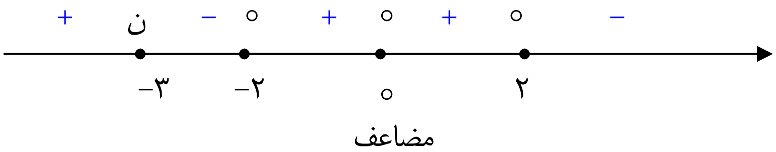
$x^{۲}=۰\rightarrow x=۰$ ریشه‌ی مضاعف

$$p(۱)=\frac{۱\times ۳}{۴}>۰$$

$۲-x=۰\rightarrow x=۲$

$۲+x=۰\rightarrow x=-۲$

$x+۳=۰\rightarrow x=-۳$



❋❋❋

تمرین برای حل :

۱۸ : عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $A=-x^{۲}+x+۲$

۲) $B=(x^{۲}-۹)(۳x-۱)$

۳) $C=\dfrac{x(x-۳)^{۲}}{x^{۲}+x-۲}$

۴) $D=\dfrac{-x^{۲}+۶x-۹}{x^{۲}+x+۳}$

۵) $E=\dfrac{(x-۱)^{۲}(۳-x)}{x+۲}$

۶) $F=\dfrac{(۳x-x^{۲}+۱۰)(x-۱)^{۴}(x-\sqrt{۳})}{(x-۳)^{۲}}$

❋❋❋

قسمت پنجم : حل نامعادلات

با نامعادله قبلاً آشنا شده اید و می دانید که نامساوی

$$۳x+۱>۵-x$$

یک نامعادله‌ی درجه‌ی اوّل است. مجموعه‌ی جواب نامعادله مجموعه‌ی مقادیری است که در نامعادله صدق می کنند. منظور از حل یک نامعادله تعیین مجموعه‌ی جواب آن است.

نامعادله های درجه‌ی اوّل

اگر بیشترین توان متغیر یک نامعادله برابر یک باشد، نامعادله، درجه‌ی اوّل است. برای حل نامعادله های درجه‌ی اوّل به سادگی می توان مانند معادله‌ی درجه اوّل عمل کرد. با این تفاوت که اگر دو طرف یک نامعادله را در یک عدد منفی ضرب یا تقسیم کنیم، جهت نامعادله عوض می شود.

مثال : نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۵x-۱\geq ۳x-۷$$

حل :

$$۵x-۳x\geq -۷+۱ \rightarrow ۲x\geq -۶ \rightarrow x\geq -۳$$

تمرین۱۹ : نامعادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب آن را به صورت یک بازه بنویسید.

$$۴x+۱<۶x+۱۰$$

تمرین۲۰ : نامعادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب آن را به صورت یک بازه بنویسید.

$$-۲<۳x-۱\leq ۸$$

تمرین برای حل :

۲۱ : نامعادله های زیر را حل کنید.

الف) $۱<۲x-۳\leq ۳$ ب) $x+۱\leq ۵-x<۲x+۳$ ج) $-۲<\frac{۵-x}{۲}<۰$

۲۲ : دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب آن را به صورت یک بازه بنویسید.

$$\begin{cases} ۳x+۱>۷ \\ ۵-۲x<۹ \end{cases}$$

نامعادله های درجه‌ی دوّم

برای حل یک نامعادله‌ی درجه دوّم به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱ : تمام جملات نامعادله را به طرف چپ منتقل می کنیم.

۲ : پس از ساده کردن، عبارت بدست آمده را تعیین علامت می کنیم.

۳ : با توجه به جدول تعیین علامت ، ناحیه‌ی جواب را مشخص می کنیم.

تمرین ۲۳ : نامعادله‌ی $x^{۲} < ۳x - ۲$ را حل کنید.

حل :

$x^{۲} < ۳x - ۲ \rightarrow x^{۲} - ۳x + ۲ < ۰$

معادله ی هم ارز $x^{۲} - ۳x + ۲ = ۰$

$(x-۱)(x-۲) = ۰ \rightarrow x = ۱ \ , \ x = ۲$

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$x^{۲} - ۳x + ۲ < ۰$		+	∘	−	∘	+	

لذا مجموعه جواب این نامعادله می شود $x \in (۱,۲)$

***

تمرین برای حل :

۲۴ : هر یک از نامعادله های زیر را حل کنید.

۱) $x^{۲} - ۸x + ۱۲ > ۰$ ۲) $x^{۲} + ۷ < ۳x$ ۳) $۴ \geq x^{۲}$

***

تذکر : به طریقی مشابه می توان نامعادلات درجات بالاتر و یا نامعادلات شامل عبارت های گویا را نیز حل کرد.

تمرین ۲۵ : نامعادله‌ی $\frac{x}{۲-x} \geq ۱$ را حل کنید.

حل :

$$\frac{x}{۲-x}\geq ۱\rightarrow \frac{x}{۲-x}-۱\geq ۰\rightarrow \frac{x-۲+x}{۲-x}\geq ۰\rightarrow \frac{۲x-۲}{۲-x}\geq ۰$$

$$۲x-۲=۰\rightarrow x=۱$$

$$۲-x=۰\rightarrow x=۲$$

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$۲x-۲$		−	۰	+		+	
$۲-x$		+		+	۰	−	
$\frac{۲x-۲}{۲-x}\geq ۰$		−	۰	+	نامعین	−	

$[۱,۲)=$ مجموعه‌ی جواب

تمرین ۲۶ : نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x^۲-۹}{۲x+۱}\geq ۰$

ب) $\frac{x^۲-۲}{x}<۱$

تمرین برای حل :

۲۷ : هر یک از نامعادله های زیر را حل کنید.

۱) $x^۳-۵x^۲-۶x>۰$

۲) $\frac{(x-۲)(x-۳)}{x-۱}\leq ۰$

۳) $\frac{x-۱}{x-۲}>۲$

۴) $\frac{x-۲}{x+۱}>۰$

۵) $\frac{۱-x}{۳+x}\geq ۰$

۶) $\frac{x^۲+۳x-۴}{x+۲}<۰$

۷) $\frac{۳+t}{۴-t^۲}<۰$

۸) $\frac{x^۲-۲}{x}>x$

۹) $\frac{۲m-۱}{m}>۱$

۱۰) $\frac{x^۳-x}{x^۲-۲x+۲}\leq ۰$

۱۱) $\frac{۴u+۸}{u-۱}\geq ۳$

۱۲) $\frac{x+۲}{x-۱}-\frac{۱}{x-۲}\leq ۱$

تمرین۲۸ : حدود m را چنان تعیین کنید که نمودار سهمی $y=(m-۱)x^۲+\sqrt{۳}x+m$ همواره در زیر محور x ها قرار گیرد.

حل : معادله درجه‌ی دوّم است.

$$y<\cdot\rightarrow\begin{cases}\Delta<\cdot\rightarrow ۳-۴m(m-۱)<\cdot\rightarrow ۴m^{۲}-۴m-۳<\cdot\\ a<\cdot\rightarrow m-۱<\cdot\rightarrow m<۱\end{cases}$$

و به کمک تعیین علامت عبارت درجه ی دوّم و تعیین اشتراک مجموعه‌ی جواب های دو نامعادله داریم.

$$m<-\frac{۱}{۲}$$

تمرین برای حل :

۲۹ : اگر عبارت $(k-۱)x^{۲}+(k-۱)x+۱$ به ازای هر مقدار x مثبت باشد، حدود k را به دست آورید.

***

دو ویژگی مهم قدر مطلق برای حل نامعادلات

اگر a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت می توان ویژگی های زیر را بیان کرد.

الف : نامساوی $|u|\leq a$ با نامساوی $-a\leq u\leq a$ معادل است.

ب : نامساوی $|u|\geq a$ با نامساوی های $u\geq a$ و $u\leq -a$ معادل است.

توجه داشته باشید که دو نامساوی را معادل گویند که مجموعه‌ی جواب آنها یکسان است. لذا با داشتن یکی از این نامساوی می توان دیگری را نوشت.

برای مثال اگر $|۳x+۱|<۵$ آنگاه می توان نوشت :

$$-۵<۳x+۱<۵$$

به کمک این دو ویژگی، می توان نامعادله های شامل قدرمطلق به شکل فوق را با تبدیل به یک نامعادله‌ی ساده تر حل نمود.

مثال : نامعادله‌ی $|۳x+۱|<۵$ را حل کنید.

حل :

$$-۵<۳x+۱<۵\xrightarrow{-۱}-۶<۳x<۴\xrightarrow{\div ۳}-۲<x<\frac{۴}{۳}$$

تمرین برای حل :

۳۰ : نامعادله های زیر را حل کنید.

الف) $|2x-1|>5$

د) $|5-2x|\geq 1$

ب) $|x-3|\leq 2$

و) $|7-2x|<1$

ج) $|\frac{x}{3}+1|<\frac{2}{3}$

توجه : اگر دو طرف نامعادله هایی به شکل های فوق را به توان دو برسانیم. می توان، به کمک تعیین علامت نامعادله را نیز حل کرد.

تمرین ۳۱ : نامعادله های زیر را حل کنید.

۱) $|2x+1|\geq 3$

۳) $|2x-3|<x$

۲) $|3x-1|<4$

۴) $|x+3|\leq|2x-1|$

تمرین ۳۲ : یک نامعادله‌ی قدرمطلقی بنویسید که مجموعه‌ی جواب آن بازه‌ی $(1,9)$ باشد.

حل :

$$1<x<9 \longrightarrow 1-5<x-5<9-5 \to -4<x-5<4 \to |x-5|<4$$

توجه : عدد وسط بازه‌ی (a,b) برابر $\frac{a+b}{2}$ است. لذا اگر از هر طرف نامساوی $a<x<b$ مقدار $\frac{a+b}{2}$ را کم کنیم، می توان نامساوی به صورت متقارن به دست آورد. سپس به کمک ویژگی های قدرمطلق نامعادله‌ی قدرمطلقی تشکیل داد.

تمرین ۳۳ : یک نامعادله‌ی قدر مطلقی بنویسید که مجموعه‌ی جواب آن بازه‌ی $(-1,7)$ باشد.

تمرین ۳۴: یک نامعادله‌ی قدر مطلقی بنویسید که مجموعه‌ی جواب آن بازه‌ی $[-11,3]$ باشد.

تمرین ۳۵ : یک نامعادله‌ی قدر مطلقی بنویسید که مجموعه‌ی جواب آن بازه‌ی $(-\infty,3]\cup[6,+\infty)$ باشد.

نتیجه : به کمک روش فوق می توان نوشت:

$$a<x<b \rightarrow a-\frac{a+b}{۲}<x-\frac{a+b}{۲}<b-\frac{a+b}{۲} \rightarrow \frac{a-b}{۲}<x-\frac{a+b}{۲}<\frac{b-a}{۲}$$

$$\rightarrow -\frac{b-a}{۲}<x-\frac{a+b}{۲}<\frac{b-a}{۲} \xrightarrow{\frac{b-a}{۲}>۰} |x-\frac{a+b}{۲}|<\frac{b-a}{۲}$$

***

روشی سریع برای حل نامعادلات

برای حل نامعادله‌ی قدر مطلقی به شکل $|u|\le|v|$ می توان به روش زیر عمل کرد.

$$|u|\le|v| \longrightarrow u^۲\le v^۲ \longrightarrow u^۲-v^۲\le ۰$$

$$\longrightarrow (u+v)(u-v)\le ۰$$

مثال : نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|۲x-۱|\le|-x+۷|$$

حل :

$$|۲x-۱|\le|-x+۷| \rightarrow (۲x-۱-x+۷)(۲x-۱+x-۷)\le ۰ \rightarrow (x+۶)(۳x-۸)\le ۰$$

$$\xrightarrow{x=-۶ \ \ or \ \ x=\frac{۸}{۳}} -۶\le x\le\frac{۸}{۳}$$

توجه داشته باشید که همین سبک را می توان برای نامعادلاتی که به شکل $|u|<|v|$ یـا $|u|\ge|v|$ یـا $|u|>|v|$ می باشند نیز می توان بکار برد.

نتیجه : برای حل نامعادله‌ی $|ax+b|\le|cx+d|$ مطابق سبک فوق می توان مستقیماً به صورت زیر عمل کرد.

$$\big((a+c)x+(b+d)\big)\big((a-c)x+(b-d)\big)\le ۰$$

مثال : نامعادله زیر را حل کنید.

$$|۲x-۱|\le|-x+۷|$$

حل :

$$\to (x+۶)(۳x-۸)\le ۰ \longrightarrow -۶\le x\le \frac{۸}{۳}$$

مثال : مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right|>۱$ را به دست آورید.

حل :

$$\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right|>۱ \to \frac{|x-۲|}{|۲x+۱|}>۱ \to |۲x+۱|<|x-۲| \to (۲x+۱)^۲<(x-۲)^۲$$

$$\to ۴x^۲+۴x+۱<x^۲-۴x+۴ \to ۳x^۲+۸x-۳<۰$$

$$\xrightarrow{۳x^۲+۸x-۳=(۳x-۱)(x+۳)=۰} -۳<x<\frac{۱}{۳}$$

و با توجه به اینکه $x=-\frac{۱}{۲}$ ریشه‌ی مخرج نامعادله‌ی داده شده است. این ریشه را باید حذف کرد. پس مجموعه‌ی جواب نامعادله به صورت زیر است.

$$\text{مجموعه‌ی جواب} = (-۳,\frac{۱}{۳})-\{-\frac{۱}{۲}\}$$

***

تهیه کننده: جابرعامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir **کانال تلگرام : @amerimath**